ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. CAIROLI
M. LEDOUX

Une topologie fine associée au produit de deux processus markoviens

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 4 (1984), p. 299-307
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_4_299_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 4, 1984, p. 299-307. *Probabilités et Statistiques*

Une topologie fine associée au produit de deux processus markoviens

par

R. CAIROLI et M. LEDOUX
Département de mathématiques, École polytechnique fédérale, 1015 Lausanne
Département de mathématiques, Université Louis Pasteur, 67084 Strasbourg

RÉSUMÉ. — On associe une topologie fine à un produit de deux processus markoviens et on démontre que cette topologie est la moins fine rendant continues les fonctions p-biexcessives.

ABSTRACT. — We associate a fine topology to the product of two Markov Processes and show that this topology is the coarsest making every p-biexcessive function continuous.

La topologie fine déterminée par un processus markovien peut être caractérisée de la façon suivante : elle est la topologie la moins fine rendant continues les fonctions p-excessives de ce processus. Dans cette note, nous nous proposons d'associer une topologie fine à un processus bimarkovien, de manière à conserver la caractérisation précédente, lorsque les fonctions p-biexcessives se substituent aux fonctions p-excessives. Les temps d'entrée du processus dans la théorie classique seront remplacés ici par les temps d'entrée le long des chemins aléatoires croissants. Les notions de chemin aléatoire croissant et de temps d'entrée dans un ensemble le long d'un tel chemin ont été introduites par J. B. Walsh [*1*] [*2*] [*3*], qui en a fait usage dans l'étude d'un problème de Dirichlet pour fonctions bi-surharmoniques et pour établir l'existence de limites fines à la frontière distinguée d'un bicylindre. Plus récemment, G. Mazziotto a repris ces notions dans une série de travaux consacrés à l'étude des processus bimarkoviens et du problème d'arrêt optimal pour processus à paramètre bidimensionnel [*4*] [*5*].

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $(\mathscr{F}_t, t \in \mathbb{R}_+^2)$ complète, continue à droite et satisfaisant à (F4) de [*6*]. L'ensemble des paramètres $\mathbb{R}_+^2$, dont les éléments sont désignés par $s, t, \ldots$ et ont pour coordonnées (s_1, s_2), (t_1, t_2), ..., est ici et dans toute la suite considéré comme muni de l'ordre partiel $s \leq t$ défini par la relation $s_1 \leq t_1$ et $s_2 \leq t_2$.

Rappelons pour commencer quelques notions de base. Un point d'arrêt T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2 \cup \{ \infty \}$ telle que $\{ \mathrm{T} \leq t \}$ est élément de $\mathscr{F}_t$ pour tout t de $\mathbb{R}_+^2$. A tout point d'arrêt T est associée la tribu des événements antérieurs à T, notée $\mathscr{F}_\mathrm{T}$. Un chemin aléatoire croissant est une famille $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_u, u \in \mathbb{R}_+)$ de points d'arrêt telle que $\mathrm{Z}_0 = 0$ et $u \to \mathrm{Z}_u$ est une application p. s. croissante et continue. Cette famille peut être paramétrée de sorte que pour tout u de $\mathbb{R}_+$ les composantes Z_u^1 et Z_u^2 de Z_u vérifient la relation $\mathrm{Z}_u^1 + \mathrm{Z}_u^2 = u$. Par la suite, tout chemin aléatoire croissant sera supposé muni de cette paramétrisation. L'ensemble des chemins aléatoires croissants sera désigné par $\mathscr{Z}$. Tout point d'arrêt T est porté par un chemin aléatoire croissant, ce qui veut dire qu'il existe un Z de $\mathscr{Z}$ et un temps d'arrêt τ de la filtration unidimensionnelle $(\mathscr{F}_{\mathrm{Z}_u}, u \in \mathbb{R}_+)$ tels que $\mathrm{T} = \mathrm{Z}_\tau$ p. s. sur $\{ \mathrm{T} < \infty \}$.

C'est grâce à la notion de chemin aléatoire croissant que le théorème d'arrêt de Doob a pu être étendu par J. B. Walsh [*3*] aux surmartingales à paramètre bidimensionnel : toute surmartingale positive $(\mathrm{X}_t, t \in \mathbb{R}_+^2)$, limite croissante de surmartingales $(\mathrm{X}_t^n, t \in \mathbb{R}_+^2)$ positives et continues à droite, vérifie le théorème d'arrêt de Doob par points d'arrêt ; en particulier, pour tout chemin aléatoire croissant Z, $(\mathrm{X}_{\mathrm{Z}_u}, u \in \mathbb{R}_+)$ est une surmartingale ordinaire ; cette surmartingale est continue à droite, puisqu'elle est la limite croissante de surmartingales ordinaires continues à droite ([*7*], VI. Théorème 1.8).

