

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J.-C. MARCUARD

B. SCHMITT

## **Entropie et itinéraires des applications unimodales de l'intervalle**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 19, n° 4 (1983), p. 351-367

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1983\\_\\_19\\_4\\_351\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_4_351_0)

© Gauthier-Villars, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Entropie et itinéraires des applications unimodales de l'intervalle**

par

**J.-C. MARCUARD et B. SCHMITT**

Département de Mathématiques,  
Université de Dijon

---

**RÉSUMÉ.** — Dans l'étude des applications unimodales de l'intervalle, nous donnons une formule simple permettant d'obtenir l'entropie topologique d'une application unimodale  $f$  à partir de son itinéraire maximal  $I_f(1)$  (Théorème 4.2), ainsi que les propriétés de cette entropie. Et nous présentons d'autres démonstrations de résultats obtenus par Milnor-Thurston [2] et Jonker-Rand [3] [4].

**ABSTRACT.** — We establish a simple formula which give the topological entropy of a unimodal map from it maximal itinerary  $I_f(I)$  (Theorem 4.2), and also we study the properties of this entropy. We give other proofs of Milnor-Thurston and Jonker Rands's results [2] [3] [4].

---

### I. NOTATIONS

Nous considérons des applications  $f$  de l'intervalle  $I = [-1, +1]$  dans lui-même telles que :

- 1)  $f$  est continue.
- 2)  $f(0) = 1$ .
- 3)  $f$  est strictement croissante sur  $[-1, 0]$ , strictement décroissante sur  $[0, 1]$ .
- 4) L'intervalle  $\mathcal{J}(f) = [f(1), 1]$  est stable par  $f$ .

Une telle application est dite application unimodale de l'intervalle  $I$ . De tels exemples sont donnés, en particulier, par les applications

$$f(x) = 1 - \mu|x|, g(x) = 1 - \mu x^2 \quad (0 < \mu \leq 2).$$

On associe à une application unimodale  $f$  une représentation symbolique  $I_f$  de l'intervalle  $I = [-1, +1]$  à l'aide de l'alphabet  $(L, C, R)$  en posant :

$$\begin{aligned} A_i &= L & \text{si} & \quad f^i(x) < 0, \\ A_i &= C & \text{si} & \quad f^i(x) = 0, \\ A_i &= R & \text{si} & \quad f^i(x) > 0. \end{aligned}$$

$I_f(x) = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est l'itinéraire du point  $x$  de  $I$  associé à  $f$ . C'est un élément  $\underline{A}$  de l'ensemble  $\{L, C, R\}^{\mathbb{N}}$  muni de la topologie produit.

On désigne par  $\underline{A}_n = A_0 A_1 \dots A_n$  un bloc de longueur  $n + 1$ , constitué de  $R$  et de  $L$ . Par convention, une suite périodique de plus petite période  $n + 2$ , du type  $(\underline{A}_n C)^\infty$  est notée  $\underline{A}_n C$  et est dit un élément fini.

L'ensemble  $\mathcal{I}$  formé des éléments suivants de  $\{L, C, R\}^{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \underline{A} &\in \{L, R\}^\infty \\ \underline{A} &= \underline{A}_n C \end{aligned}$$

est appelé l'ensemble des suites admissibles.

Si  $f$  est une application unimodale et si  $x \neq 1$  n'est pas un antécédent de zéro, alors l'itinéraire  $I_f(x)$  est un élément de  $\mathcal{I}$ .

Un bloc  $\underline{A}_n = A_0 \dots A_n$  est dit pair s'il contient un nombre pair de  $R$  et impair s'il contient un nombre impair de  $R$ .

Si on munit l'alphabet de la relation d'ordre  $L < C < R$ , on induit sur  $\mathcal{I}$  une relation d'ordre totale, compatible avec la topologie et telle que l'application  $I_f$  soit croissante. Pour cela on pose

$$\underline{A} < \underline{B}$$

si  $k$  étant le premier indice pour lequel  $A_k \neq B_k$  on a

$$\begin{aligned} \text{ou } \underline{A}_{k-1} &\text{ est pair et } A_k < B_k \\ \text{ou } \underline{A}_{k-1} &\text{ est impair et } A_k > B_k. \end{aligned}$$

On définit dans  $\mathcal{I}$  une opération  $*$  en posant

Si  $\underline{A}_{n-1} C$  est un élément fini et  $\underline{B}$  un élément quelconque

$$\underline{A}_{n-1} * \underline{B} = \begin{cases} \underline{A}_{n-1} B_0 \underline{A}_{n-1} B_1 \dots & \text{si } A_{n-1} \text{ est pair.} \\ \underline{A}_{n-1} \check{B}_0 \underline{A}_{n-1} \check{B}_1 \dots & \text{si } A_{n-1} \text{ est impair,} \\ \text{avec } \check{R} = L, \check{C} = C, \check{L} = R. \end{cases}$$

Un élément est dit primaire s'il n'est pas décomposable par l'opération  $*$ . Les propriétés de ces éléments ainsi que de nombreuses propriétés des applications unimodales sont présentées dans l'ouvrage de M. P. Collet et J. P. Eckmann [1].

## II. ITINÉRAIRES MAXIMAUX

Si  $S$  désigne le décalage à droite sur  $\mathcal{I}$  un élément  $\underline{A}$  est dit maximal si pour tout entier  $k, S^k(\underline{A}) \leq \underline{A}$ .

Remarquons qu'un itinéraire du type  $I_f(1)$  est un élément maximal, c'est la « kneading-Sequence » (k. s) introduite par Milnor Thurston [2], associée à l'application unimodale  $f$ . Réciproquement, tout élément de  $\mathcal{I}$  maximal différent de  $L^\infty$  et  $C$  peut être réalisé comme k.s ou itinéraire maximal d'une fonction unimodale et c'est un invariant semi-topologique [1] [2].

On note  $\mathcal{I}_{\max}$  l'ensemble des éléments maximaux de  $\mathcal{I}$  différent de  $L^\infty$  et  $C$ , ces éléments sont des itinéraires  $I_f(1)$  associés à des applications unimodales. Cet ensemble est un fermé contenu dans le segment  $[R^\infty, RL^\infty]$  de  $\mathcal{I}$ .

