ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. BRETAGNOLLE

Lois limites du Bootstrap de certaines fonctionnelles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 3 (1983), p. 281-296
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_3_281_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIX, n° 3-1983, p. 281-296.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Lois limites du Bootstrap de certaines fonctionnelles

par

J. BRETAGNOLLE

E. R. A. de Statistique, Bat. 425,
Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ. — On applique la méthode de Bootstrap de B. Efron aux fonctionnelles (de Von Mises)

$$\mathbb{P} \to T_f(\mathbb{P}) = \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\mathbb{P}(dx_1)\mathbb{P}(dx_2) \ldots \mathbb{P}(dx_m).$$

On montre que le Bootstrap fonctionne même dans le cas de limites non Gaussiennes, à condition de sous-échantillonner. On caractérise les lois limites, pour lesquelles il se produit une curieuse restriction de parité.

ABSTRACT. — We apply Efron's Bootstrap to (finite) Von Mises's functionals:

$$\mathbb{P} \to T_f(\mathbb{P}) = \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\mathbb{P}(dx_1)\mathbb{P}(dx_2) \ldots \mathbb{P}(dx_m).$$

For sufficiently small ratio of the sample sizes, we prove that the Bootstrap method works, even when the limit is not gaussian. We characterize the set of limit laws

1. INTRODUCTION

La méthode de Bootstrap introduite par Efron [*E*] repose sur l'idée suivante : soit $\hat{F}_n$ la loi empirique d'un n-échantillon régi par la loi F_0 (appelée dans la suite « loi centrale »), autrement dit :

$$\hat{F}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \partial_{X_i}, \qquad X_i \quad \text{i. i. d. de loi } F_0 .$$

Soit T une fonctionnelle à variable mesure et à valeur réelle. Pour étudier la loi limite de $T(\hat{F}_n) - T(F_0)$ convenablement normalisée, on construit un N-échantillon sur la loi $\hat{F}_n$: $\tilde{F}_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_{Y_j}$, Y_j (conditionnellement à (X_i)) i. i. d. de loi $\hat{F}_n$, soit $P(Y_j = X_i) = \frac{1}{n}$; ou encore : on se donne, indépendamment de l'échantillon (X_i), une multinomiale $(K_i \mid i = 1, 2, \ldots, n)$ de loi $M\left(N ; \ldots, p_i = \frac{1}{n}, \ldots\right)$ et alors $\tilde{F}_N = \Sigma(K_i/N)\partial_{X_i}$.

La procédure fonctionne (on dira dans la suite « le Bootstrap fonctionne ») si, conditionnellement à l'échantillon (X_i), et avec la normalisation correspondante, la loi de $T(\tilde{F}_N) - T(\hat{F}_n)$ converge vers la même limite que $T(\hat{F}_n) - T(F_0)$. On peut envisager comme convergences :

— la convergence dite dans la suite « $\mathbb{P}\hat{L}$ » : la loi conditionnelle à (X_i) tend en Probabilité (vers la bonne limite).

— la convergence dite dans la suite « p. s. $\hat{L}$ » : la loi conditionnelle tend avec probabilité 1 quand n tend vers l'infini (vers la bonne limite).

Dans ce travail, on étudie le cas des fonctionnelles dites polynomiales : $T_f(F) = \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)F(dx_1)F(dx_2) \ldots F(dx_m)$ où f est une fonction réelle de m variables réelles. Ces fonctionnelles apparaissent naturellement comme parties régulières de développement de Statistiques de Von Mises (c'est-à-dire dérivables au sens de Gâteaux, voir par exemple Filippova [*F*]). Bien que très proches des U-statistiques de Hoeffding, elles en diffèrent essentiellement en ceci que les U-statistiques éludent le problème des redoublements. Expliquons sur un exemple, prenons $m = 2$; la U-statistique de noyau f vaut $\sum_{i \neq j} f(X_1, X_j)$. Si la loi F_0 est diffuse, elle ne diffère pas de $\Sigma f'(X_i, X_j)$, où $f'(x, y) = f(x, y)1_{x \neq y}$. Mais la loi $\hat{F}_n$ n'est jamais diffuse et la confusion des deux notions n'est plus possible au niveau du Bootstrap. Un contre-exemple de Bickel et Freedman [*BF*] est fondé sur cette ambiguïté des U-statistiques. Nous allons montrer :

