ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

Y. DERRIENNIC

M. LIN

Sur le comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 2 (1984), p. 127-132

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_2_127_0>

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 2, 1984, p. 127-132. *Probabilités et Statistiques*

Sur le comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité

par

Y. DERRIENNIC, M. LIN
Faculté des Sciences, 6, avenue Le-Gorgeu, F 29283 Brest
Dept of Mathematics, Ben Gurion University, Beer Sheva, Israël

RÉSUMÉ. — Étant donné une mesure de probabilité régulière μ sur un groupe abélien localement compact, nous donnons des conditions équivalentes à la convergence forte dans L^p vers 0 des opérateurs de convolution μ^n pour $p = 1$ ou $p > 1$. Nous n'utilisons que des méthodes générales de la théorie des opérateurs de Markov et des faits élémentaires de l'analyse harmonique.

ABSTRACT. — Given a regular probability measure μ on a locally compact abelian group, we develop equivalent conditions to the L^p-strong convergence to 0 of the convolution operators μ^n, with $p = 1$ or $p > 1$. We use only general methods of the theory of Markov operators and elementary facts of harmonic analysis.

Dans une note récente nous avons donné une description précise de la tribu asymptotique d'une marche aléatoire sur un groupe abélien localement compact G ([*2*] ; et aussi dans certains cas où G n'est pas abélien). Nous en avons déduit des résultats de convergence pour les puissances de convolution μ^n de la mesure de probabilité μ qui est la loi de la marche aléatoire. Le but du présent article est de reprendre et compléter ces résultats en n'utilisant que des méthodes générales de la théorie des opérateurs et des résultats élémentaires d'analyse harmonique. On n'utilise donc plus ni l'espace des trajectoires de la marche aléatoire ni le théorème de convergence des martingales implicite dans [*2*].

Tout d'abord rappelons le théorème 2 de [*1*] (dont la démonstration dérive d'un argument de [*5*]) qui constitue une sorte de version faible du théorème ergodique en moyenne et qui sera utilisé dans la suite :

« Soit T une contraction linéaire d'un espace de Banach X. Pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{T}^j x \right\| = \sup \{ | \langle x, x^* \rangle | : \mathrm{T}^* x^* = x^* \quad \text{et} \quad \| x^* \| \leqslant 1 \}$$

$$\lim_n \| \mathrm{T}^n x \| = \sup \left\{ | \langle x, x^* \rangle | : x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{T}^{*n}(\mathrm{B}) \right\}$$

où B est la boule unité de l'espace dual X* ».

Dans toute la suite une mesure de probabilité régulière μ est définie sur le groupe localement compact abélien G. Aucune hypothèse n'est faite sur son support S. On note m une mesure de Haar de G ; $\| \ \|_p$ désigne la norme de l'espace $\mathrm{L}^p(m)$. On note $\check{\mu}$ la mesure symétrique de μ. On note $\hat{\mathrm{G}}$ le groupe dual de G et on indique par $\hat{}$ la transformée de Fourier. Le premier résultat se place dans le cadre général considéré dans [*6*].

THÉORÈME 1. — Soit T_t une représentation continue de G par des contractions linéaires dans l'espace de Banach X, et soient

$$\mathrm{U} = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{T}_t \mu(dt), \qquad \check{\mathrm{U}} = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{T}_t \check{\mu}(dt).$$

Alors en notant B la boule unité de X* on a

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{U}^{*n}(\mathrm{B}) &= \mathrm{B} \cap \{ x^* : \mathrm{U}^* \check{\mathrm{U}}^* x^* = x^* \} \\ &= \mathrm{B} \cap \{ x^* : \mathrm{T}_t^* x^* = x^* \quad \forall t \in \mathrm{S} - \mathrm{S} \}. \end{aligned}$$

De plus, quel que soit $x \in \mathrm{X}$,

$$\lim_n \| \mathrm{U}^n x \| = \lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{U}^j \check{\mathrm{U}}^j x \right\|.$$

Démonstration. — D'après le rappel la seconde assertion résulte de la première. L'égalité $\{ x^* : \mathrm{U}^* \check{\mathrm{U}}^* x^* \} = \{ x^* : \mathrm{T}_t^* x^* = x^* \ \forall t \in \mathrm{S} - \mathrm{S} \}$ est la version abstraite du théorème de Choquet-Deny donnée dans [*6*] car $\mathrm{S} - \mathrm{S}$

est le support de la mesure $\mu * \check{\mu}$. Il ne reste donc à prouver que la première égalité. Comme U et $\check{U}$ commutent l'inclusion

