ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PHILIPPE BOUGEROL

Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 4 (1983), p. 369-391

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_4_369_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIX, n° 4-1983, p. 369-391. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles

par

Philippe BOUGEROL
U. E. R. de Mathématiques, Université Paris 7[e]
75221 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous étudions le comportement asymptotique des puissances de convolution d'une classe de probabilités centrées sur certains groupes résolubles connexes. Nous montrons que les probabilités μ de cette classe vérifient un théorème central limite local, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{ a_n, n \geqq 0 \}$ de réels positifs, ne dépendant que du groupe, telle que la suite $\{ a_n\mu^{*n}, n \geqq 0 \}$ converge vaguement vers une mesure non dégénérée. Par exemple sur le groupe affine de la droite, groupe à croissance exponentielle, a_n est égal à $n^{3/2}$.

ABSTRACT. — In this work we study the asymptotic behavior of the convolution powers of a class of centered probabilities on some connected solvable groups. We prove that the probabilities μ of this class satisfy a local central limit theorem: there exists a sequence $\{ a_n, n \geqq 0 \}$ of positive numbers, depending only on the group, such that the sequence $\{ a_n \mu^{*n}, n \geqq 0\}$ converges weakly to a non-degenerate measure. For example, on the affine group of the line, which has exponential growth, a_n is equal to $n^{3/2}$.

Dans cet article nous illustrons par quelques exemples la dépendance qui existe entre la structure d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe et le comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur celui-ci.

Les résultats de [*1*] et [*3*] laissent penser que sur un groupe connexe à croissance polynomiale de degré d les probabilités μ centrées, possédant un moment d'ordre deux (au sens de [*10*]) et étalées vérifient le théorème local suivant : La suite des mesures $\{ n^{d/2}\mu^n, n \in \mathbb{N} \}$ converge vaguement vers une mesure de Haar non nulle. Dans la première partie nous montrons que ce théorème est vrai sur le revêtement universel du groupe des déplacements du plan, groupe résoluble à croissance polynomiale de degré 3. La méthode consiste à utiliser la technique de représentation de groupe introduite dans [*1*] et le fait que ce groupe est isomorphe à un sous-groupe du groupe des déplacements de l'espace [*14*]. On peut montrer de la même façon le théorème local sur les produits semi directs $\mathbb{R}^d x_\sigma \mathbb{R}^p$ où σ est un homomorphisme continu de $\mathbb{R}^p$ dans $SO(d)$ dont le noyau n'est pas contenu dans un hyperplan de $\mathbb{R}^p$.

Dans la seconde partie on considère certains groupes résolubles à croissance exponentielle : les groupes NA intervenant dans la décomposition d'Iwasawa d'un groupe semi-simple, dont l'exemple le plus simple est le groupe affine de la droite réelle. Ce sont des produits semi directs d'un groupe nilpotent N et d'un groupe abélien A opérant sur N. On y introduit une classe R de probabilités centrées pour lesquelles de nombreux calculs sont possibles. En effet ces probabilités se « remontent » en des mesures (pas nécessairement bornées) sur le groupe semi simple, biinvariantes sous l'action d'un sous groupe compact maximal. En (2.1) on associe à chacun de ces groupes NA un entier r tel que pour toute probabilité μ de la classe R la suite de mesures $\{ n^{r/2}\mu^{*n}, n \in \mathbb{N} \}$ converge vaguement, la limite étant non nulle si μ possède un moment d'ordre deux. Ce résultat est à ma connaissance le premier exemple de théorème local sur un groupe moyennable à croissance exponentielle. En (2.2) on montre que la classe R contient une famille importante de probabilités symétriques : le semi-groupe de convolution associé à un mouvement brownien sur NA dont on détermine le générateur infinitésimal. Ceci permet par exemple d'obtenir immédiatement une représentation intégrale des fonctions propres de ce générateur. Au (2.3) nous examinons plus en détail les groupes $\mathbb{R}^d x_s \mathbb{R}_*^+$ où $s(a)u = au$, si $a \in \mathbb{R}_*^+$, $u \in \mathbb{R}^d$, lié au groupe semi-simple $SO(d + 1, 1)$. Le mouvement brownien sur ces groupes se représente à l'aide des intégrales stochastiques $\left(\int_0^t e^{B_s} dW_s, e^{B_t} \right)$ où $\{ B_t, t > 0 \}$ et $\{ W_t, t > 0 \}$ sont deux mouvements browniens indépendants, le premier réel, le second à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, dont nous pouvons alors calculer la loi.

I. PREMIÈRE PARTIE :

THÉORÈME LOCAL SUR LE REVÊTEMENT UNIVERSEL DU GROUPE DES DÉPLACEMENTS DU PLAN

Le revêtement universel du groupe des déplacements du plan est le produit semi direct $H = \mathbb{R}^2 x_\sigma \mathbb{R}$ où, pour tout réel t, $\sigma(t)$ est la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle t. Le produit dans ce groupe est donc donné par

$$(x, t)(x', t') = (x + \sigma(t)x', t + t') \quad \text{si} \quad x, x' \in \mathbb{R}^2, \quad t, t' \in \mathbb{R}.$$

Considérons le groupe $G = \mathbb{R}^3 x_\tau SO(2)$ produit semi-direct de $\mathbb{R}^3$ et SO(2) où

$$\tau(k)(x, t) = (kx, t) \quad \text{si} \quad k \in SO(2), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

et π l'homomorphisme continu injectif de H dans G défini par

$$\pi(x, t) = (x, t, \sigma(t)) \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comme dans [*1*] introduisons la famille de représentations unitaires $\{ T^\xi, \xi \in \mathbb{R}^3 \}$ de G à valeurs dans l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de Haar sur SO(2) définie ainsi :

si $\varphi \in L^2(SO(2))$, $(y, k) \in \mathbb{R}^3 \times SO(2)$ et $u \in SO(2)$

$$T^\xi_{(y,k)}\varphi(u) = e^{i\langle \xi, \tau(u)^{-1} y \rangle}\varphi(k^{-1}u).$$

Le lemme suivant est un cas particulier, facile à démontrer, d'un résultat de [*1*]. Dans cet énoncé « 1 » est la fonction sur SO(2) identiquement égale à un.

LEMME 1.1. — Soit h une fonction sur G telle qu'il existe une fonction continue réelle intégrable g sur $\mathbb{R}^3$ de transformée de Fourier usuelle intégrable vérifiant $h(y, k) = g(y)$ si $(y, k) \in \mathbb{R}^3 \times SO(2)$. Alors, pour toute probabilité ν sur G

$$\int_G h d\nu = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \langle T^\xi_\nu 1 , T^\xi_h 1 \rangle \, d\xi .$$

Remarquons que si, avec les notations du lemme, ν est l'image par π d'une probabilité μ sur H, $\int_H g d\mu = \int_G h d\nu$. Nous pouvons donc utiliser (voir [*1*]) le lemme au-dessus pour montrer le théorème local pour μ. Les lemmes suivants nous donnent les estimées sur T_ν^ξ nécessaires à la démonstration. Notons qu'on ne peut appliquer directement les résultats de [*1*] car il est par exemple possible qu'il existe des ξ non nuls pour lesquels le rayon spectral de l'opérateur T_ν^ξ soit égal à un. On dit qu'une probabilité sur H est étalée si elle possède une puissance de convolution non étrangère à une mesure de Haar et qu'elle est irréductible si le semi-groupe fermé engendré par son support est égal à H.