Sur  $\mathcal{I}_{\max}$  l'opération  $*$  est interne et l'application  $\underline{A}_{n-1}*$  est croissante [1]. Si  $\underline{A}$  est un bloc fini on pose

$$\begin{aligned} \underline{A} * L &= \underline{AL} \text{ ou } \underline{AR} \quad \text{selon que } \underline{A} \text{ est pair ou impair} \\ \underline{A} * R &= \underline{AR} \text{ ou } \underline{AL} \quad \text{selon que } \underline{A} \text{ est pair ou impair} \\ \underline{A} * C &= \underline{AC}. \end{aligned}$$

On remarque que l'on a les égalités

$$\underline{A} * L < \underline{A} * C < \underline{A} * R, \quad \text{et que } \underline{A} * L \text{ est pair et } \underline{A} * R \text{ est impair.}$$

Si  $\underline{AC}$  est un itinéraire maximal alors les itinéraires périodiques

$$\underline{A} * L^\infty = (\underline{A} * L)^\infty \quad \text{et} \quad \underline{A} * R^\infty = (\underline{A} * R)^\infty$$

sont maximaux.

Dans la suite le segment  $[R^\infty, RL^\infty]$  est un sous-ensemble de l'ensemble  $\mathcal{I}$  des suites admissibles.

**THÉORÈME 2.1.** — (1) *Un élément  $\underline{B} = (B_i)$  du segment  $[R^\infty, RL^\infty]$  est non maximal si et seulement si il existe un itinéraire fini maximal  $\underline{AC}$  différent de  $\underline{B}$  tel que*

$$\underline{A} * L^\infty < \underline{B} < \underline{A} * R^\infty.$$

(2) Si  $n_0$  est le premier indice tel que  $S^{n_0}(\underline{B}) > \underline{B}$  alors l'élément maximal  $\underline{AC}$  associé à  $\underline{B}$  est égal à  $\underline{B}_{n_0-2}C$ .

$$(3) \quad \mathcal{I}_{\max} = [R^\infty, RL^\infty] - U(\underline{A} * L^\infty, \underline{AC}[U]\underline{AC}, \underline{A} * R^\infty) \cup \{ \underline{A} : \underline{AC} \text{ maximal} \}$$

*Démonstration.* — Les propositions (2) et (3) sont des conséquences de la démonstration de la proposition (1).

a) Soit  $\underline{AC}$  un élément fini maximal de longueur  $n_0$ . Si l'élément  $\underline{B}$  est compris entre  $\underline{A} * L^\infty$  et  $\underline{AC}$ , il peut s'écrire

$$\underline{B} = (\underline{A} * L)^m \underline{B}' \quad \text{avec} \quad \underline{B}'_j \neq \underline{A}_j \text{ pour un indice } j \text{ compris entre } 0 \text{ et } n_0.$$

La relation  $\underline{B} > \underline{A} * L^\infty = (\underline{A} * L)^\infty$  implique que  $(\underline{A} * L)^m \underline{B}'_j > (\underline{A} * L)^{m+1}$ .

Comme le bloc  $\underline{A} * L$  est pair on en déduit que  $(\underline{A} * L)^{m-1} \underline{B}'_j > (\underline{A} * L)^m$ , d'où  $S^{n_0}(\underline{B}) = (\underline{A} * L)^{m-1} \underline{B}'_j > \underline{B}$ , ce qui prouve la non maximalité de  $\underline{B}$ . Un raisonnement analogue si  $\underline{B}$  est compris entre  $\underline{AC}$  et  $\underline{A} * R$  démontre la condition suffisante de la proposition.

b) Soit  $\underline{B}$  un élément non maximal du segment  $[R^\infty, RL^\infty]$ . Il existe alors un indice  $n_0$  tel que :

$$S^{n_0}(\underline{B}) > \underline{B} \quad \text{et} \quad S^i(\underline{B}) < \underline{B} \quad \text{pour tout entier } i \text{ inférieur à } n_0.$$

Posons 
$$\underline{A} = \underline{B}_0 \dots \underline{B}_{n_0-2}$$

α) Si  $\underline{B}_{n_0-1}$  est pair, alors  $\underline{B}_{n_0-1} = \underline{A} * L$  et on a immédiatement  $\underline{B} < \underline{AC}$ . Par ailleurs  $\underline{B}$  peut s'écrire :

$$\underline{B} = (\underline{A} * L)^m \underline{B}' \quad \text{avec} \quad \underline{B}'_j \neq \underline{B}_j \text{ pour un indice } j \text{ compris entre } 0 \text{ et } n_0-1.$$

La relation  $S^{n_0}(\underline{B}) = (\underline{A} * L)^{m-1} \underline{B}' > \underline{B}$  implique que  $S^{n_0}(\underline{B}) > (\underline{A} * L)^\infty$ . Comme le bloc  $\underline{A} * L$  est pair on a

$$\underline{B} = (\underline{A} * L)^{S^{n_0}(\underline{B})} > (\underline{A} * L)^\infty, \quad \text{d'où} \quad \underline{A} * L^\infty < \underline{B} < \underline{AC}.$$

Montrons que l'élément  $\underline{AC}$  est maximal. Soit  $i$  compris entre 1 et  $n_0 - 1$ ; si  $\underline{AC}$  et  $S^i(\underline{AC})$  diffèrent avant C, le fait que  $S^i(\underline{B}) < \underline{B}$  montre que  $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$ .

Si  $\underline{AC}$  et  $S^i(\underline{AC})$  ne diffèrent qu'au niveau de C, considérons  $\underline{B}$  et  $S^i(\underline{B})$ .

$$\begin{array}{l} \underline{B} = \underline{B}_0 \dots \underline{B}_{n_0-1-i} \overbrace{\underline{B}_{n_0-i} \dots \dots \dots}^{S^{n_0-i}(\underline{B})} \\ S^i(\underline{B}) = \underline{B}_i \dots \underline{B}_{n_0-1} \underbrace{\underline{B}_{n_0} \dots \dots \dots}_{S^{n_0}(\underline{B})} \end{array}$$

Si  $B_{n_0-1} \neq B_{n_0-1-i}$  alors  $S^i(\underline{B}) < \underline{B}$  montre encore que  $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$ .

Si  $B_{n_0-1} = B_{n_0-1-i}$  les éléments  $\underline{B}$  et  $S^i(\underline{B})$  diffèrent nécessairement sinon  $S^{n_0-i}(\underline{B}) = S^{n_0}(\underline{B}) > \underline{B}$  et  $n_0$  ne serait pas le plus petit indice niant la maximalité de  $\underline{B}$ .