Nous allons sous peu préciser la notion de processus bimarkovien [*4*] [*5*] : *grosso modo* il s'agit d'un produit de deux processus markoviens ordinaires. Notre objectif étant de montrer l'existence d'une topologie fine liée de manière naturelle au processus bimarkovien que nous nous donnerons et à ses fonctions p-biexcessives, nous ne nous attarderons pas à chercher les hypothèses les plus larges assurant la validité de nos énoncés. Il va sans dire que celles que nous ferons seront vérifiées dans le cas du processus bibrownien. Nous adopterons la terminologie habituelle de [*8*] pour les processus markoviens et celle de [*4*] [*9*] pour les processus bimarkoviens. Pour $i = 1$ et 2, soit $X^i = (\Omega^i, \mathscr{F}^i, X^i_{t_i}, \mathscr{F}^i_{t_i}, P^i_{x_i})$ un processus standard de semi-groupe de transition $(P^i_{t_i})$, à valeurs dans un espace E^i localement compact métrisable. Nous supposerons que la résolvante $(U^i_{p_i})$ de $(P^i_{t_i})$ est fortement fellérienne. Posons $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}^1 \times \mathscr{F}^2$, $X_t = (X^1_{t_1}, X^2_{t_2})$, $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}^1_{t_1} \times \mathscr{F}^2_{t_2}$, $P_x = P^1_{x_1} \times P^2_{x_2}$, où $x = (x_1, x_2)$. La collection $X = (\Omega, \mathscr{F}, X_t, \mathscr{F}_t, P_x)$ est, par définition, le *processus bimarkovien* produit de X^1 et X^2. Ce processus est à valeurs dans $E = E^1 \times E^2$, considéré comme muni de la topologie produit, a pour semi-groupe $(P_t) = (P^1_{t_1} \times P^2_{t_2})$ et pour résolvante $(U_p) = (U^1_{p_1} \times U^2_{p_2})$, où $p = (p_1, p_2)$. Dans ce qui suit, nous prendrons toujours $p_1 = p_2 = p$ et écrirons U_p pour $U_{p,p}$.

Dorénavant p désignera un réel strictement positif. Une fonction borélienne positive f sur E est dite p-biexcessive si, pour chaque x_2 de E^2, la fonction $f(\,.\,, x_2)$ sur E^1 est p-excessive relativement à X^1 et, pour chaque x_1 de E^1, la fonction $f(x_1, .)$ sur E^2 est p-excessive relativement à X^2.

A noter que toute fonction p-biexcessive f est la limite d'une suite croissante de fonctions p-biexcessives bornées et continues, et est donc, en particulier, semi-continue inférieurement. En effet, d'après [*4*], proposition 2.2.11, f est limite croissante d'une suite de p-potentiels p-biexcessifs $U_p g_n$ de fonctions g_n boréliennes bornées et $U_p g_n$ est continu pour tout n, puisque (U_p) est fortement fellérienne [*8*].

La propriété de Markov montre aisément que si f est une fonction p-biexcessive telle que $f(x) < \infty$, alors $(e^{-p(t_1+t_2)} f(X_t), t \in \mathbb{R}^2_+)$ est une surmartingale sous P_x. D'après ce qui précède, cette surmartingale est la limite d'une suite croissante de surmartingales continues. Comme déjà noté, pour tout chemin aléatoire croissant Z, $(e^{-pu} f(X_{Z_u}), u \in \mathbb{R}_+)$ est alors une surmartingale ordinaire continue à droite sous P_x.

Nous allons maintenant extraire des travaux de G. Mazziotto un résultat (proposition 4.1.2 de [*4*]) qui constituera un pas important vers l'objectif que nous nous sommes fixé.