LEMME 1.2. — Soit μ une probabilité étalée irréductible sur $H = \mathbb{R}^2 x_\sigma \mathbb{R}$, ν son image par π sur G. I^n existe des réels a, b, c, $a > 0$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$, un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et un entier n_0 tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$,

(1) Pour tout r de $\mathbb{Z}$ et tout ξ de W, $\| \{ T_\nu^{\xi+(0,0,r)} \}^n \| \leqslant \exp\{ -na \| \xi \|^2 \}$;

$$(2) \quad \operatorname{Sup}\left\{ \| \{ T_\nu^\xi \}^n \|, \ \xi \notin \bigcup_{r \in \mathbb{Z}^*} \{ W + (0,0,r) \} \right\} < b^n ;$$

(3) $\operatorname{Sup}\{ \| \{ T_\nu^\xi \}^n 1 \|, \ \xi = (\xi_1, \xi_2), \ \xi_1 = (0,0), \ \xi_2 \in \mathbb{Z}, \ \xi_2 \neq 0 \} < c^n$.

Démonstration. — Soient g une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ invariante par rotation d'intégrale égale à un, de transformée de Fourier $\hat{g}$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ égale à $\frac{1}{4\pi}$ sur $[-2\pi, 2\pi]$, à 0 ailleurs.

Posons, si $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $h(x, t) = g(x)f(t)$. Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$; d'après le lemme 1.3.2 de [*3*] il existe un réel α, $0 < \alpha < 1$, une probabilité γ sur H et un entier n_0 tels que

$$\mu^{n_0} = \alpha h \cdot m + (1 - \alpha)\gamma$$

Il est clair que, pour tout ξ de $\mathbb{R}^3$,

$$\| (T_\nu^\xi)^{n_0} \| \leqslant \alpha \| T_{\pi(h.m)}^\xi \| + (1 - \alpha)$$

or si $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 \in \mathbb{R}^2$, $\xi_2 \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in L^2(SO(2))$

$$\| T_{\pi(h.m)}^\xi \varphi \|^2 = | \hat{g}(\xi_1) |^2 \int_{SO(2)} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi_2} \varphi(\sigma(t)^{-1}u) f(t) dt \right|^2 du .$$

Remarquons que pour toute fonction continue bornée v sur $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} v(t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v(t) + v(t - 2\pi)}{2} dt$$

d'où

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi_2} \varphi(\sigma(t)^{-1}u) f(t)dt \right|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it\xi_2} + e^{i\xi_2(t-2\pi)}}{2} \varphi(\sigma(t)^{-1}u)dt \right|^2$$

$$\leqslant \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | \varphi(\sigma(t)^{-1}u) |^2 dt \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + e^{i2\pi\xi_2}}{2} \right|^2 dt \right\}$$

$$\leqslant \| \varphi \|^2 \left\{ \frac{1 + \cos 2\pi\xi_2}{2} \right\}$$

et

$$\| \mathrm{T}^{\xi}_{\pi(h,m)} \| \leqslant | \hat{g}(\xi_1) | \left\{ \frac{1 + \cos 2\pi\xi_2}{2} \right\}^{1/2}.$$

Ceci entraîne que

$$\| (\mathrm{T}^{\xi}_{\nu})^{n_0} \| \leqslant \alpha | \hat{g}(\xi_1) | \left\{ \frac{1 + \cos 2\pi\xi_2}{2} \right\}^{1/2} + (1 - \alpha)$$

et on en déduit immédiatement les inégalités (1) et (2) du lemme.

Pour montrer l'inégalité (3) remarquons que si λ est la projection de μ sur $\mathbb{R}$ ($= \mathbb{R}^2 x_\sigma \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$) et si $\xi = (0, 0, \xi_2)$

$$\mathrm{T}^{\xi}_{\nu^n} 1(u) = \hat{\lambda}(\xi_2)^n$$

La probabilité λ étant étalée l'existence de c est claire. ■

On dit qu'une probabilité sur H possède un moment d'ordre deux si, considérée comme probabilité sur $\mathbb{R}^3$ elle a un moment d'ordre deux.

LEMME 1.3. — Soit μ une probabilité adaptée sur $\mathrm{H} = \mathbb{R}^2 x_\sigma \mathbb{R}$ possédant un moment d'ordre deux dont la projection sur $\mathbb{R}$ est centrée. Il existe alors une loi normale β non dégénérée sur $\mathbb{R}^3$, invariante sous l'action de τ, telle que pour tout ξ de $\mathbb{R}^3$ la suite $\mathrm{T}^{\xi/\sqrt{n}}_{\pi(\mu^n)}$ converge fortement vers $\mathrm{T}^{\xi}_{\pi(\beta)}$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration. — Soit $\delta_n : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ défini par $\delta_n(x, t) = \left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{t}{\sqrt{n}} \right)$ si $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$. Le théorème central limite de A. Raugi [*14*] nous dit qu'il existe une probabilité β sur $\mathbb{R}^3$ (identifié à H) vérifiant les propriétés au-dessus telle que $\delta_n(\mu^n)$ converge vers β. Alors $\mathrm{T}^{\xi}_{\pi(\delta_n(\mu^n))} = \mathrm{T}^{\xi/\sqrt{n}}_{\pi(\mu^n)}$ converge fortement vers $\mathrm{T}^{\xi}_{\pi(\beta)}$.

Nous pouvons alors montrer, si m est la mesure de Haar de H s'identifiant à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$:

THÉORÈME 1.4. (*Théorème local*). — Soit μ une probabilité étalée sur H possédant un moment d'ordre deux dont la projection sur $\mathbb{R}$ est centrée.

Si $\beta(0)$ est la valeur de la densité en 0 de la loi introduite au lemme 1.3, pour toute fonction g continue à support compact sur H

$$\lim_{n\to+\infty} n^{3/2} \int_{\mathrm{H}} g d\mu^n = \beta(0) \int_{\mathrm{H}} g dm .$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.3 de [*3*] la probabilité μ est irréductible et vérifie donc les conclusions du lemme 1.2 dont nous utiliserons les notations. Montrons que si g est une fonction continue intégrable sur H dont la transformée de Fourier usuelle est à support compact il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout entier p

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| n^{3/2} \int_{\mathrm{H}} g d\mu^n - \beta(0) \int_{\mathrm{H}} g dm \right| \leqslant k c^p$$

ce qui établira le théorème (cf. [*4*]).

Soit R un réel tel que la transformée de Fourier de g est nulle hors de la boule de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon R. Si on fixe un entier p, par continuité des opérateurs $\{ \mathrm{T}_\nu^\xi \}^p$ et à cause du (3) du lemme 1.2 il existe un voisinage W_p de 0 dans $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\operatorname{Sup} \left[\| \{ \mathrm{T}_\nu^\xi \}^p 1 \|, \xi \in \cup \{ \mathrm{W}_p + (0, 0, r), r \in \mathbb{Z}^*, |r| < \mathrm{R} \} \right] \leqslant c^p . \quad (4)$$

Notons V le voisinage de 0 égal à $\mathrm{W} \cap \mathrm{W}_p$ et V' l'ensemble des ξ de $\mathbb{R}^3$ de norme inférieure à R n'appartenant pas à $\bigcup_{r\in\mathbb{Z}} \{ \mathrm{V} + (0, 0, r) \}$.