Les relations  $S^i(\underline{B}) < \underline{B}$  et  $S^{n_0-1}(\underline{B}) \leq \underline{B} < S^{n_0}(\underline{B})$  montrent que le bloc  $\underline{B}_{n_0-1-i}$  est impair donc égal à  $\underline{B}_{n_0-2-i} * R$ . Comme  $\underline{B}_{n_0-2-i} * C < \underline{B}_{n_0-2-i} * R$  on en déduit l'inégalité  $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$ , ce qui prouve la maximalité de l'élément  $\underline{AC}$ .

$\beta$ ) Si  $\underline{B}_{n_0-1} = \underline{A} * R$  est impair, une démonstration analogue montre que  $\underline{B}$  est compris entre  $\underline{AC}$  et  $\underline{A} * R^\infty$  et que  $\underline{AC}$  est un élément maximal.

**THÉORÈME 2.2.** — (1) *Un élément  $\underline{I}$  périodique est maximal si et seulement si il existe un élément fini maximal  $\underline{AC}$  tel que  $\underline{I} = (\underline{A} * L)^\infty$  ou  $\underline{I} = (\underline{A} * R)^\infty$ .*

(2) *Un élément infini non périodique maximal est limite d'une suite d'éléments finis maximaux.*

*Démonstration.* — (1)  $\underline{AC}$  étant un élément maximal, la maximalité de  $L^\infty$  et de  $R^\infty$  entraîne la maximalité des éléments  $(\underline{A} * L)^\infty = \underline{A} * L^\infty$  et  $(\underline{A} * R)^\infty = \underline{A} * R^\infty$ .

Réciproquement, soit  $\underline{I}$  un élément périodique maximal de période minimale  $n_0$ ,  $\underline{I} = (A_0 \dots A_{n_0-1})^\infty$ .

Posons  $\underline{A} = A_0 - A_{n_0-2}$ , alors  $\underline{I} = (\underline{A} * L)$  ou  $(\underline{A} * R)$  selon la parité de  $\underline{A}$  et la valeur de  $A_{n_0-1}$ . Montrons que l'élément  $\underline{AC}$  est maximal.

En raison de la périodicité, il suffit de comparer les éléments  $\underline{I}$  et  $S^i(\underline{I})$  pour les indices  $i$  compris entre 1 et  $n_0 - 1$  :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= A_0 \dots A_{n_0-1-i} A_{n_0-i} \dots A_{n_0-1} \dots \\ S^i(\underline{I}) &= A_i \dots A_{n_0-1} A_{n_0} \dots A_{n_0-1-i} \dots \end{aligned}$$

Si  $\underline{I}$  et  $S^i(\underline{I})$  diffèrent avant le symbole  $A_{n_0-1-i}$  la relation  $S^i(\underline{I}) < \underline{I}$  montre que  $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$ .

Si  $\underline{I}$  et  $S^i(\underline{I})$  coïncident jusqu'au symbole  $A_{n_0-1-i}$ , ils diffèrent nécessairement plus loin, sinon on aurait  $S^i(\underline{I}) = \underline{I}$ . Cette égalité entraîne que  $\underline{I} = (A_0 \dots A_{n_0-i-1})^\infty$  et  $n_0$  ne serait pas la période minimale.

Les relations  $S^i(\underline{I}) < \underline{I}$  et  $S^{n_0-i-1}(\underline{I}) < \underline{I} = S^{n_0}(\underline{I})$  montrent que le bloc  $\underline{A}_{n_0-1-i}$  est impair, ce qui entraîne comme dans la démonstration du théorème 1 que  $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$ . L'élément  $\underline{AC}$  est maximal.

(2) Soit  $\underline{I}$  un élément infini ; non périodique, maximal. S'il n'était pas limite d'éléments finis maximaux, il existerait un indice  $n_1$  tel que pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $n_1$ , les éléments tronqués  $\underline{I}_n C$  seraient non maximaux.

Il résulte du théorème 1 qu'il existe un élément maximal  $\underline{A}C$  indépendant de  $n$ , tel que :

$$\underline{A} * L^\infty < \underline{I}_n C < \underline{A} * R^\infty \quad \text{pour tout } n \geq n_1.$$

L'élément  $\underline{I}$  étant non périodique, on en déduit à la limite que

$$\underline{A} * L^\infty < \underline{I} < \underline{A} * R^\infty$$

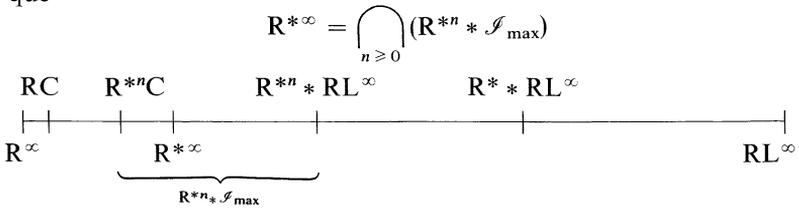
ce qui est contradictoire avec la maximalité de  $\underline{I}$  d'après le théorème 1.

*Remarques.* — 1) Tous les éléments tronqués d'un élément infini maximal ne sont pas nécessairement maximaux. Par exemple l'itinéraire  $\underline{I} = RLRRLR^\infty$  est maximal alors que l'itinéraire tronqué  $\underline{I}_5 C = RLRRLC$  ne l'est pas.

2) Dans la suite nous appellerons itinéraires maximaux les éléments de  $\mathcal{I}_{\max}$  car ils sont associés à tous les itinéraires  $I_f(1)$  pour les applications unimodales  $f$ .

Dans  $\mathcal{I}_{\max}$  muni de la topologie induite de  $\{L, C, R\}^\infty$ , les itinéraires finis sont des points isolés, les itinéraires infinis non périodiques sont des points d'accumulation. Les itinéraires périodiques peuvent être isolés ou points d'accumulation. Par exemple  $(RLL)^\infty = RL * R^\infty$  est un itinéraire isolé alors que  $(RLR)^\infty = RL * L^\infty$  est un point d'accumulation à gauche.