Si Z est un chemin aléatoire croissant et A un sous-ensemble de E, nous poserons

$$\tau^Z_A = \begin{cases} \inf \{ u \in \mathbb{R}_+ : X_{Z_u} \in A \} & \text{si} \quad \{ \quad \} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si} \quad \{ \quad \} = \emptyset, \end{cases}$$

et

$$Z_\infty = \infty.$$

PROPOSITION. — *Soit f une fonction semi-continue inférieurement et bor-*

née sur E. *Pour toute loi* P_x, *l'enveloppe de Snell* J *associée au processus* $(e^{-p(t_1+t_2)}f(X_t),\ t \in \mathbb{R}_+^2)$ *est la surmartingale définie par*

$$J_t = e^{-p(t_1+t_2)}r(X_t), \qquad t \in \mathbb{R}_+^2,$$

où r est la plus petite fonction p-biexcessive majorant f. En outre, la relation suivante est satisfaite pour tout x de E :

$$r(x) = \sup_{Z \in \mathscr{Z}} E_x(e^{-p\tau_A^Z}r(X_{Z_{\tau_A^Z}})\,;\ \tau_A^Z < \infty)$$

où $A = \{ x \in E : f(x) > 0 \}$.

Démonstration. — L'existence de r ainsi que l'assertion concernant l'enveloppe de Snell J sont établies dans la proposition 4.1.2 de [*4*]. La démonstration de la dernière partie de la proposition est analogue à celle de la proposition 2.2.3 de [*5*]. Fixons un point x de E et opérons sous la loi P_x. Désignons par Y le processus $(e^{-p(t_1+t_2)}f(X_t),\ t \in \mathbb{R}_+^2)$ et par $\bar{J}$ l'enveloppe de Snell du processus $JI_{\{Y>0\}}$. Sur l'ensemble $\{ Y > 0 \}$, $\bar{J} \geq J \geq Y$, donc $\bar{J} \geq Y$ partout et $\bar{J} \geq J$ (aux ensembles minces près [*10*]). Comme trivialement $\bar{J} \leq J$, nous en concluons que $\bar{J} = J$ (aux ensembles minces près). La relation de la proposition qu'il nous reste à démontrer devient alors

$$E_x(\bar{J}_0) = \sup_{Z \in \mathscr{Z}} E_x(\bar{J}_{Z_{\tau_A^Z}}),$$

où $\bar{J}_\infty$, de même que ci-dessous J_∞, est posé égal à 0. Par définition de $\bar{J}$,

$$E_x(\bar{J}_0) = \sup_S E_x(J_S I_{\{Y_S>0\}}),$$

S parcourant l'ensemble des points d'arrêt. Considérons un tel point d'arrêt S ; il est porté par un chemin aléatoire croissant Z. Définissons alors

$$T = \begin{cases} S \quad \text{sur} \quad \{ Z_{\tau_A^Z} \leq S \}, \\ \infty \text{ sur le complémentaire ;} \end{cases}$$

T est un point d'arrêt supérieur ou égal à $Z_{\tau_A^Z}$; il vérifie en outre clairement

$$E_x(J_S I_{\{Y_S>0\}}) = E_x(J_T I_{\{Y_T>0\}}).$$

Ainsi

$$E_x(J_S I_{\{Y_S>0\}}) \leq E_x(\bar{J}_T) \leq E_x(\bar{J}_{Z_{\tau_A^Z}}).$$

Il s'ensuit que

$$E_x(\bar{J}_0) \leq \sup_{Z \in \mathscr{Z}} E_x(\bar{J}_{Z_{\tau_A^Z}})\,;$$

l'inégalité inverse étant évidente, la proposition est démontrée.

En appliquant cette proposition à l'indicatrice d'un ouvert, nous obtenons le corollaire suivant.

COROLLAIRE. — *Pour tout sous-ensemble ouvert* G *de* E, *la fonction* Φ_G^p *sur* E, *définie par*

$$\Phi_G^p(x) = \sup_{Z \in \mathscr{Z}} E_x(e^{-p\tau_G^Z}) \qquad (\textit{avec la convention } e^{-\infty} = 0)$$

est p-biexcessive.

Démonstration. — r désignant la plus petite fonction p-biexcessive majorant I_G, d'après la proposition précédente, pour tout x de E

$$r(x) = \sup_{Z \in \mathscr{Z}} E_x(e^{-p\tau_G^Z} r(X_{Z_{\tau_G^Z}}) \; ; \; \tau_G^Z < \infty).$$

D'autre part, r étant égale à 1 sur G, par la continuité à droite P_x-p. s. de l'application $u \to r(X_{Z_u})$ $r(X_{Z_{\tau_G^Z}}) = 1$ P_x-p. s. sur $\{ \tau_G^Z < \infty \}$, pour tout x de E. Il s'ensuit que $r = \Phi_G^p$ et donc que Φ_G^p est p-biexcessive.