Introduisons la fonction h comme au lemme 1.1. Puisque T_h^ξ est nul si $\| \xi \|$ est supérieur à R, d'après ce lemme,

$$\begin{aligned}\overline{\lim} \left| n^{3/2} \int_{\mathrm{H}} g d\mu^n - \beta(0) \int g dm \right| &= \overline{\lim} \left| n^{3/2} \int_{\mathrm{G}} h d\nu^n - \beta(0) \int g dm \right| \\ &= \overline{\lim} \left| (2\pi)^{-3} n^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \{ \mathrm{T}_\nu^\xi \}^n 1, \mathrm{T}_h^\xi 1 \rangle d\xi - \beta(0) \int g dm \right|\end{aligned}$$

est majorée par $(a) + (b) + (c)$ où

$$(a) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| (2\pi)^{-3} n^{3/2} \int_{\mathrm{V}} \langle \{ \mathrm{T}_\nu^\xi \}^n 1, \mathrm{T}_h^\xi 1 \rangle d\xi - \beta(0) \int g dm \right|$$

$$(b) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| (2\pi)^{-3} n^{3/2} \int_{\mathrm{V}'} \langle \{ \mathrm{T}_\nu^\xi \}^n 1, \mathrm{T}_h^\xi 1 \rangle d\xi \right|$$

$$(c) = \sum_{r\in\mathbb{Z}^*, |r| < \mathrm{R}} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| (2\pi)^{-3} n^{3/2} \int_{\mathrm{V}+(0,0,r)} \langle \{ \mathrm{T}_\nu^\xi \}^n 1, \mathrm{T}_h^\xi 1 \rangle d\xi \right|$$

a - Par un changement de variables

$$(2\pi)^{-3}n^{3/2}\int_{V} \langle \{ T_v^{\xi} \}^n 1, T_h^{\xi} 1 \rangle \, d\xi = (2\pi)^{-3}\int_{\sqrt{n}V} \langle \{ T_v^{\xi/\sqrt{n}} \}^n 1, T_n^{\xi/\sqrt{n}} 1 \rangle \, d\xi .$$

Appliquant le lemme 1.3 et le théorème de convergence dominée (justifié par (1) du lemme 1.2) on obtient que ceci tend vers

$$(2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle T_{\pi(\beta)}^{\xi} 1, T_h^{0} 1 \rangle \, d\xi = \int g dm (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} \langle T_{\pi(\beta)}^{\xi} 1, 1 \rangle \, d\xi$$
$$= \beta(0)\int g dm$$

donc le terme (a) est nul.

b - L'inégalité (2) du lemme 1.2 montre immédiatement que le terme (b) est aussi nul.

c - Étudions chacun des termes de la somme finie de (c) :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| n^{3/2}\int_{V+(0,0,r)} \langle \{ T_v^{\xi} \}^n 1, T_h^{\xi} 1 \rangle \, d\xi \right|$$
$$= \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| (n+p)^{3/2}\int_{V+(0,0,r)} \langle \{ T_v^{\xi} \}^n \{ T_v^{\xi} \}^p 1, T_h^{\xi} 1 \rangle \, d\xi \right|$$
$$\leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} (n+p)^{3/2}\int_{V+(0,0,r)} \| \{ T_v^{\xi} \}^n \| \, \| \{ T_v^{\xi} \}^p 1 \| \, \| T_h^{\xi} 1 \| \, d\xi$$
$$\leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} (n+p)^{3/2} \| h \|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^3} c^p e^{-na\|\xi\|^2} d\xi$$

d'après le (1) du lemme 1.2 et le (4) au-dessus. Cette quantité étant égale à $\| h \|_{L^1} c^p \int_{\mathbb{R}^3} e^{-a\|\xi\|^2} d\xi$, le terme ($c$) est majoré par kc^p où

$$k = R \| h \|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-a\|\xi\|^2} d\xi$$

ce qui détermine la démonstration.

Les mêmes techniques permettent de montrer :

PROPOSITION 1.5. *Fonctions de concentration.* — Si μ est une probabilité étalée sur H, pour tout compact C de H il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout entier n,

$$\sup_{x,y\in H} \mu^n(xCy) \leqslant cn^{-3/2} .$$

REMARQUE 1. — L'hypothèse d'étalement que nous avons utilisée n'est pas indispensable, on pourrait la remplacer comme dans [*1*] par des hypothèses d'apériodicité de désintégration de μ.

REMARQUE 2. — On peut traiter de la même façon les produits semi directs $\mathbb{R}^p x_\sigma \mathbb{R}^d$ où σ est un homomorphisme continu de $\mathbb{R}^d$ dans $SO(p)$ dont le noyau n'est pas contenu dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$.

II. DEUXIÈME PARTIE :

THÉORÈME LOCAL ET CALCULS DE LOI SUR UNE CLASSE DE GROUPES A CROISSANCE EXPONENTIELLE

Considérons un groupe de Lie G semi simple connexe de centre fini et G = NAK une décomposition d'Iwasawa de G. Dans cette partie nous étudions une classe de probabilités sur le groupe H = NA pour laquelle de nombreux calculs sont possibles. Le groupe H est simplement connexe produit semi direct du groupe nilpotent N et du groupe abélien A. C'est un groupe résoluble non unimodulaire donc moyennable et à croissance exponentielle [*9*].

Les puissances de convolution d'une probabilité μ sur NA ont un comportement très différent suivant que la projection de μ sur A (par l'application qui à $na \in$ NA associe $a \in$ A) est centrée ou non. En effet, si par exemple μ est à support compact, pour tout ouvert relativement compact V de NA, dans le premier cas $\overline{\lim}\ \mu^n(V)^{1/n} = 1$ alors que dans le second $\mu^n(V)$ tend vers zéro exponentiellement vite [*10*]. Aussi est-il intéressant d'étudier particulièrement les probabilités à projection centrée. C'est une des raisons qui nous conduit à introduire la classe R ainsi définie (cf. lemme 2.1.3) :

DÉFINITION. — Si ρ est la forme linéaire sur l'algèbre de Lie $\mathscr{A}$ de A égale à la demi-somme des racines positives et $\tilde{\rho} : G \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\tilde{\rho}(nak) = \rho(\operatorname{Log} a) \qquad \text{si } (n, a, k) \in N \times A \times K,$$

on dit qu'une *probabilité* μ sur H = NA est dans la *classe* R si on peut lui associer une mesure de Radon positive, *pas nécessairement bornée*, ν sur G = NAK, biinvariante par K et adaptée telle que pour toute fonction f continue bornée sur NA,

$$\int_{NA} f\,d\mu = \int_{NAK} f(na)e^{\tilde{\rho}(a)}d\nu(n, a, k).$$

En d'autres termes $e^{-\tilde{\rho}(a)}d\mu(na)$ doit être la projection sur NA d'une mesure positive sur G biinvariante par K que l'on appellera mesure associée à μ.

2.1. Théorème local.

Rappelons que si g est un élément de G tel que $g = kan$ où $(k, a, n) \in K \times A \times N$, on note $H(g)$ l'élément Log a de $\mathscr{A}$ et que si λ est une forme linéaire (réelle) sur $\mathscr{A}$ on pose (cf. [*15*])

$$\varphi_\lambda(g) = \int_K \exp\{(i\lambda - \rho)H(gk)\}\,dk\,, \qquad g \in G$$

(où dk est la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact K). On peut exprimer le fait qu'une probabilité μ sur NA de la classe R est associée à la mesure ν sur G en écrivant que : pour toute fonction continue bornée f de NA dans $\mathbb{R}$, si $\tilde{f} : G \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\tilde{f}(nak) = f(na), \qquad n \in N,\ a \in A,\ k \in K$$

alors

$$\int_{NA} f\,d\mu = \int_G \tilde{f}(g)e^{-\rho H(g^{-1})}d\nu(g)$$

Puisque μ est une probabilité, ν doit intégrer la fonction $e^{-\rho H(g^{-1})}$, or par invariance de ν

$$\int_G e^{-\rho H(g^{-1})}d\nu(g) = \int_G\int_K e^{-\rho H(g^{-1}k)}dk\,d\nu(g) = \int_G \varphi_0(g^{-1})d\nu(g)$$
$$= \int_G \varphi_0(g)d\nu(g)\,.$$

Commençons par montrer que les mesures ν de ce type vérifient un analogue du théorème local démontré dans [*2*]. Reprenons les notations de cet article : d est la dimension de $\mathscr{A}$, p est le nombre de racines positives indivisibles de G et σ est l'application sous-additive de G dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\sigma(g) = \operatorname*{Sup}_{k\in K} \| H(gk) \| \qquad \text{si } g \in G\,.$$