3) Dans l'intervalle  $\mathcal{I}_{\max}$  les itinéraires maximaux définis par récurrence  $R^{*n}C = R^{*n-1} * RC$  forment une suite croissante convergeant vers  $R^{*\infty}$ . De même les itinéraires maximaux  $R^{*n} * RL^\infty$  forment une suite décroissante vers le même itinéraire  $R^{*\infty}$ . Il est facile de voir comme dans [8] que



### III. PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES APPLICATIONS UNIMODALES

Soit  $f$  une application unimodale de l'intervalle  $I$ . Rappelons que  $\mathcal{I}(f) = [f(1), 1]$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  posons

$$E_n = \left\{ x \in \mathcal{I}(f) \mid f^n(x) = 0 \right\}, \quad F_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k, \quad u_n = \text{card } E_n. \quad (E_0 = \{0\})$$

L'ensemble  $F_n$  représente l'ensemble des zéros de  $f^0, f^1, \dots, f^{n-1}$  dans  $\mathcal{I}(f)$ , son complémentaire  $\mathcal{I}(f) \setminus F_n$  est une réunion d'intervalles disjoints sur lesquels l'application  $f^n$  est strictement monotone. En fait nous allons montrer que les points de  $F_n$  correspondent aux extrémis de  $f^n$  et préciser leur nature.

A la fonction  $f$  on associe l'orbite du point 1,  $O_f(1) = (a_n = f^n(1))$  et la suite de droite  $(D_n)$  d'équation  $(y = a_n)$ .

Par l'intermédiaire de l'itinéraire  $I_f(1) = A_0 A_1 \dots$  de  $f$  on associe la suite  $(\varepsilon(n))$  en posant :

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) &= +1 \\ \varepsilon(n) &= +1 \quad \text{si } \underline{A}_{n-1} \text{ est pair} \\ \varepsilon(n) &= -1 \quad \text{si } \underline{A}_{n-1} \text{ est impair.} \end{aligned}$$

LEMME 3.1. — Soit  $f$  une application unimodale de l'intervalle.

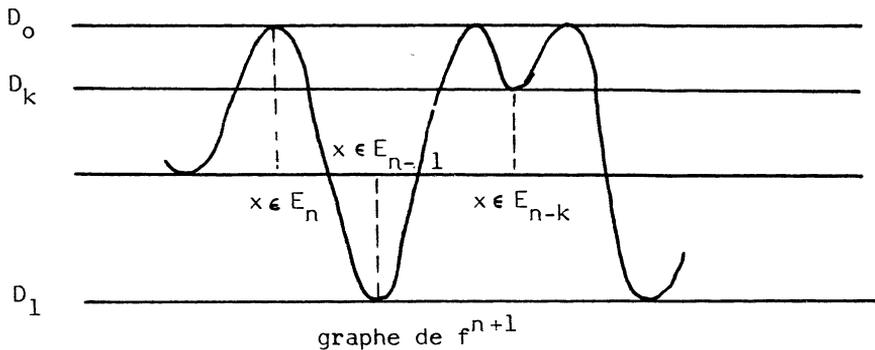
(1) Les extrémis de  $f^{n+1}$  sont situés sur les droites  $D_k (0 \leq k \leq n)$ . Sur une droite  $D_k$ , tous les extrémis sont de même nature donnée par la règle suivante :

- . Si  $\underline{A}_{k-1}$  est pair  $D_k$  est une droite de maximis de  $f^{n+1}$
- . Si  $\underline{A}_{k-1}$  est impair  $D_k$  est une droite de minimis de  $f^{n+1}$ .

(2) Les nombres des zéros de  $f^0, f^1, \dots, f^n$  vérifient les relations

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \varepsilon(k) u_{n-k} &= \delta_n \quad \text{si } I_f(1) \text{ infini.} \\ \sum_{k=0}^p \varepsilon(k) u_{n-k} &= \delta_n \quad \text{si } I_f(1) = A_{p-1} C \text{ fini avec } p < n \end{aligned}$$

avec  $\delta_n = -1, 0$ , ou  $1$ .



*Démonstration.* — 1) Étudions d'abord la nature de l'extremum  $(0, f^{k+1}(0))$ .  
 — Dans le cas où l'itinéraire  $I_f(1)$  est infini, prenons un intervalle  $\mathcal{J} = [0, a]$  de monotonie de  $f^{k+1}$ ,  $\mathcal{J}$  ne contient pas de zéros de  $f, f^2 \dots f^k$ . Les intervalles  $f^i(\mathcal{J})$  ( $j = 0, \dots, k$ ) sont donc inclus dans  $[-1, 0[$  soit dans  $]0, 1]$  selon que  $A_{i-1} = R$  ou  $L$ . Nous dirons que  $f^i(\mathcal{J}) \leq 0$  ( $f^i(\mathcal{J}) \geq 0$ ) si  $f^i(\mathcal{J})$  est inclus dans  $[-1, 0[$  ( $]0, 1]$ ).

Supposons que pour un indice  $i$ ,  $f^i(\mathcal{J}) \geq 0$ , le diagramme

$$\mathcal{J} \xrightarrow{f^i} f^i(\mathcal{J}) \xrightarrow{f} f^{i+1}(\mathcal{J})$$

et la stricte décroissance de  $f$  sur  $]0, 1]$  montrent que  $f^i/\mathcal{J}$  et  $f^{i+1}/\mathcal{J}$  ont des sens de monotonie opposés. Par contre si  $f^i(\mathcal{J}) \leq 0$ , les sens de monotonie sont les mêmes, d'où la règle.

si  $\underline{A}_{k-1}$  est pair  $f^{k+1}/\mathcal{J}$  est décroissante,

si  $\underline{A}_{k-1}$  est impair  $f^{k+1}/\mathcal{J}$  est croissante.

Le même raisonnement appliqué à l'intervalle  $\mathcal{J}' = [-a', 0]$  de monotonie de  $f^{k+1}$ , compte tenu du fait que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathcal{J}'$  montre que  $(0, f^{k+1}(0))$  est un maximum si  $\underline{A}_{k-1}$  est pair et un minimum si  $\underline{A}_{k-1}$  est impair.

— Dans le cas où l'itinéraire  $I_f(1) = \underline{A}_{p-2}$  est fini (l'orbite de 0 est périodique de période  $p$ ,  $f^p(0) = 0$ ) la démonstration précédente s'applique pour  $k = 1 \dots p$ .

Montrons que pour  $n = pq + k$  les extrêmes  $(0, f^n(0))$  et  $(0, f^k(0))$  sont de même nature.