Nous en venons à présent à l'objet de cette note. Intuitivement, un ensemble A sera ouvert pour la topologie que nous allons définir si le processus X, partant d'un point de A, reste un instant dans A le long de tout chemin aléatoire croissant. Mais la définition que nous suggérons assurera, en plus, une uniformité par rapport aux chemins.

De façon précise, un sous-ensemble borélien A de E sera dit *finement ouvert* si, pour tout x dans A, il existe un ensemble fermé (pour la topologie initiale) F tel que $x \in F \subset A$ et

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{Z \in \mathscr{Z}} P_x \left\{ \tau_{F^c}^Z > \frac{1}{n} \right\} = 1 .$$

Nous appellerons *topologie fine* la topologie définie sur E par les ensembles finement ouverts. Cette terminologie est justifiée, car toute réunion d'ensembles finement ouverts est évidemment un ensemble finement ouvert, E est finement ouvert et l'intersection de deux ensembles finement ouverts A et A′ est un ensemble finement ouvert, comme nous allons le voir : par définition, si x est un point de $A \cap A'$, il existe des fermés F et F′ et n_0 tels que $x \in F \cap F' \subset A \cap A'$ et $P_x \left\{ \tau_{F^c}^Z > \frac{1}{n} \right\} \wedge P_x \left\{ \tau_{F'^c}^Z > \frac{1}{n} \right\} \geq 1 - \varepsilon$, pour tout Z de $\mathscr{Z}$ et tout $n \geq n_0$; compte tenu de l'égalité $\tau_{(F \cap F')^c}^Z = \tau_{F^c}^Z \wedge \tau_{F'^c}^Z$, il s'ensuit que $P_x \left\{ \tau_{(F \cap F')^c}^Z > \frac{1}{n} \right\} = P_x \left(\left\{ \tau_{F^c}^Z > \frac{1}{n} \right\} \cap \left\{ \tau_{F'^c}^Z > \frac{1}{n} \right\} \right) \geq 1 - 2\varepsilon$, pour tout Z de $\mathscr{Z}$ et tout $n \geq n_0$, ce qui prouve l'assertion.

Cette topologie est plus fine que le produit des topologies fines associées à X^1 et X^2. Nous allons voir qu'elle est aussi plus fine que la topologie $\mathscr{T}$ dont les ouverts sont les ensembles A ayant la propriété suivante : pour tout x dans A, presque toutes les trajectoires issues de x mettent un temps bidimensionnel positif à quitter A ; plus précisément, A est ouvert pour la topologie $\mathscr{T}$, si pour tout point x de A, il existe un borélien B tel que $x \in \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{P}_x\{\sigma_{\mathrm{B}} > 0\} = 1$, où

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \begin{cases} \sup\{u \in \mathbb{R}_+ : \mathrm{X}_{t_1,t_2} \in \mathrm{B} \quad \text{pour tout} \quad t_1, t_2 \in [0,u]\} & \text{si} \quad \{\quad\} \neq \varnothing, \\ 0 \quad \text{si} \quad \{\quad\} = \varnothing . \end{cases}$$

Nous n'entrerons pas dans des considérations détaillées ayant rapport à cette définition, sinon pour dire que σ_{B} est un temps d'arrêt de la filtration complétée de $(\mathscr{F}_{u,u}, u \in \mathbb{R}_+)$ par rapport à la famille de probabilités $\mathrm{P}_\mu(.) = \int \mathrm{P}_x(.)d\mu(x)$, μ parcourant l'ensemble des probabilités sur E, et que si x est un point de B tel que $\mathrm{P}_x\{\sigma_{\mathrm{B}} > 0\} = 1$, il existe un compact K tel que $x \in \mathrm{K} \subset \mathrm{B}$ et $\mathrm{P}_x\{\sigma_{\mathrm{K}} > 0\} = 1$. Cela entraîne que tout ouvert A pour la topologie $\mathscr{T}$ est finement ouvert, car si x est dans A et K est un compact tel que $x \in \mathrm{K} \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{P}_x\{\sigma_{\mathrm{K}} > 0\} = 1$, alors