PROPOSITION 2.1.1. — Soit ν une mesure de Radon positive sur G biinvariante par K telle que $\int \varphi_0(g)d\nu(g)$ soit fini. Les puissances de convolution de ν sont des mesures de Radon et

(1) Pour tout compact C de G il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout entier n,

$$\sup_{x,y\in G} \nu^{*n}(xCy) \leqslant cn^{-\frac{2p+d}{2}} \left\{ \int \varphi_0(g)d\nu(g) \right\}^n .$$

(2) Si de plus $\int \sigma(g)^2\varphi_0(g)d\nu(g)$ est fini, il existe une constante $k > 0$ telle que pour toute fonction f continue à support compact sur G

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2p+d}{2}}}{\left\{ \int \varphi_0(g)d\nu(g) \right\}^n} \int_G f d\nu^n = k \int_G f(g)\varphi_0(g)dg .$$

Démonstration. — En utilisant l'équation $\int_K \varphi_0(xky)dk = \varphi_0(x)\varphi_0(y)$ pour $x, y \in G$ on voit que $\int \varphi_0(g)d\nu^n(g) = \left\{ \int \varphi_0(g)d\nu(g) \right\}^n$. Toute fonction continue à support compact positive sur G est majorée par un multiple de φ_0 donc est intégrable pour ν^n.

Pour montrer le (2) de la proposition on reprend la démonstration du théorème 1 de [2] qui établissait ce résultat pour les mesures ν bornées. Il n'y a que deux points à modifier :

Si $\mathscr{F}\nu(\lambda) = \int \varphi_\lambda(g)d\nu(g)$ il faut vérifier que cette fonction de λ est deux fois dérivable en zéro mais ceci est vrai car $\int \sigma(g)^2\varphi_0(g)d\nu(g)$ est fini. D'autre part il faut montrer que si $d\gamma$ est la mesure de Plancherel sur $\mathscr{A}^*$, pour toute fonction f continue intégrable sur G dont la transformée $\mathscr{F}f$ est $d\gamma$ intégrable on a

$$\int f d\nu = \int \mathscr{F}f(-\lambda)\mathscr{F}\nu(\lambda)d\gamma(\lambda) .$$

Pour cela on considère une suite f_n de fonctions continues positives à support compact croissant vers la fonction identiquement égale à un. Pour tout entier n

$$\int f f_n d\nu = \int \mathscr{F}f(-\lambda)\mathscr{F}(f_n \cdot \nu)(\lambda)d\gamma(\lambda) ,$$

et on obtient l'égalité voulue en faisant tendre n vers l'infini.

Pour montrer le point (1), d'après la démonstration de la proposition 3 de [2] il suffit de voir qu'il existe $a > 0$ tel que pour λ assez petit

$$|\mathscr{F}\nu(\lambda)| \leqslant e^{-a\|\lambda\|^2}\mathscr{F}\nu(0).$$

Ceci est clair car si $\nu = \nu_1 + \nu_2$ où ν_1 est une mesure bornée biinvariante par K adaptée et ν_2 une mesure positive, d'après [2] il existe $b > 0$ tel que pour λ assez petit $|\mathscr{F}\nu_1(\lambda)| \leqslant \{1 - b\|\lambda\|^2\}\mathscr{F}\nu_1(0)$ d'où

$$\begin{aligned}
|\mathscr{F}\nu(\lambda)| = |\mathscr{F}\nu_1(\lambda) + \mathscr{F}\nu_2(\lambda)| &\leqslant (1 - b\|\lambda\|^2)\mathscr{F}\nu_1(0) + \mathscr{F}\nu_2(0) \\
&\leqslant \mathscr{F}\nu(0)\left\{1 - b\frac{\mathscr{F}\nu_1(0)}{\mathscr{F}\nu(0)}\|\lambda\|^2\right\} \\
&\leqslant e^{-b\frac{\mathscr{F}\nu_1(0)}{\mathscr{F}\nu(0)}\|\lambda\|^2}\cdot\mathscr{F}\nu(0).
\end{aligned}$$

REMARQUE 1. — La constante k apparaissant dans la proposition se calcule facilement à partir de la différentielle seconde de $\mathscr{F}\nu(\lambda)$ en 0 (cf. [2]).

REMARQUE 2. — Si ν est bornée la condition d'intégrabilité au (2) est toujours vérifiée, mais ce n'est pas le cas en général.

Étudions maintenant les probabilités sur NA de la classe R.

LEMME 2.1.3. — Soit μ une probabilité sur NA de la classe R et ν la mesure associée sur G = NAK. Alors :

1) La probabilité μ a un moment d'ordre α, au sens de [10], sur NA si et seulement si $\int_G \sigma(g)^\alpha\varphi_0(g)d\nu(g)$ est fini.

2) Si μ a un moment d'ordre un, sa projection sur A est centrée.

Démonstration. — 1) La restriction de σ à NA est une jauge principale [10] donc μ a un moment d'ordre α si et seulement si $\int_{NA}\sigma(g)^\alpha d\mu(g)$ est fini. Mais, σ et ν étant biinvariantes par K on a

$$\int_{NA}\sigma(g)^\alpha d\mu(g) = \int_G \sigma(g)^\alpha e^{-\rho H(g^{-1})}d\nu(g) = \int_G \sigma(g)^\alpha\varphi_0(g)d\nu(g).$$

(2) Si λ est une forme linéaire sur $\mathscr{A}$,

$$\begin{aligned}
\int_{NA} e^{i\lambda(\log a)}d\mu(na) &= \int_{NAK} e^{(i\lambda+\tilde{\rho})(\log a)}d\nu(n, a, k) \\
&= \int_G e^{-(i\lambda+\rho)H(g^{-1})}d\nu(g) \\
&= \int_G \varphi_{-\lambda}(g^{-1})d\nu(g) = \int_G \varphi_\lambda(g)d\nu(g).
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier de la projection de μ sur A est donc égale à $\mathscr{F}\nu$. Si μ a un moment d'ordre un le (1) montre que $\mathscr{F}\nu$ est différentiable et on sait [2] que sa différentielle en zéro est nulle.

Remarque. — On peut montrer que si μ est associée à une mesure ν symétrique, μ est elle-même symétrique.

LEMME 2.1.4. — *Si μ_1 (resp. μ_2) est une probabilité sur NA de la classe R associée à la mesure ν_1 (resp. ν_2) sur G, $\mu_1 * \mu_2$ est une probabilité de la classe R associée à $\nu_1 * \nu_2$.*

Démonstration. — Soit f une fonction continue bornée sur NA et $\tilde{f}$: $G \to \mathbb{C}$ définie par $\tilde{f}(nak) = f(na)$ si (n, a, k) est dans $N \times A \times K$.

En utilisant le fait que ν_2 est invariante à gauche par K et que

$$\tilde{\rho}(n_1 a_1 n_2 a_2) = \tilde{\rho}(a_1) + \tilde{\rho}(a_2) \quad \text{si} \quad n_1, n_2 \in N,\ a_1, a_2 \in A,$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_{NA} f d(\mu_1 * \mu_2) &= \int_G \int_G f(n_1 a_1 n_2 a_2) e^{\tilde{\rho}(a_1)} e^{\tilde{\rho}(a_2)} d\nu_1(n_1, a_1, k_1) d\nu_2(n_2, a_2, k_2) \\
&= \iint \tilde{f}(n_1 a_1 n_2 a_2) e^{\tilde{\rho}(n_1 a_1 n_2 a_2)} d\nu_1(n_1, a_1, k_1) d\nu_2(n_2, a_2, k_2) \\
&= \iint \tilde{f}(n_1 a_1 k_1 n_2 a_2 k_2) e^{\tilde{\rho}(n_1 a_1 k_1 n_2 a_2 k_2)} d\nu_1(n_1, a_1, k_1) d\nu_2(n_2, a_2, k_2) \\
&= \int_G \tilde{f}(g) e^{\tilde{\rho}(g)} d(\nu_1 * \nu_2)(g) \\
&= \int_{NAK} f(na) e^{\tilde{\rho}(a)} d(\nu_1 * \nu_2)(n, a, k) .
\end{aligned}$$

Donc $\mu_1 * \mu_2$ est associée à $\nu_1 * \nu_2$.