Étudions le cas où  $\underline{A}_{p-2}$  est impair,  $(0, f^p(0))$  est alors un minimum. Soit  $\mathcal{J} = [0, a]$  un intervalle de monotonie de  $f^{p+k}$ , c'est également un intervalle de monotonie de  $f^k$  et de  $f^p$ , et comme  $(0, f^p(0))$  est un minimum  $f^p(\mathcal{J}) \geq 0$ . Considérons le diagramme

$$\mathcal{J} \xrightarrow{f^p} f^p(\mathcal{J}) \xrightarrow{f^k} f^{p+k}(\mathcal{J}).$$

La fonction  $f^p/\mathcal{J}$  étant croissante, les applications  $f^k$  sur  $f^p(\mathcal{J})$  et  $f^{p+k}$  sur  $\mathcal{J}$  ont même sens de monotonie, donc  $(0, f^k(0))$  et  $(0, f^{p+k}(0))$  sont des extrêmes de même nature. Un raisonnement par récurrence montre le résultat annoncé. Le cas  $\underline{A}_{p-2}$  pair se traite de la même façon. Dans le cas où 0 est périodique de période  $p$ ,  $f^{qp+k}(0) = f^k(0)$  et les droites  $D_{qp+k}$  et  $D_k$  sont confondues, il n'y a que  $p$  droites  $D_k$  distinctes.

2) Pour montrer la première partie du lemme nous allons prouver que tous les extrêmes de  $f^{n+1}$  situés sur la droite  $D_k$  sont de même nature que l'extremum  $(0, f^{k+1}(0))$ . ( $k \leq n$ ).

L'application  $f$  étant unimodale, tous les extrémis de  $f^{n+1}$  sont obtenus pour les points de l'ensemble  $F_{n+1}$ . Les extrémis situés sur la droite  $D_k$  sont obtenus pour les points de l'ensemble  $E_{n-k}$  car si  $x \in E_{n-k}$  on a

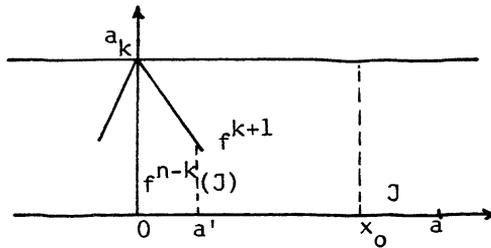
$$f^{n+1}(x) = f^{k+1} \circ f^{n-k}(x) = f^{k+1}(0) = f^k(1) = a_k.$$

Soit  $x_0$  appartenant à  $E_{n-k}$  et  $\mathcal{J} = [x_0, a]$  un intervalle de monotonie de  $f^{n+1}$ . L'intervalle  $\mathcal{J}$  est également un intervalle de monotonie de  $f^{n-k}$  et l'intervalle  $f^{n-k}(\mathcal{J})$  est de monotonie pour  $f^{k+1}$ . Considérons le diagramme :

$$\mathcal{J} \xrightarrow{f^{n-k}} f^{n-k}(\mathcal{J}) \xrightarrow{f^{k+1}} f^n(\mathcal{J}).$$

Il y a quatre cas à étudier selon que  $(0, f^{k+1}(0))$  est un maximum ou un minimum et selon que  $f^{n-k}(\mathcal{J})$  est du type  $[0, a']$  ou  $[-a', 0]$ .

Plaçons-nous dans la situation où  $(0, f^{k+1}(0))$  est un maximum et  $f^{n-k}(\mathcal{J}) = [0, a']$ ; les autres cas se traitent de manière analogue.  $f|_{\mathcal{J}}^{n-k}$  est croissante car  $f^{n-k}(x_0) = 0$  et  $f^{n-k}(\mathcal{J}) \geq 0$ .  $f|_{f^{n-k}(\mathcal{J})}^{k+1}$  est décroissante.



Il en résulte que  $f|_{\mathcal{J}}^{n+1}$  est décroissante, donc  $(x_0, f^{n+1}(x_0))$  est un maximum comme  $(0, f^{k+1}(0))$ , ce qui prouve la première proposition du lemme.

Les 3 autres cas s'étudient de la même façon.

3) La deuxième proposition du lemme se démontre en écrivant que pour l'application  $f^{n+1}$  le nombre de maximas est égal au nombre de minimas à une unité près.

En effet, si l'itinéraire  $I_f(1)$  est infini, l'ensemble  $F_{n+1}$  est l'union disjointe des  $E_{n-k}$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$ . A tous les points de  $E_{n-k}$  correspondent des extrémis de même nature, des maximas si  $\underline{A}_{k-1}$  est pair, des minimas si  $\underline{A}_{k-1}$  est impair, d'où la relation

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon(k) u_{n-k} = \delta_n \quad \text{avec} \quad \delta_n = -1, 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Si l'itinéraire  $I_f(x) = \underline{A}_{p-1}C$  est fini, la périodicité de 0 entraîne que  $F_{n+1}$  est l'union disjointe des sous-ensembles  $E_{n-k}$  pour  $k = 0, 1, \dots, p$ . D'où la relation

$$\sum_{k=0}^p \varepsilon(k)u_{n-k} = \delta_n$$

*Remarques.* — (1) Les nombres  $u_n$  de zéros de  $f^n$  sont donnés par une relation de récurrence liée à l'itinéraire maximal  $I_f(1)$  avec  $u_0 = 1$ . L'itinéraire  $I_f(1)$  de  $\mathcal{I}_{\max}$  est donc un invariant pour la suite  $(u_n)$ .

(2) Si  $I_f(1) = \mathbb{R}^\infty$ , alors  $u_n = 0$  pour  $n \geq 1$ .

#### IV. ENTROPIE TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS UNIMODALES

Soit  $f$  une application unimodale de l'intervalle et  $c_n$  le nombre de branches de monotonie de  $f^n$  dans l'intervalle  $\mathcal{I}(f) = [f(1), 1]$ , d'après un résultat de Misiurewicz-Slenk [5] l'entropie topologique de  $f$  est

$$h(f) = h(f|_{\mathcal{I}(f)}) = \lim_n \frac{1}{n} \text{Log } c_n.$$

Rappelons que  $E_k = f^{-k}(0) \cap \mathcal{I}_f$ ,  $F_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k$ ,  $u_n = \text{card } E_n$ .

LEMME 4.1. — *L'entropie topologique d'une application unimodale  $f$  est donnée par son itinéraire maximal  $I_f(1)$  à l'aide de la formule*

$$\begin{aligned} h(f) &= 0 & \text{si} & & I_f(1) &= \mathbb{R}^\infty \\ h(f) &= \lim_n \frac{1}{n} \text{Log } u_n & \text{si} & & I_f(1) &> \mathbb{R}^\infty. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Si  $I_f(1) = \mathbb{R}^\infty$  on a  $c_n = 2$  pour tout  $n$  et  $h(f) = 0$ .