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{\mathrm{Z} \in \mathscr{Z}} \mathrm{P}_x \left\{ \tau_{\mathrm{K}^c}^{\mathrm{Z}} > \frac{1}{n} \right\} = 1 ,$$

puisque $\left\{ \tau_{\mathrm{K}^c}^{\mathrm{Z}} > \frac{1}{n} \right\} \supset \left\{ \sigma_{\mathrm{K}} > \frac{1}{n} \right\}$ pour tout Z de $\mathscr{Z}$, étant donné que $\mathrm{X}_{\mathrm{Z}_u} \in \mathrm{K}$ si $\mathrm{Z}_u^1, \mathrm{Z}_u^2 < \sigma_{\mathrm{K}}$, donc si $\mathrm{Z}_u^1 + \mathrm{Z}_u^2 = u < \sigma_{\mathrm{K}}$. Le lecteur pourra également se convaincre de la comparabilité des deux topologies en constatant qu'un borélien B est ouvert pour la topologie $\mathscr{T}$ si et seulement si $\mathrm{B} = \left\{ \Psi_{\mathrm{B}^c}^p < \frac{1}{p^2} \right\}$, où $\Psi_{\mathrm{B}^c}^p$ est la « réduite » définie par

$$\Psi_{\mathrm{B}^c}^p(x) = \mathrm{E}_x \left(\iint_{\cup\{[t,\infty) : \mathrm{X}_t \in \mathrm{B}^c\}} e^{-p(s_1+s_2)} ds_1 ds_2 \right), \qquad x \in \mathrm{E} ,$$

puis en démontrant que $\Psi_{\mathrm{B}^c}^p$ est p-biexcessive et en appliquant le théorème ci-dessous.

Notons, en outre, qu'une fonction borélienne f sur E est continue pour la topologie $\mathscr{T}$ si et seulement si, pour tout x dans E, $\lim_{t \to 0} f(\mathrm{X}_t) = f(x)$ P_x-p. s. Les fonctions p-biexcessives n'ayant pas, en général, cette propriété de régularité sur les trajectoires, compte tenu du théorème suivant, la topologie fine est strictement plus fine que la topologie $\mathscr{T}$.

Voici maintenant le résultat annoncé.

THÉORÈME. — *La topologie fine est la topologie la moins fine qui rende* *continues les fonctions p-biexcessives (pour un réel p strictement positif fixé).*

Démonstration. — Notons $\mathscr{T}_b$ la topologie la moins fine rendant continues les fonctions p-biexcessives et montrons d'abord que $\mathscr{T}_b$ est plus fine que la topologie fine. A cet effet, considérons un voisinage fin A d'un point x de E. Par définition, il existe un ensemble fermé F tel que $x \in \mathrm{F} \subset \mathrm{A}$ et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathrm{Z}\in\mathscr{Z}} \mathrm{P}_x \left\{ \tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}} \leq \frac{1}{n} \right\} = 0 .$$

Posons $\mathrm{U} = \{ \Phi_{\mathrm{F}^c}^p < 1 \}$; U est ouvert dans $\mathscr{T}_b$, en vertu du corollaire, et $\mathrm{U} \subset \mathrm{F}$, car si $y \in \mathrm{F}^c$, $\mathrm{P}_y \{ \tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}} = 0 \} = 1$ et par conséquent $\Phi_{\mathrm{F}^c}^p(y) = 1$. Pour démontrer notre première assertion, il reste à établir que x est un point de U. Or, pour tout chemin aléatoire croissant Z et tout entier n,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_x(e^{-p\tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}}}) &\leq \mathrm{E}_x(e^{-p\tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}}} \mathrm{I}_{\{\tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}} \leq \frac{1}{n}\}}) + \mathrm{E}_x(e^{-p\tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}}} \mathrm{I}_{\{\tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}} > \frac{1}{n}\}}) \\ &\leq \mathrm{P}_x \left\{ \tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}} \leq \frac{1}{n} \right\} + e^{-p/n} \mathrm{P}_x \left\{ \tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}} > \frac{1}{n} \right\} \\ &\leq e^{-p/n} + (1 - e^{-p/n}) \mathrm{P}_x \left\{ \tau_{\mathrm{F}^c}^{\mathrm{Z}} \leq \frac{1}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Par le choix de F, il est alors clair que $\Phi_{\mathrm{F}^c}^p(x) < 1$ et donc $x \in \mathrm{U}$.

Pour démontrer la partie réciproque, il suffira d'établir que les fonctions p-biexcessives sont semi-continues supérieurement pour la topologie fine, étant donné qu'elles sont semi-continues inférieurement pour la topologie initiale. Nous aurons besoin du lemme suivant dont la démonstration est rejetée à la fin de celle-ci.