On déduit immédiatement de ce qui précède :

THÉORÈME 2.1.4 (*Théorème local*). — *Soit μ une probabilité sur NA de la classe R alors :*

(1) Pour tout compact C de NA il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\mu^n(C) \leqslant c n^{-\frac{2p+d}{2}}$$

pour tout entier n.

(2) Si de plus μ possède un moment d'ordre deux il existe $k > 0$ tel

que pour toute fonction f continue à support compact sur NA, si *dnda* est la mesure de Haar invariante à droite de NA,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2p+d}{2}} \int_{\mathrm{NA}} f\, d\mu^n = k \int_{\mathrm{NA}} f(na)e^{-\tilde{\rho}(a)}\varphi_0(na)dnda\,.$$

REMARQUE 1. — L'analogue de (1) pour les fonctions de concentration est en général faux. En effet si μ a un moment d'ordre deux et si C est d'intérieur non vide, il existe $c > 0$ tel que $\sup\limits_{x,y\in \mathrm{NA}} \mu^n(x\mathrm{C}y)$ est équivalent à $cn^{-d/2}$ lorsque n tend vers l'infini.

REMARQUE 2. — On peut montrer que si μ n'a pas de moment d'ordre 2 $n^{\frac{2p+d}{2}}\mu^n(\mathrm{C})$ tend vers zéro pour tout compact C.

2.2. Exemples de probabilités de la classe R.

Considérons les éléments de l'algèbre de Lie $\mathscr{H}$ du groupe de Lie $\mathrm{H} = \mathrm{NA}$ comme des champs de vecteurs invariants par translation à gauche. Dans ce paragraphe nous montrons que la classe R contient une famille intéressante de probabilités : le semi-groupe de convolution $\{ \beta_t, t > 0 \}$ associé à un générateur de la forme $\Sigma \mathrm{X}_i^2$, où $\{ \mathrm{X}_i \}$ est une base de $\mathscr{H}$ que l'on précisera, c'est-à-dire associé à un mouvement brownien sur H.

Rappelons d'abord que si $\mathscr{L}$ est l'opérateur de Laplace Beltrami de l'espace G/K et P_t est le semi-groupe d'opérateurs sur $\mathscr{C}(\mathrm{G/K})$ associé on peut définir un semi-groupe de convolution $\{ \nu_t, t > 0 \}$ formé de probabilités sur G biinvariantes par K en posant, si f est une fonction continue bornée sur G, $\bar{f}(x) = \int_{\mathrm{K}} f(xk)dk$ si $x \in \mathrm{G}$, et $\dot{o}$ est la classe de K dans G/K

$$\int_{\mathrm{G}} f(x)d\nu_t(x) = \int_{\mathrm{G/K}} \bar{f}(x)\mathrm{P}_t(\dot{o}, d\dot{x})\,.$$

La forme de Killing B sur l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ de G définit une norme $\| \ \|$ sur $\mathscr{A}^*$ et $\mathscr{F}\nu_t(\lambda) = \exp - t\{ \|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2 \}$, (cf. par exemple [7]). Si $\mathscr{N}$ est l'algèbre de Lie de N et α une racine positive on pose

$$\mathscr{G}_\alpha = \{ \mathrm{X} \in \mathscr{N} \text{ t. q. } [\mathrm{Y}, \mathrm{X}] = \alpha(\mathrm{Y})\mathrm{X},\ \forall \mathrm{Y} \in \mathscr{A} \}\,.$$

On sait que

$$\mathscr{H} = \mathscr{A} \oplus \mathscr{N} = \mathscr{A} \oplus \sum_{\alpha>0} \mathscr{G}_\alpha$$

et que cette somme est orthogonale pour le produit scalaire B_θ défini par $B_\theta(X, Y) = -B(X, \theta Y)$ si X et Y sont dans $\mathcal{G}$ et θ est l'involution de Cartan.

Avec ces notations on a :

PROPOSITION 2.2. — Soit $H_1, \ldots, H_d$ une base orthonormale de $\mathcal{A}$, $X_1, \ldots, X_n$ une base orthonormale de $\mathcal{N}$ adaptée à la somme directe $\mathcal{N} = \sum_{\alpha>0} \mathcal{G}_\alpha$. Le semi-groupe $\{ \beta_t, t > 0 \}$ de probabilités sur NA de générateur

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} H_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

est dans la classe R et chaque β_t est associé à la mesure $e^{t\|\rho\|^2}\nu_t$ sur G.

Démonstration. — Si $\{ Y_i \}$ et $\{ Z_i \}$ sont deux bases de $\mathcal{G}$ telles que $B(Y_i, Z_j) = \delta_{i,j}$ l'opérateur de Casimir Ω de $\mathcal{G}$ est égal à $\sum_i Y_i Z_i$, (par exemple [*15*] p. 168). On en déduit que si $\{ U_i \}$ est une base orthonormale de l'algèbre de Lie du centralisateur de A dans K,

$$\Omega = -\Sigma U_i^2 + \Sigma H_i^2 - \Sigma \{ X_i\theta(X_i) + \theta(X_i)X_i \}$$

or

$$X_i\theta(X_i) + \theta(X_i)X_i = 2X_i(\theta(X_i) + X_i) - 2X_i^2 + [\theta(X_i), X_i]$$

d'où

$$\Omega = -\Sigma U_i^2 - 2\Sigma X_i(\theta(X_i) + X_i) + \Sigma H_i^2 - \Sigma [\theta(X_i), X_i] + 2\Sigma X_i^2 .$$

Puisque U_i et $\theta(X_i) + X_i$, stables par θ, sont dans l'algèbre de Lie de K et que $\sum_{i=1}^{m} [\theta(X_i), X_i] = \sum_{i=1}^{d} 2\rho(H_i)H_i$, pour toute fonction f sur G, indéfiniment dérivable, invariante à droite par K,

$$\Omega f = \{ \Sigma H_i^2 - 2\Sigma\rho(H_i)H_i + 2\Sigma X_i^2 \} (f) .$$

Pour $(n, a, k) \in N \times A \times K$ posons $\varphi(nak) = e^{\tilde{\rho}(a)} f(na)$. On a

$$H_i\varphi(a) = \frac{d}{dt}\varphi(a \exp tH_i)\,|_{t=0} = e^{\tilde{\rho}(a)}H_i f(a) + \rho(H_i)e^{\tilde{\rho}(a)} f(a)$$

d'où

$$H_i^2\varphi(e) = \rho(H_i)^2 f(e) + 2\rho(H_i)H_i f(e) + H_i^2 f(e)$$

alors que

$$X_i^2\varphi(e) = X_i^2 f(e) .$$

Utilisant que $\Sigma\rho(H_i)^2 = \|\rho\|^2$ on obtient :

$$\Omega\varphi(e) = \{ \Sigma H_i^2 + 2\Sigma X_i^2 - \|\rho\|^2 \} f(e) \tag{1}$$

Si on identifie une fonction g sur G/K avec une fonction sur G invariante à droite par K $\mathscr{L}g(\dot{x}) = \Omega g(x)$, si $x \in G$ a pour image $\dot{x}$ dans G/K, et

$$\lim_{t\to 0} \frac{\int g d\nu_t - g(e)}{t} = \Omega g(e).$$

Considérons alors pour tout $t > 0$ la probabilité μ_t sur NA associée à la mesure $e^{t\|\rho\|^2}\nu_t$, ceci est possible car $\mathscr{F}\nu_t(0) = \exp\{-t\|\rho\|^2\}$. D'après le lemme 2.1.2 on définit ainsi un semi-groupe de convolution sur NA et le générateur Δ du processus invariant à gauche associé vérifie en l'élément neutre, si f est dans $\mathscr{C}_c^\infty(\text{NA})$:

$$\begin{aligned}\Delta f(e) &= \lim_{t\to 0} \frac{\int f d\mu_t - f(e)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\int f(na)e^{\tilde{\rho}(a)}e^{t\|\rho\|^2}d\nu_t(nak) - f(e)}{t} \\ &= \Omega(e^{\tilde{\rho}}f)(e) + \|\rho\|^2 f(e) = \{ \Sigma H_i^2 + 2\Sigma X_i^2 \} f(e)\end{aligned}$$

Puisque Δ et $\Sigma H_i^2 + 2\Sigma X_i^2$ sont sur NA deux opérateurs invariants à gauche égaux en e, ils sont égaux partout.