Si  $I_f(1) > \mathbb{R}^\infty$ , il est clair que  $c_n = \text{card } F_n \pm 1$ . L'application  $f|_{\mathcal{I}(f)}$  étant surjective et puisque  $f^{-1}(E_{n-1}) = E_n$ , la suite  $(u_n)$  est croissante d'où les inégalités

$$u_n \leq \text{card } F_n \leq nu_n,$$

et  $h(f) = \lim_n \frac{1}{n} \text{Log } c_n = \lim_n \frac{1}{n} \text{Log } \text{card } F_n = \lim_n \frac{1}{n} \text{Log } u_n$ , ce qui prouve le lemme.

Dans la suite, on note également  $h$  l'application de  $\mathcal{I}_{\max}$  dans  $\mathbb{R}^+$  définie par

$$h(\underline{A}) = h(f) \quad \text{si} \quad \underline{A} = I_f(1).$$

On sait que la suite  $(u_n)$  associée à un itinéraire maximal  $\underline{A}$  vérifie les relations

$$u_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^n \varepsilon(k)u_{n-k} = \delta_n \quad (n > 0) \quad \text{avec} \quad \delta_n = -1, 0 \text{ ou } 1.$$

Si  $(v_n)$  est la suite définie par les relations

$$v_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^n \varepsilon(k)v_{n-k} = 0 \quad (n > 0),$$

l'étude des rayons de convergence des séries entières  $\sum u_n t^n$  et  $\sum v_n t^n$  montre que  $\lim \frac{1}{n} \text{Log } u_n = \lim \frac{1}{n} \text{Log } v_n$  si bien que l'on a également  $h(\underline{A}) = \lim \frac{1}{n} \text{Log } v_n$ .

Dans la suite on déterminera l'entropie d'un itinéraire maximal à partir de la suite  $(v_n)$  associée.

**THÉORÈME 4.1.** — *L'entropie topologique est une application  $h$  croissante de l'ensemble des itinéraires maximaux  $\mathcal{I}_{\max}$  sur l'intervalle  $[0, \log 2]$ .*

Pour démontrer le théorème, on utilise le lemme suivant :

**LEMME 4.2.** — *Soit  $\underline{A}$  un itinéraire maximal, pour tout entier  $n, v_n \geq 0$ , et tout  $j < n$  les quantités tronquées*

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{n-j} &= \sum_{k=j}^n \varepsilon(k)v_{n-k} & \text{si} & \quad \underline{A} \text{ est infini,} \\ \bar{\varepsilon}_{n-j} &= \sum_{k=j}^p \varepsilon(k)v_{n-k} & \text{si} & \quad \underline{A} = A_{p-2}c \end{aligned}$$

sont nulles ou du signe de  $\varepsilon(j)$ .

*Démonstration.* — Nous ferons la démonstration dans le cas d'un itinéraire infini, la démonstration pour un itinéraire fini étant analogue.

Soit  $\underline{A} = A_0 A_1 \dots$  un itinéraire maximal infini, supposons le lemme vrai jusqu'à l'ordre  $(n - 1)$  et à l'ordre  $n$  pour les indices  $1, 2, \dots, j - 1$ .

Si  $\varepsilon(j) = \varepsilon(j + 1)$  alors  $\bar{\varepsilon}_{n-j} = \varepsilon(j)v_{n-j} + \bar{\varepsilon}_{n-j+1}$  et la proposition résulte

de l'hypothèse d'induction et du fait que  $v_{n-j} \geq 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$  d'après l'hypothèse de récurrence.

Si  $\varepsilon(j) = -\varepsilon(j+1)$  alors  $A_j = R$ . Comparons  $\underline{A}$  et  $S^j(\underline{A})$

$$\begin{aligned}\underline{A} &= A_0 \dots A_l \dots A_{n-j} \dots \\ S^j(\underline{A}) &= A_j \dots A_{j+l} \dots A_n \dots\end{aligned}$$

Si  $\underline{A}$  et  $S^j(\underline{A})$  coïncident jusqu'au symbole  $A_{n-j}$  on a

$$\bar{\varepsilon}_{n-j} = \varepsilon(j)(\varepsilon(0)v_{n-j} + \dots + \varepsilon(n-j)v_0) = 0.$$

Si  $\underline{A}$  et  $S^j(\underline{A})$  diffèrent au symbole  $A_l$  avec  $l \leq n-j$ , on peut écrire en tenant compte du lemme 3.1

$$0 = (\varepsilon(0)v_{n-j} + \dots + \varepsilon(l)v_{n-l}) + (\varepsilon(l+1)v_{n-j-l-1} + \dots + \varepsilon(n-j)v_0)$$

et

$$\bar{\varepsilon}_{n-j} = (\varepsilon(j)v_{n-j} + \dots + (j+l)v_{n-j-l}) + (\varepsilon(j+l+1)v_{n-j-l-1} + \dots + \varepsilon(n)v_0).$$

La maximalité de l'itinéraire  $\underline{A}$  montre que :

$$\underline{A}_l = \underline{A}_{l-1} * R \quad \text{et} \quad A_j \dots A_{j+l} = A_{l-1} * L.$$

Il en résulte que

$$\varepsilon(l+1) = -1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(j+l+1) = \varepsilon(j).$$

D'après l'hypothèse d'induction la seconde parenthèse de  $\bar{\varepsilon}_{n-j}$  est du signe de  $\varepsilon(j+l+1)$  donc du signe de  $\varepsilon(j)$  ou nulle.

Comme  $A_0 \dots A_l = A_j \dots A_{j+l}$  on a

$$\varepsilon(j)v_{n-j} + \dots + \varepsilon(j+l)v_{n-j-l} = \varepsilon(j)(\varepsilon(0)v_{n-j} + \dots + \varepsilon(l)v_{n-j-l}).$$

D'après l'hypothèse d'induction et du fait que  $\varepsilon(l+1) = -1$ , on obtient que la première parenthèse de  $\bar{\varepsilon}_{n-j}$  est aussi de signe de  $\varepsilon(j)$  ou nulle ce qui prouve le lemme. En particulier, nous avons prouvé que  $\bar{\varepsilon}_{n-1}$  est du signe de  $\varepsilon(1)$ ; donc  $\bar{\varepsilon}_{n-1} < 0$  et ceci implique que  $v_n \geq 0$ .