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U^{*n}(B) \supset B \cap \{ x^* : U^*\check{U}^*x^* = x^* \}$$

est évidente. Pour prouver l'inclusion contraire posons

$$U_A = \frac{1}{\mu(A)} \int_A T_t \mu(dt)$$

où A est un borélien de G tel que $0 < \mu(A) < 1$. On peut écrire

$$U = \mu(A)U_A + \mu(A^c)U_{A^c}.$$

Le lemme 1 de [*4*], qui est déjà l'argument essentiel de la démonstration du théorème de Choquet-Deny de [*6*] (voir aussi [*8*], Chap. 5), nous dit que, étant donné un barycentre Q de deux contractions qui commutent P_1 et P_2, $\lim_n \| Q^n(P_1 - P_2) \| = 0$. Comme G est abélien, U_A et U_{A^c} commutent donc $\lim_n \| U^n(U_A - U_{A^c}) \| = 0$. Alors, pour $x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U^{*n}(B)$ et $x \in (U_A - U_{A^c})X$, on a $| \langle x, x^* \rangle | \leqslant \| U^n x \|$ donc $\langle x, x^* \rangle = 0$, et $U_A^* x^* = U_{A^c}^* x^* = U^* x^*$. En faisant décroître A vers un point $t \in S$ on trouve $T_t^* x^* = U^* x^*$. Pour $t, s \in S$ on obtient

$$x^* = T_{-t}^* T_t^* x^* = T_{-t}^* U^* x^* = T_{-t}^* T_s^* x^* = T_{s-t}^* x^* \quad \text{d'où} \quad U^*U^*x^* = x^*$$

On considère maintenant le cas où $X = L^1(m)$ et où $T_t f(x) = f(x-t)$. On note simplement $U f(x) = \int f(x-t)\mu(dt) = \mu * f(x)$ (m p. p.) *et* $U^* h = \check{\mu} * h$ pour $f \in L^1$ et $h \in L^\infty$.

THÉORÈME 2. — Pour $f \in L^1(m)$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \mu^j * f \right\|_1 = 0$

ii) $\hat{f}(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \hat{G}$ tel que $\hat{\mu}(\gamma) = 1$.

Démonstration. — L'implication $i \Rightarrow ii$ résulte du rappel et du fait que tout $\gamma \in \hat{G}$ vérifiant $\hat{\mu}(\gamma) = 1$ est invariant par convolution par $\check{\mu}$.
L'implication réciproque résulte encore du rappel et du fait que les

combinaisons linéaires des caractères γ vérifiant $\hat{\mu}(\gamma) = 1$ sont denses pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans le sous-espace de L^∞ formé des invariants par convolution par $\check{\mu}$. Ceci résulte facilement du théorème de Choquet-Deny, grâce auquel on peut identifier le sous-espace des invariants sous la convolution par $\check{\mu}$ avec l'espace L^∞ du groupe quotient de G par le sous-groupe fermé engendré par S.

THÉORÈME 3. — Pour $f \in L^1(m)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_n \| \mu^n * f \|_1 = 0$

ii) $\hat{f}(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \hat{G}$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| = 1$.

iii) $\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\mu}(\gamma)^j \mu^j * f \right\|_1 = 0$ pour tout $\gamma \in \hat{G}$

iv) $\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j \mu^j * f \right\|_1 = 0$ pour tout nombre complexe λ de module 1.

v) $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} | \langle \mu^j * f, g \rangle | = 0$ pour tout $g \in L^\infty$.

vi) $\mu^n * f$ converge faiblement vers 0 dans L^1 (pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$).

Démonstration. — Les implications *i*) $\Rightarrow$ *vi*) $\Rightarrow$ *v*) sont évidentes.

v) $\Rightarrow$ *iv*) Si $\bar{\lambda}(\check{\mu} * g) = g$ la condition *v*) donne $\langle f, g \rangle = 0$. Alors *iv*) résulte du rappel.

iv) $\Rightarrow$ *iii*) est évident.

iii) $\Rightarrow$ *ii*) Si $\gamma \in \hat{G}$ vérifie $|\hat{\mu}(\gamma)| = 1$ alors γ est constant sur S donc $\hat{\mu}(\bar{\gamma}) = \hat{\mu}(\gamma)^{-1}$. D'après *iii*)

$$0 = \lim_n \left\langle \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\mu}(\bar{\gamma})^j \mu^j * f, \bar{\gamma} \right\rangle = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\mu}(\bar{\gamma})^j \mu(\gamma)^j \hat{f}(\gamma) = \hat{f}(\gamma).$$

ii) $\Rightarrow$ *i*) La condition $|\hat{\mu}(\gamma)| = 1$ équivaut à $\widehat{\mu * \check{\mu}}(\gamma) = 1$. Sous l'hypothèse *ii*) le théorème 2 donne

$$\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (\mu * \check{\mu})^j * f \right\|_1 = 0.$$

Le théorème 1 donne alors *i*).