Remarque. — On vérifie facilement que l'opérateur sur les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur NA qui a f associe $e^{-\tilde{\rho}}\Omega(e^{\tilde{\rho}}f)$ est invariant à gauche. La formule (1) se généralise donc en

$$e^{-\tilde{\rho}}\Omega(e^{\tilde{\rho}}f) = \{ \Sigma H_i^2 + 2\Sigma X_i^2 - \|\rho\|^2 \} f.$$

Si le groupe semi-simple G possède une structure complexe ou est de rang un on connaît explicitement la densité de ν_t ([*7*] [*12*]) donc celle de μ_t. Nous reviendrons sur ce calcul lorsque $G = SO(n, 1)$ au (2.3).

Pour tout réel c la proposition précédente permet de déterminer les solutions positives de l'équation $\Delta f = cf$ sur NA, généralisant ainsi les résultats de [*13*] qui traite le cas $G = Sl(2, \mathbb{R})$, (voir aussi [*5*]). En effet d'après la remarque cette équation s'écrit $\Omega(e^{\tilde{\rho}}f) = \{ c - \|\rho\|^2 \} e^{\tilde{\rho}}f$.

D'après Karpalevic [11] une telle équation n'a de solution que si $c \geqslant 0$ et dans ce cas la solution se représente de façon unique par

$$e^{\tilde{\rho}(a)} f(na) = \int_{\Lambda(c) x \mathrm{K}/\mathrm{M}} \mathrm{P}^{\lambda}(na, x) d\omega(\lambda, x), \qquad n \in \mathrm{N},\ a \in \mathrm{A}$$

où $\Lambda(c)$ est l'ensemble des formes linéaires sur $\mathscr{A}$ contenues dans $-\bar{\mathscr{A}}^{+}$ et de norme égale à $\sqrt{c}$, $\mathrm{P}(na, x) = \exp\{-\rho \mathrm{H}(a^{-1} n^{-1} k)\}$ si k est un élément de K dont l'image dans K/M est x et ω est une mesure positive sur $\Lambda(c) \times \mathrm{K}/\mathrm{M}$. En particulier les fonctions harmoniques f, $(c = 0)$, se représentent de façon unique par :

$$e^{\tilde{\rho}(a)} f(na) = \int_{\mathrm{K}/\mathrm{M}} \mathrm{P}(na, x) d\omega(x)$$

où ω est une mesure positive sur K/M.

De même les résultats de Fürstenberg [6] permettent de déterminer les fonctions propres associées aux probabilités de la classe R possédant une densité à support compact.

2.3. Mouvements browniens sur $\mathbb{R}^d x_s \mathbb{R}_*^+$.

Dans le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{SO}_0(d+1, 1)$, NA est isomorphe au groupe $\mathbb{R}^d x_s \mathbb{R}_*^+$ dont le produit est défini par, si $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$

$$(z_1, a_1)(z_2, a_2) = (z_1 + a_1 z_2, a_1 a_2)$$

c'est-à-dire le groupe des matrices carrées d'ordre $d + 1$ dont la première ligne est égale à (a, z), $a \in \mathbb{R}_*^+$, $z \in \mathbb{R}^d$ et dont tous les autres termes sont nuls sauf les termes diagonaux qui sont égaux à un (voir plus bas).

Si μ est une probabilité de la classe R possédant un moment d'ordre 2 (cette condition s'écrit ici :

$$\int \left\{ |\operatorname{Log} a| + \operatorname{Log}\{1 + \|z\|\} \right\}^2 d\mu(z, a) < +\infty),$$

le théorème 2.1.4 montre que la suite $\{ n^{3/2} \mu^n, n \in \mathbb{N} \}$ converge vaguement vers une mesure de Radon non nulle. Notons que la vitesse de décroissance de μ^n vers zéro est indépendante de d.

Dans ce paragraphe nous étudions les lois des mouvements browniens sur $\mathrm{S} = \mathbb{R}^d x_s \mathbb{R}_*^+$. Soit X_i l'élément de l'algèbre de Lie de S correspondant à la matrice carrée dont tous les termes sont nuls sauf le ième de la première ligne qui est égal à un.

Le lemme suivant montre qu'il suffit de connaître le mouvement brownien de générateur $\frac{1}{2}\Sigma X_i^2$ pour les connaître tous.

LEMME 2.3.1. — Soit $\{ \mu_t, t > 0 \}$ un semi-groupe de convolution associé à un mouvement brownien sur $S = \mathbb{R}^d x_s \mathbb{R}_*^+$ et $\{ \beta_t, t > 0 \}$ le semi-groupe associé au générateur $\frac{1}{2}\Sigma X_i^2$. Il existe un automorphisme τ de S et un réel r positif tel que, pour tout t, μ_t est l'image par τ de β_{rt}.

Démonstration. — Le générateur associé à $\{ \mu_t, t > 0 \}$ est de la forme $\sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$ où $A = (a_{ij})$ est une matrice symétrique définie positive d'ordre $d + 1$. Soit M une matrice triangulaire inférieure telle que $A = MM^t$ et $\overline{M} = \frac{1}{m_{11}} M$. On vérifie immédiatement que $\overline{M}$ est la matrice dans la base (X_i) d'un automorphisme de l'algèbre de Lie de S, dérivé d'un automorphisme τ de S. On a :

$$m_{11}^2 d\tau(\Sigma X_i^2) = m_{11}^2 \Sigma d\tau(X_i)^2 = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$$

or $m_{11}^2 d\tau(\Sigma X_i^2)$ est le générateur associé au semi-groupe de convolution $\tau(\beta_{rt})$ où $r = 2m_{11}^2$. Il est alors clair que $\tau(\beta_{rt}) = \mu_t$. ■

Pour étudier $(\beta_t, t > 0)$ nous allons utiliser la proposition 2.2. Précisons les liens entre $G = SO_0(d + 1, 1)$ et S. Le groupe G est la composante connexe de l'élément neutre du groupe des matrices carrées réelles d'ordre $d + 1$ qui vérifient $g^t J g = J$ où J est la matrice diagonale telle que $J_{11} = 1$, $J_{ii} = -1$, si $i > 1$. Son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est l'ensemble des matrices X vérifiant $X^t J + JX = 0$ et la forme de Killing vérifie $B(X, Y) = d \operatorname{tr}(XY)$. Soit H l'élément de $\mathcal{G}$ tel que $H_{1,d+1} = H_{d+1,1} = 1$ et tous les autres éléments sont nuls et pour $i = 1, \ldots, d$, N^i l'élément de $\mathcal{G}$ tel que :

$$N^i_{1,i+1} = N^i_{d+1,i+1} = N^i_{i+1,1} = - N^i_{i+1,d+1} = 1 ,$$

tous les autres éléments étant nuls. Si $z \in \mathbb{R}^d$ on pose $N(z) = \sum_{i=1}^{d} z_i N^i$, $z = (z_1, \ldots, z_d)$.