*Démonstration du théorème 4.1.* — 1) Montrons la croissance de l'application  $h$  définie sur  $\mathcal{I}_{\max}$ .

Soient  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  deux itinéraires maximaux tels que  $\underline{A} < \underline{B}$ . ( $\underline{A} \neq R^\infty$ ).

Notons  $(a_n)$  et  $(b_n)$  les suites associées à ces itinéraires, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \varepsilon(k)a_{n-k} &= 0 \quad (n > 0) \\ \sum_{k=0}^n \varepsilon'(k)b_{n-k} &= 0 \quad (n > 0)\end{aligned}$$

où  $(\varepsilon(k))_{k \in \mathbb{N}}$  (resp.  $\varepsilon'(k)_{k \in \mathbb{N}}$ ) est une suite de  $-1$  ou  $+1$  associée à  $\underline{A}$  (resp.  $\underline{B}$ ).

Comme  $A < B$ , il existe un premier indice  $l$  tel que  $A_l \neq B_l$  et tel que :

$$A_l = A_{l-1} * L \quad \text{et} \quad B_l = A_{l-1} * R$$

Il en résulte que :

$$\varepsilon(k) = \varepsilon'(k) \quad \text{pour} \quad k=0, 1, \dots, l-1; \quad \text{et} \quad \varepsilon(l) = +1, \quad \varepsilon'(l) = -1.$$

La propriété du lemme 4.2 donne les inégalités

$$\begin{aligned} \varepsilon(0)a_n + \dots + \varepsilon(l)a_{n-l} &\leq 0, \\ \varepsilon(0)b_n + \dots + \varepsilon(l)b_{n-l} &\geq 0. \end{aligned}$$

Les itinéraires  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  commencent par le symbole RL donc  $\varepsilon(0) = 1$ ,  $\varepsilon(1) = -1$ . On en déduit alors par itération les inégalités :

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(n) a_k, \quad b_n \geq \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(n) b_k.$$

Les termes  $a_k$  et  $b_k$  étant égaux pour  $k = 0, 1, \dots, l-1$ , on obtient que  $a_n \leq b_n$  ce qui prouve la croissance de l'entropie  $h$  sur  $\mathcal{I}_{\max}$ .

2)  $h(\mathbb{R}^\infty) = 0$  car dans ce cas  $v_n = 0$  pour  $n \geq 1$

$h(\mathbb{R}^\infty) = \text{Log } 2$  car dans ce cas  $v_n = v_{n+1} + \dots + v_0$  et donc  $v_n = 2^{n+1}$ .

Pour montrer la continuité de l'application  $h$ , sachant que cette application est croissante, il suffit de montrer qu'elle est surjective de l'ensemble  $\mathcal{I}_{\max}$  sur l'intervalle  $[0, \text{Log } 2]$ .

Pour cela considérons la famille a un paramètre d'application unimodale sur  $I = [-1, +1]$

$$g_\mu(x) = 1 - \mu |x| \quad 1 \leq \mu \leq 2.$$

D'après un résultat de Lasota-Yorke [6] il existe une mesure  $\nu$  absolument continue invariante pour  $g_\mu$ . D'après un résultat de F. Ledrappier [7] l'entropie topologique des fonctions  $g_\mu$  est donnée par la formule

$$h(g_\mu) = \int_1^2 \text{Log} \left| \frac{dg'_\mu}{dx}(x) \right| d\nu(x) = \text{Log } \mu$$

Donc

$$h(I_{g_\mu}(1)) = \text{Log } \mu,$$

l'application  $h$  est surjective sur l'intervalle  $[0, \text{Log } 2]$ .

**THÉORÈME 4.2.** — Soit  $h$  l'application entropie de  $\mathcal{I}_{\max}$  sur  $[0, \text{Log } 2]$ .

(1) Si  $\underline{I} = \underline{A}_{p-1}C$  est un itinéraire maximal fini de longueur  $p+1$  alors

$$h(\underline{I}) = \text{Log } \lambda \text{ où } \lambda \text{ est le plus grand zéro du polynôme } p_{\underline{I}}(x) = \sum_{k=0}^p \varepsilon(k)x^{p-k}.$$

(2) Si  $\underline{I} = (\underline{A}_p)^\infty$  est un itinéraire maximal périodique de période minima de longueur  $p+1$  alors

$$h(\underline{I}) = h(\underline{A}_{p-1}C).$$

(3) Si  $\underline{I}$  est un itinéraire maximal infini non périodique, il existe une sous-suite croissante d'entiers  $(n_k)$  telle que :

$$h(\underline{I}) = \lim_{n_k} \text{Log } \lambda_{n_k}$$

où  $\lambda_{n_k}$  est la valeur associée par (1) à l'itinéraire tronqué, maximal et fini  $\underline{I}_{n_k-1}C$ .

Démonstration. — 1) La première affirmation résulte des lemmes 3.1 et 4.1 et de la théorie générale des suites récurrentes linéaires.

2) Soit  $f$  une application unimodale d'itinéraire maximal  $I_f(1) = (\underline{A}_p)^\infty$  périodique de période minima de longueur  $p+1$ . D'après le lemme 3.1, on a pour tout entier  $n$

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon(k)v_{n-k} = 0.$$

Décomposons cette somme

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon(k)v_{n-k} = \sum_{k=0}^p \varepsilon(k)v_{n-k} + \sum_{k=p+1}^n \varepsilon(k)v_{n-k}.$$

Posons  $k = p+1+j$  dans la deuxième somme

$$\sum_{k=p+1}^n \varepsilon(k)v_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-p-1} \varepsilon(p+1+j)v_{n-p-1-j}.$$

L'itinéraire  $\underline{I}$  étant périodique de période  $p+1$  on a

$$\varepsilon(p+1+j) = \varepsilon(p+1) \cdot \varepsilon(j).$$

Il en résulte que :

$$\sum_{k=p+1}^n \varepsilon(k)v_{n-k} = \varepsilon(p+1) \sum_{j=0}^{n-p-1} \varepsilon(j)v_{n-p-1-j} = 0$$

d'après le lemme 3.1 appliqué à la fonction  $f^{n-p}$ . D'où

$$\sum_{k=0}^p \varepsilon(k)v_{n-k} = 0,$$

ce qui prouve la deuxième affirmation du théorème.