THÉORÈME. — Si f satisfait des hypothèses d'intégrabilité renforcées, le Bootstrap fonctionne : pour $N = O(n)$, presque sûrement en loi conditionnelle, dès lors qu'on cherche une limite Gaussienne éventuellement dégénérée. Au-delà, il fonctionne encore vers une limite non dégénérée, si on impose une liaison entre N et n (Voir la fin de l'article pour un énoncé précis).

2. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Dans la suite, $\mathscr{F}_m(\mathscr{S}_m)$ représentent les fonctions de m variables (resp. symétriques). On mettra en indice le nombre de variables s'il diffère de m. *Attention :* il s'agit de *fonctions* (mesurables) finies partout, *et non de classes*, car on veut travailler avec toutes les mesures, y compris les Dirac (notées ∂). La loi centrale est notée F_0, l'espérance associée $\mathbb{E}_0$; $\mathbb{E}_0^k$ est l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}_0^k f = E(f \mid X_1, X_2, \ldots, X_k) = \int f F_0(dx_{k+1}) \ldots F_0(dx_m).$$

On note (f, μ) la dualité fonction mesure, par exemple

$$f = \left(f, \bigotimes_{i=1}^{m} \partial_{x_i}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}_0^k f = \left(f, \bigotimes_{i=1}^{k} \partial_{x_i} \bigotimes_{i=k+1}^{m} F_0(dx_i)\right).$$

Soit G une autre Probabilité. On a la *décomposition de Hoeffding* (écrite ici pour la simplicité dans le cas d'une f de $\mathscr{S}_m$)

$$(1) \quad (f, G^{\otimes m}) = (f, (F_0 + G - F_0)^{\otimes m})$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (\mathbb{E}_0^k f, (G - F_0)^{\otimes k}) = \Sigma \binom{m}{k} (\varphi_k, G^{\otimes k})$$

où
$$\varphi_k = \left(\mathbb{E}_0^k f, \bigotimes_{i=1}^{k} (\partial_{x_i} - F_0(dx_i))\right).$$

(démonstration évidente en développant suivant la formule du binôme). Bien noter dans cette formule que φ_k, fonction de $\mathscr{S}_k$, dépend de *f et de* F_0.

Rappels sur les espaces symétriques et les U-statistiques

(Voir le cours de Neveu [*N*] et le livre de Serfling [*S*]). Soit $\mathbb{L}$ l'espace des fonctions de carré F_0-intégrable, dont on note $\mathbb{L}_0$ le sous-espace des fonctions d'espérance nulle. On a $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \oplus 1$. On notera $\mathbb{L}_m^{\otimes m}$ (resp. $\mathbb{L}^{\odot m}$) les sous-espaces des fonctions de carré F_0 intégrable de $\mathscr{F}_m$ (resp. $\mathscr{S}_m$). On a la décomposition :

$$\mathbb{L}^{\odot m} = \bigoplus_{k=0}^{m} \mathbb{L}_0^{\odot k} \odot 1^{\odot m-k}. \tag{2}$$

L'appartenance à $\mathbb{L}_0^{\otimes k}$ se teste par la nullité, pour tout i compris entre 1 et k, de l'intégrale $\int g_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) F_0(dx_i)$; ainsi, φ_k (formule 1) *est dans cet espace.*