LEMME. — *Si f est une fonction p-biexcessive bornée, pour tout x dans* E *et tout réel* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathrm{Z}\in\mathscr{Z}} \mathrm{P}_x \{ \sup_{u \leq \frac{1}{n}} (e^{-pu} f(\mathrm{X}_{\mathrm{Z}_u}) - f(x)) > \varepsilon \} = 0 .$$

Ce lemme admis, considérons une fonction p-biexcessive f. Quitte à la composer avec la fonction $u \to 1 - e^{-u}$ (cf. [*8*], p. 75), nous pouvons supposer f bornée. Montrons alors que pour tout réel a, l'ensemble $\mathrm{A} = \{ f < a \}$ est finement ouvert. Soit x tel que $f(x) < a$; il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) < a - 3\varepsilon$. Notons F l'ensemble $\{ f \leq a - \varepsilon \}$; F est fermé, car f est semi-continue inférieurement. Il est clair par ailleurs que $x \in F \subset A$. En outre, pour tout chemin aléatoire croissant Z et tout entier n tel que $e^{-p/n}(a - \varepsilon) > a - 2\varepsilon$,

$$\begin{aligned} P_x\left\{ \tau^Z_{F^c} \leq \frac{1}{n} \right\} &\leq P_x\{ \sup_{u \leq \frac{1}{n}} f(X_{Z_u}) \geq a - \varepsilon \} \\ &\leq P_x\{ \sup_{u \leq \frac{1}{n}} e^{-pu} f(X_{Z_u}) > a - 2\varepsilon \} \\ &\leq P_x\{ \sup_{u \leq \frac{1}{n}} e^{-pu} f(X_{Z_u}) > f(x) + \varepsilon \}. \end{aligned}$$

D'après le lemme, il s'ensuit que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{Z \in \mathscr{Z}} P_x\left\{ \tau^Z_{F^c} \leq \frac{1}{n} \right\} = 0$$

et donc A est finement ouvert, ce qui achève la démonstration du théorème.

Démontrons à présent le lemme. Pour tout chemin aléatoire croissant Z, $(e^{-pu} f(X_{Z_u}) - f(x), u \in \mathbb{R}_+)$ est une surmartingale continue à droite et nulle en 0 sous P_x. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons donc, en vertu de l'inégalité maximale de Doob,

$$\varepsilon P_x\{ \sup_{u \leq \frac{1}{n}} (e^{-pu} f(X_{Z_u}) - f(x)) > \varepsilon \} \leq E_x((e^{-p/n} f(X_{Z_{\frac{1}{n}}}) - f(x))^-).$$

D'après le théorème d'arrêt par points d'arrêt appliqué à la sous-martingale $((e^{-p(t_1+t_2)} f(X_t) - f(x))^-, t \in \mathbb{R}^2_+)$, le second membre de l'inégalité est majoré par l'espérance

$$E_x((e^{-2p/n} f(X_{\frac{1}{n},\frac{1}{n}}) - f(x))^-),$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, car le processus $(f(X_{u,u}), u \in \mathbb{R}_+)$ est continu à droite, du fait que f est $2p$-excessive pour le processus markovien $(X_{u,u}, u \in \mathbb{R}_+)$ de semi-groupe $(P_{u,u})$ (cf. [*9*]).

RÉFÉRENCES

[*1*] J. B. WALSH, *Probability and a Dirichlet problem for multiply superharmonic functions. Thèse*, chap. VIII, University of Illinois, 1966.

[*2*] J. B. WALSH, Probability and a Dirichlet problem for multiply superharmonic functions. *Ann. Inst. Fourier*, t. **18**, 1968, p. 221-279.

[*3*] J. B. WALSH, Optional increasing paths. *Lecture Notes in Math.*, t. **863**, 1981, p. 172-201, Springer, Berlin.

[*4*] G. MAZZIOTTO, *Processus bimarkoviens et arrêt optimal sur* $\mathbb{R}^2_+$. *Thèse*, Université de Paris 6, 1982.

[*5*] G. MAZZIOTTO, *Optimal stopping of bi-Markov processes.* Preprint, 1983.

[6] R. CAIROLI et J. B. WALSH, Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.*, t. **134**, p. 111-183, 1975.
[7] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, t. **2**. Hermann, Paris, 1980.
[8] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, *Markov processes and potential theory*. Academic Press, New York, 1968.
[9] R. CAIROLI, Produits de semi-groupes de transition et produits de processus. *Publ. Inst. Stat. Paris*, t. **15**, 1966, p. 311-384.
[10] R. CAIROLI, Enveloppe de Snell d'un processus à paramètre bidimensionnel. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **18**, 1982, p. 47-54.

(Manuscrit reçu le 17 janvier 1984)