3) Soit  $\underline{I}$  un itinéraire infini, non périodique et maximal, d'après le théorème 2.2, il existe toujours une sous-suite d'itinéraires maximaux finis tronqués qui converge vers  $\underline{I}$ . La troisième affirmation résulte de la continuité de l'application entropie  $h$ .

*Exemples :*

$$\begin{aligned} P_{RC}(\lambda) &= \lambda - 1 & h(RC) &= h(R^\infty) = h((RL)^\infty) = 0 \\ P_{RLC}(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda - 1 & h(RLC) &= h((RLR)^\infty) = h((RLL)^\infty) = \text{Log} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ P_{RL^n C}(\lambda) &= \lambda^{n+1} - \lambda^n \dots 1 = \frac{\lambda^{n+2} - 2\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}. \end{aligned}$$

$P_{RL^n C}(\lambda) = 0$  donne  $\lambda = 2 - \frac{1}{\lambda^{n+1}}$  comme  $\lambda > 1$ , on en déduit  $h(RL^\infty) = \lim_n h(RL^n C) = \text{Log} 2$ .

**COROLLAIRE 4.1.** — Soit  $\underline{A}_{p-1}C$  un itinéraire fini maximal de longueur  $p + 1$ , et  $\underline{B}$  un itinéraire maximal quelconque :

$$h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = \sup \left\{ h(\underline{A}_{p-1}C), \frac{h(\underline{B})}{p+1} \right\}.$$

*Démonstration.* — 1) Si  $\underline{B} = \underline{B}_{q-1}C$  est un itinéraire maximal fini, de la définition de l'opération  $*$  on déduit

$$P_{\underline{A}_{p-1} * \underline{B}}(x) = P_{\underline{A}_{p-1}C}(x) \cdot P_{\underline{B}}(x^{p+1})$$

le corollaire découle alors de la première proposition du théorème 4.2.

2) Si  $\underline{B}$  est un itinéraire infini maximal, le corollaire résulte de la continuité de l'entropie sur  $\mathcal{I}_{\max}$ .

**COROLLAIRE 4.2.** — Soit  $h$  l'application entropie de  $\mathcal{I}_{\max}$  sur  $[0, \text{Log} 2]$ .

- (1)  $h^{-1}(0) = [R^\infty, R^{*\infty}] \cap \mathcal{I}_{\max}$ .
- (2) Si  $\underline{A}_{p-1}C > R^{*\infty}$  alors pour tout itinéraire maximal  $\underline{B}$  de  $[L^\infty, RL^\infty]$

$$h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = h(\underline{A}_{p-1}C).$$

(3) Si  $\underline{A}_{p-1}C < R^{*\infty}$  alors pour tout itinéraire maximal  $\underline{B}$  de  $[L^\infty, RL^\infty]$

$$h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = \frac{h(\underline{B})}{p+1}.$$

*Démonstration.* — (1) D'après le théorème 4.2

$$h(R^\infty) = h(RC) = \text{Log } 1 = 0.$$

Par récurrence, on obtient à partir du corollaire 4.1

$$h(R^{*n} * RC) = 0.$$

Et par continuité de  $h$  on obtient

$$h(R^{*\infty}) = 0.$$

Par ailleurs si  $\underline{A} > R^{*\infty}$ , comme les itinéraires  $R^{*n} * RL^\infty$  convergent vers  $R^{*\infty}$ , il existe un indice  $n_0$  tel que

$$R^{*n_0+1} * RL^\infty \leq \underline{A} \leq R^{*n_0} * RL^\infty.$$

Comme  $h(RL^\infty) = \text{Log } 2$ , on a d'après le corollaire 4.1

$$\frac{1}{2^{n_0+1}} \text{Log } 2 = h(R^{*n_0+1} * RL^\infty) \leq h(\underline{A}) \leq h(R^{*n_0} * RL^\infty) = \frac{1}{2^{n_0}} \text{Log } 2,$$

donc  $h(\underline{A}) > 0$ .

(2) Si  $\underline{A}_{p-1}C > R^{*\infty}$ , comme précédemment les inégalités

$$R^{*n_0+1} * RL^\infty \leq \underline{A}_{p-1} \leq R^{*n_0} * RL^\infty$$

entraînent que  $p+1 > 2^{n_0+1}$ , donc

$$\frac{h(\underline{B})}{p+1} < \frac{h(\underline{B})}{2^{n_0+1}} < \frac{\text{Log } 2}{2^{n_0+1}} \leq h(\underline{A}_{p-1}C)$$

d'où  $h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = h(\underline{A}_{p-1}C)$

(3) Si  $\underline{A}_{p-1}C < R^{*\infty}$ , comme  $h(\underline{A}_{p-1}C) = 0$  on a bien

$$h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = \frac{h(\underline{B})}{p+1}$$

ce qui prouve le corollaire.

On constate que l'entropie est constante sur tous les intervalles de la forme  $[\underline{A}_{p-1} * L^\infty, \underline{A}_{p-1} * RL^\infty] \cap \mathcal{I}_{\max}$  où  $\underline{A}_{p-1}C = R^{*n} * \underline{BC}$  ( $n \geq 0$ ) et  $\underline{BC}$  est un itinéraire fini maximal primaire, la valeur de l'entropie étant

$\frac{h(\text{BC})}{2^n}$ . Il est aisé d'autre part de voir que l'entropie est strictement croissante sur l'ensemble des itinéraires infinis maximaux non périodiques.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. COLLET, J.-P. ECKMANN, *Iterated maps on the interval as dynamical systems. Progress in Physics*. Birkhauser, Boston, 1980.
- [2] J. MILNOR, W. THURSTON, *On iterated maps on the interval I and II*. Handwritten notes.
- [3] L. JONKER, D. RAND, *Bifurcation in one dimension I and II*. Preprint.
- [4] L. JONKER, D. RAND, *A lower bound for the entropy of certain maps of the unit interval*. Preprint.
- [5] M. MISIUREWICZ, W. SZLENK, Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math.*, t. **67**, 1980, p. 45-63.
- [6] A. LASOTA, J. A. YORKE, On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. A. M. S.*, t. **183**, 1973, p. 481-485.
- [7] F. LEDRAPPIER, *Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval*.
- [8] MATSUMOTO Shigenori, *On the bifurcation of Periodic Points of one dimensional dynamical systems of a certain kind*. Preprint.

(Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> mars 1983)