Il existe une décomposition d'Iwasawa de $\mathcal{G}$ pour laquelle $\mathcal{A} = \mathbb{R}H$, $\mathcal{N} = \{ N(z), z \in \mathbb{R}^d \}$. De plus $\frac{H}{\sqrt{2d}}, \frac{N^1}{2\sqrt{d}}, \ldots, \frac{N^d}{2\sqrt{d}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{N} \oplus \mathcal{A}$ pour B_θ, $\rho(H) = \frac{d}{2}$ et $\| \rho \|^2 = \frac{d}{8}$.

Soit π l'isomorphisme entre NA et $S = \mathbb{R}^d x_s \mathbb{R}_*^+$ défini par

$$\pi(\operatorname{Exp} N(z) \operatorname{Exp} xH) = (z, e^x), \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbb{R}^d,\ x \in \mathbb{R}.$$

On a $d\pi(H) = X_1$ et $d\pi(N^i) = X_{i+1}$. L'opérateur Δ introduit proposition 2.2 étant ici égal à $\frac{1}{2d}\{ H^2 + \Sigma(N^i)^2 \}$, $d\pi(\Delta)$ est égal à $\frac{1}{2d}\Sigma X_i^2$.

PROPOSITION 2.3.2. — Soit $(\beta_t, t > 0)$ le semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d x_s \mathbb{R}_*^+ = S$ associé au générateur $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d+1} X_i^2$. Pour toute fonction f continue bornée sur S on a

$$\int_S f\, d\beta_t = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} f(z_1, \ldots, z_d, e^x) p_t(z_1, \ldots, z_d, e^x) dz_1 \ldots dz_d dx$$

où, pour $z \in \mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}$,
si d est pair

$$p_t(z, e^x) = (-2\pi)^{-d/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{dx}{2}} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh} r} \frac{d}{dr} \right\}^{d/2} \left(e^{-\frac{r^2}{2t}}\right)$$

si d est impair, $d = 2k + 1$,

$$p_t(z, e^x) = \frac{(-1)^k (2\pi)^{-d/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{dx}{2}} \int_r^\infty \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \frac{d}{d\eta} \right]^{k+1} \left(e^{-\frac{\eta^2}{2t}}\right) \frac{\operatorname{sh} \eta}{\sqrt{\operatorname{ch} \eta - \operatorname{ch} r}} d\eta .$$

pour

$$r = \operatorname{Arg ch} \left[\operatorname{ch} x + \frac{e^{-x} \| z \|^2}{2} \right].$$

Démonstration. — Reprenons les notations du paragraphe (2.2) : $\{ \nu_t, t > 0 \}$ est le semi-groupe de probabilités sur $G = SO_0(d + 1, 1)$ correspondant au mouvement brownien sur G/K, de transformée de Fourier sphérique $\mathscr{F}\nu_t(\lambda) = \exp - t\{ \| \lambda \|^2 + \| \rho \|^2 \}$. Ces probabilités sont biinvariantes par K et leur densité q_t par rapport à la mesure de Haar de G est donnée dans [*12*]. En corrigeant une erreur due au fait que dans cet article on confond $\lambda(H)^2$ et $\| \lambda \|^2$ on a $q_t(\exp rH)$ égal aux expressions de droite de la proposition dans laquelle on remplace t par $\frac{t}{d}$ et le terme $e^{-\frac{dx}{2}}$ par $e^{-\frac{td}{8}}$.

D'après le paragraphe 2.2 si $\bar{p}_t$ est la densité sur NA associée à $e^{t\|\rho\|^2}\nu_t$ on a

$$\int_{NA} f(na)\bar{p}_t(na) dnda = \int_{NAK} e^{\tilde{\rho}(a)} f(na) e^{t\|\rho\|^2} q_t(na) e^{-2\tilde{\rho}(a)} dndadk$$

d'où $\overline{p}_t(na) = e^{-\tilde{\rho}(a)} e^{\frac{dt}{8}} q_t(na)$. Puisque $d\pi(\Delta) = \frac{1}{2d} \Sigma X_i^2$, la famille de densité p_t vérifie

$$\begin{aligned} p_t(z, e^x) &= \overline{p}_{td}(\operatorname{Exp} N(z) \operatorname{Exp} xH) \\ &= e^{-\frac{xd}{2}} e^{\frac{td}{8}} q_{td}(\operatorname{Exp} N(z) \operatorname{Exp} xH), \end{aligned}$$

on obtient le résultat en remarquant que puisque q_t est biinvariante par K

$$q_{td}(\operatorname{Exp} N(z) \operatorname{Exp} xH) = q_{td}\left(\operatorname{Exp} \left\{ \operatorname{Arg\,ch} \left[\operatorname{ch} x + \frac{e^{-x} \| z \|^2}{2} \right] H \right\} \right). \quad \blacksquare$$

Ces expressions explicites nous permettent de calculer la densité g du noyau potentiel, i. e. $g(x) = \int_0^\infty p_t(x) dt$, si $x \in S$.
Par exemple sur $\mathbb{R}^2 x_s \mathbb{R}_*^+$ on a

$$p_t(z, e^x) = e^{-x} \frac{r}{\operatorname{sh} r} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} e^{-r^2/2t}$$

d'où

$$\begin{aligned} g(z, e^x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-x}}{\operatorname{sh} r} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{e^{-x}}{\{ [e^x + e^{-x}(1 + \| z \|^2)]^2 - 4 \}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

en remplaçant r par sa valeur. Lorsque z est fixé, $g(z, e^x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ mais vers $\frac{1}{\pi(1 + \| z \|^2)}$ lorsque x tend vers $-\infty$. (Ceci a été montré dans un cadre beaucoup plus général par Laure Élie [5]). Pour tout d on a un phénomène analogue, la fonction intervenant à la limite étant un multiple de $\{ 1 + \| z \|^2 \}^{-d/2}$. Cette fonction est donc la densité par rapport à la mesure de Lebesgue de la mesure invariante de la chaîne de Markov sur $N = \mathbb{R}^d$ associée à la marche aléatoire gauche de loi β_1 sur S (voir plus bas).

COROLLAIRE 2.3.3. — Soient $\{ B_t, t > 0 \}$ et $\{ W_t, t > 0 \}$ deux mouvements browniens indépendants issus de l'origine, le premier à valeurs dans $\mathbb{R}$, le second à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout $t > 0$, $\left(\int_0^t e^{B_s} dW_s, e^{B_t} \right)$ a pour loi la probabilité β_t dont la densité est donnée dans la proposition 2.3.2.

Démonstration. — On vérifie immédiatement que dans les coordonnées $(z_1, \ldots, z_d, a)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+$ le générateur $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d+1} X_i^2$ s'écrit

$$\frac{1}{2}\Sigma X_i^2 = \frac{1}{2}a^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right\} + \frac{1}{2}a\frac{\partial}{\partial a}$$

$\left(\text{en utilisant que } Xf(z, a) = \frac{d}{dt}f((z, a)\exp tX)\,|_{t=0}\right)$. La diffusion $(Y_t^1, \ldots, Y_t^d, X_t)$ associée à ce générateur vérifie donc l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = X_t dB_t + \frac{1}{2}X_t dt \\ dY_t^i = X_t dW_t^i \qquad\qquad \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant d \end{cases}$$

qui admet comme solution partant de (0, 1), élément neutre de S,

$$X_t = e^{B_t},\ Y_t = \int_0^t e^{B_s} dW_s \qquad \blacksquare$$

On sait que la projection sur $\mathbb{R}^d$ d'une marche aléatoire gauche sur $\mathbb{R}^d x_s \mathbb{R}_*^+$ (donc invariante par translation à droite) est une chaîne de Markov appelée marche aléatoire sur l'espace homogène $S/\mathbb{R}_*^+$. De même la projection sur $\mathbb{R}^d$ de la diffusion invariante à droite associée au semi-groupe $\{\beta_t, t > 0\}$ est une diffusion. Notons $\{R_t^z, t > 0\}$ le processus associé à cette diffusion sur $\mathbb{R}^d$ partant de z au temps $t = 0$.