Remarques. — Une démonstration probabiliste du théorème précédent est donnée dans [*2*]. L'équivalence entre *i*) et *iii*) a été prouvée dans [*3*] à l'aide du théorème de synthèse spectrale.

Il n'est pas difficile de montrer de plus que les sous-espaces de L^∞ formés soit des invariants sous la convolution par $\check{\mu}$, soit des invariants sous $\mu * \check{\mu}$ sont des sous-espaces L^∞ par rapport à des sous-tribus convenables : soit la sous-tribu quotient par le sous-groupe fermé engendré par S, soit la sous-tribu quotient par le sous-groupe fermé engendré par $S - S$. On peut alors déduire la description des tribus invariante ou asymptotique de la marche aléatoire de loi μ donnée dans [*2*] par des méthodes classiques de la théorie des chaînes de Markov.

Pour terminer voici un résultat concernant la convergence dans L^p avec $p > 1$, qui utilise aussi le théorème 1.

THÉORÈME 4. — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $S - S$ engendre un sous-groupe fermé non compact (S est le support de μ).

ii) $\lim_n \| \mu^n * f \|_\infty = 0$ pour tout $f \in C_0(G)$.

iii) $\lim_n \| \mu^n * f \|_p = 0$ pour tout $f \in L^p(m)$, $p > 1$.

Démonstration. — *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Pour alléger la notation posons $\mu * \check{\mu} = \eta$. D'après le théorème 1 appliqué à la représentation de G par les translations dans $C_0(G)$, il suffit de montrer que si ν est une mesure (signée) finie vérifiant $\eta * \nu = \nu$ alors $\nu = 0$. Soit H le sous-groupe fermé engendré par $S - S$. Pour $f \in C_0(G)$, $\eta * (\nu * f) = (\eta * \nu) * f = \nu * f$, donc pour tout $t \in H$ on a $\delta_t * (\nu * f) = \nu * f$. Mais $g = \nu * f$ est dans $C_0(G)$, donc pour $\varepsilon > 0$, $A = \{ x : | g(x) | \geqslant \varepsilon \}$ est compact et invariant par translation par $t \in H$. Si $A \neq \emptyset$, on a $H \subset A - A$ qui est compact ; ceci contredit *i*). Donc $A = \emptyset$ et $g = 0$. Comme f est arbitraire dans $C_0(G)$ on obtient $\nu = 0$.

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Puisque les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p, il suffit de considérer de telles fonctions f. Mais alors d'après *ii*), $\lim_n \| \mu^n * f \|_\infty = 0$, et

$$\| \mu^n * f \|_p^p \leqslant \| \mu^n * f \|_1 \; \| \mu^n * f \|_\infty^{p-1} \leqslant \| f \|_1 \; \| \mu^n * f \|_\infty^{p-1}$$

d'où *iii*).

iii) $\Rightarrow$ *i*) Supposons H compact. Soit V un voisinage ouvert relativement compact de l'élément neutre. Alors $A = H + V$ est relativement compact d'intérieur non vide, donc $1_A \in L^p$ et $1_A \neq 0$. De plus 1_A est invariant par translation par $t \in H$, donc $\mu * \check{\mu} * 1_A = 1_A$ ce qui contredit *iii*).

Remarques. — L'équivalence de *i*) et *ii*) a aussi été démontrée pour μ adaptée dans [7, th. 4.33]. En utilisant le théorème de structure des groupes abéliens localement compacts à génération compacte, il est démontré dans [7], que, si S engendre un sous-groupe non compact G′, alors S − S engendre un sous-groupe compact seulement dans le cas où G′ est le produit du groupe des entiers avec un groupe compact dont une classe contient S.

RÉFÉRENCES

[1] Y. DERIENNIC, Lois « zéro ou deux » pour les processus de Markov. Applications aux marches aléatoires. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section B, t. **XII**, n° 2, 1976, p. 111-129.

[2] Y. DERRIENNIC et M. LIN, Sur la tribu asymptotique des marches aléatoires sur les groupes. Séminaire de Probabilités, Rennes, 1983.

[3] S. FOGUEL, On iterates of convolutions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **47**, n° 2, 1975, p. 368-370.

[4] S. FOGUEL et B. WEISS, On convex power series of a conservative Markov operator. *Proc. Amer. Math. Sc.*, t. **38**, n° 2, 1973, p. 325-330.

[5] M. LIN, Mixing for Markov operators. *Z. Wahrschein*, t. **19**, 1971, p. 231-242.

[6] M. LIN, Ergodic properties of an operator obtained from a continuous representation, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section B, t. **XIII**, n° 4, 1977, p. 321-331.

[7] A. MUKHERJEA et N. TSERPES, Measures on topological semi-groups. *Lecture Notes in Math.*, t. **547**, 1976, Springer.

[8] D. REVUZ, *Markov Chains*, North Holland Pub., 1975.

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1982)