LEMME 2.3.4. — Lorsque $d = 1$, $\{R_t^z, t > 0\}$ a même loi que le processus $\{\operatorname{sh}(\overline{B}_t + \operatorname{Arg\,sh} z), t > 0\}$, où $\{\overline{B}_t, t > 0\}$ est un mouvement brownien réel. En particulier, pour tout $t > 0$, $\operatorname{sh}\overline{B}_t$ a même loi que $\int_0^t e^{B_s} dW_s$ (voir le corollaire 2.3.3).

Démonstration. — Soient $\tilde{X}_i$, $1 \leqslant i \leqslant d + 1$, les champs de vecteurs invariants à droite associés aux éléments X_i de l'algèbre de Lie de S. La diffusion invariante par translation à droite associée au semi-groupe $\{\beta_t, t > 0\}$ admet pour générateur $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d+1}\tilde{X}_i^2$. Ici on suppose que $d = 1$ et en utilisant

$\tilde{X}f(z, a) = \frac{d}{dt} f((\exp tX)(z, a))|_{t=0}$ on vérifie que ce générateur s'écrit en coordonnées

$$\frac{1}{2}\Sigma\tilde{X}_i^2 = \frac{1}{2}\left\{a^2\frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2az\frac{\partial^2}{\partial a\partial z} + (1+z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} + \frac{1}{2}z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}a\frac{\partial}{\partial a}$$

et le générateur de $\{ R_t^{z_0}, t > 0 \}$ est $\frac{1}{2}(1+z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2}z\frac{\partial}{\partial z}$

$$\begin{cases} dR_t^{z_0} = \sqrt{1 + (R_t^{z_0})^2}\,d\overline{B}_t + \frac{1}{2}R_t^{z_0}dt \\ R_0^{z_0} = z_0 \end{cases}$$

La formule d'Ito montre que $R_t^{z_0} = \operatorname{sh}(\overline{B}_t + \operatorname{Arg\,sh} z_0)$.

Pour tout t fixé les lois partant de (0, 1) des diffusions invariantes à gauche et invariantes à droite associées à $(\beta_t, t > 0)$ sont les mêmes.

En particulier, $\operatorname{sh}(\overline{B}_t)$ a même loi que $\int_0^t e^{B_s}dW_s$ d'après le corollaire précédent.

Remarque. — On aurait pu montrer ce lemme en utilisant le fait que puisque les probabilités β_t sont symétriques (sur S), la diffusion invariante à droite est l'image par symétrie de la diffusion invariante à gauche.

Notons, pour tout entier d, ν_t la projection de β_t sur $\mathbb{R}^d$. Le théorème local suivant montre que, comme pour β_t, la vitesse de décroissance vers zéro de ν_t ne dépend pas de d. Comme on peut s'y attendre la limite obtenue est la mesure invariante du processus $\{ R_t^z, t > 0 \}$. Dans cet énoncé $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^d$.

PROPOSITION 2.3.5. — Si f est une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$,

$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\int_{\mathbb{R}^d} f(z)d\nu_t(z) = \pi^{-d}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\{1 + \|z\|^2\}^{-d/2}dz\,.$$

Démonstration. — Soit $\hat{\nu}_t$ la transformée de Fourier de ν_t. Puisque ν_t est la loi de $\int_0^t e^{B_s}dW_s$, cette probabilité est invariante par rotation et il existe une fonction $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\varphi_t(-r) = \varphi_t(r) = \hat{\nu}_t(x) \qquad \text{si} \quad \|x\| = r\,.$$

Notons que φ_t est la transformée de Fourier de la première composante du vecteur $\int_0^t e^{B_s} d W_s$ qui a même loi que sh $(\overline{B}_t)$ d'après le lemme précédent. On en déduit immédiatement que $\sqrt{2\pi t}\varphi_t$ tend vers la transformée de Fourier φ de la fonction $h(z) = (1 + z^2)^{-1/2}$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Rappelons [*8*] que si h_d est la fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_d(z) = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\pi^{-d}\{1 + \|z\|^2\}^{-d/2}$$

sa transformée de Fourier $\hat{h}_d$ vérifie $\hat{h}_d(x) = \varphi(r)$ si $\|x\| = r$.

Pour montrer la proposition il suffit de considérer le cas où f est une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}^d$, à support compact et invariante par rotation. Notant alors g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(r) = f(x)$ si $\|x\| = r$ et par c_d la constante apparaissant dans le passage en coordonnées polaires on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi t}\int_{\mathbb{R}^d} f\,dv_t &= \sqrt{2\pi t}(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-x)\,\hat{v}_t(x)dx \\ &= c_d\sqrt{2\pi t}(2\pi)^{-d}\int_0^{\infty} g(r)\varphi_t(r)r^{d-1}dr\end{aligned}$$

Puisque φ_t tend vers φ dans $L^2(\mathbb{R})$ ceci tend, lorsque t tend vers $+\infty$, vers

$$c_d(2\pi)^{-d}\int_0^{\infty} g(r)\varphi(r)r^{d-1}dr = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(-x)\,\hat{h}_d(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h_d(x)dx\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] P. Baldi, P. Bougerol, P. Crepel, Théorème central limite local sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$. *Ann. I. H. P., Section B*, t. **14**, n° 1, 1978, p. 99-112.

[*2*] P. Bougerol, Comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur un espace symétrique. *Astérisque, Soc. Math. France*, t. **74**, 1980, p. 29-45.

[*3*] P. Bougerol, Théorème central limite local sur certains groupes de Lie. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série*, t. **14**, 1981, p. 403-432.

[*4*] L. Breiman, *Probability*. Reading, Mass. Addison-Wesley, 1968.

[*5*] L. Élie, Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les groupes de Lie. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série*, t. **15**, 1982, p. 257-364.

[*6*] H. Fürstenberg, Translation invariant cones of functions on semi simple groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **71**, 1965, p. 271-326.

[*7*] R. Gangolli, Asymptotic behaviour of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces. *Acta Math.*, t. **121**, 1968, p. 151-192.

[*8*] I. M. Guelfand, G. E. Chilov, *Les distributions*. Dunod, Paris, 1962.

[9] Y. GUIVARC'H, Croissance polynomiale et période des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math. France*, t. **101**, 1973, p. 333-375.

[10] Y. GUIVARC'H, Loi des grands nombres et rayon spectral d'une marche aléatoire sur un groupe de Lie. *Astérisque*, *Soc. Math. France*, t. **74**, 1980, p. 47-98.

[11] F. I. KARPALEVIC, Geometry of geodesics and eigen-functions of the Laplace Beltrami operator in symmetric spaces. *Trans Moskow Math. Soc.*, t. **14**, 1965, p. 48-185.

[12] N. LOHOUÉ, Th. RYCHENER, *Some function spaces on symmetric spaces related to convolution operators*. A paraître.

[13] S. MOLCHANOV, Martin boundaries for invariant Markov processes on a solvable group. *Theor. Proba. Appl.*, t. **12**, 1967, p. 310-314.

[14] A. RAUGI, Théorème de la limite centrale pour un produit semi direct d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type rigide par un groupe compact. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, *Lecture Notes in Math.*, t. **706**, 1979, p. 257-324.

[15] G. WARNER, *Harmonic analysis in semi-simple groups*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

(Manuscrit reçu le 1er mars 1983)