$I_{m,n}$ désignant à la fois l'ensemble des applications injectives de $[1, m]$ dans $[1, n]$ et son cardinal $n(n-1) \ldots (n-m+1)$, pour f dans $\mathscr{S}_m$ (ou $\mathscr{F}_m$, peu importe vu la symétrie de la formule), on définit la U-*statistique de noyau* f par

$$U_n(f) = I_{m,n}^{-1} \sum_{u \in I_{m,n}} \left(f, \bigotimes_{i=1}^{m} \varepsilon_{X_{u(i)}} \right). \tag{3.1}$$

On a

$$U_n(h_k \otimes 1^{\otimes m-k}) = U_n(h_k) \qquad \text{pour } h_k \text{ dans } \mathscr{F}_k \text{ ou } \mathscr{S}_k. \tag{3.2}$$

$$\mathbb{E}_G(U_n(h_k)) = \mathbb{E}_G(h_k) = (h_k, G^{\otimes k}). \tag{3.3}$$

L'opérateur U_m est le projecteur de $\mathbb{L}^{\otimes m}$ sur $\mathbb{L}^{\odot m}$ qui préserve les constantes. Il vaut $U_m(f) = (m!)^{-1} \Sigma u_\sigma(f)$ où σ varie dans les permutations de $[1, m]$, et où $u_\sigma(f)(x_1, \ldots, x_m) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$.

Si A est une partie de $[1, m]$ (de cardinal noté a et de complémentaire A^c) on dit que $f \in \mathbb{L}_0^{\otimes A} \otimes \mathbb{L}^{\otimes A^c}$ si $f \in \mathbb{L}^{\otimes m}$ et $\int f F_0(dx_i) = 0$ pour tout i de A.

On note $\mathbb{E}_0^A f$ l'espérance conditionnelle sous F_0 de f conditionnée par les X_i d'indice i dans A (ainsi $\mathbb{E}_0^k f$ correspond au cas où $A = [1, k]$). On l'identifie à une fonction de $\mathscr{S}_a$ ou $\mathscr{F}_a$, à ne pas confondre avec sa version fonction de m variables qui elle sera notée $\mathbb{E}_0^A f \otimes 1^{\otimes A^c}$. On a alors les formules :

Si $f \in \mathbb{L}_0^{\otimes A} \otimes \mathbb{L}^{\otimes A^c}$,

$$U_m(f) \in \mathbb{L}_0^{\odot a} \odot \mathbb{L}^{\odot m-a} = \bigoplus_{k \geq a} \mathbb{L}_0^{\odot k} \odot 1^{\odot m-k} \tag{4.1}$$

et

(4.2) $\mathrm{U}_m(f - \mathbb{E}_0^{\mathrm{A}} f \otimes 1^{\otimes \mathrm{A}^c}) \in \mathbb{L}_0^{\odot a+1} \odot \mathbb{L}^{\odot m-a-1}$ si $a < m$,

et est nulle si $a = m$.

Démonstration. — Pour (4.1), il suffit de vérifier que pour tout $k < a$, toute γ de $\mathbb{L}_0$, toute σ, $\mathbb{E}_\sigma(f.v_\sigma) = 0$, où $v_\sigma = u_\sigma(\gamma^{\otimes k} \otimes 1^{\otimes m-k})$, ce qui est clair puisqu'au moins un indice de A est couplé avec un facteur 1 de la seconde fonction, car $k < a$.

Pour (4.2) : Comme $\mathbb{E}_0^{\mathrm{A}} f \otimes 1^{\otimes \mathrm{A}^c}$ est évidemment dans $\mathbb{L}_0^{\mathrm{A}} \otimes \mathbb{L}^{\mathrm{A}^c}$, le même raisonnement vaut pour $k < a$ pour chacun des deux termes. Pour $k = a$, si $\sigma[1, a] = \mathrm{A}$, $v_\sigma = \mathbb{E}_0^{\mathrm{A}} v_\sigma \otimes 1^{\otimes \mathrm{A}^c}$, on utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle ; sinon, l'un des facteurs 1 se retrouve sur un indice i de A. ∎

Lois des grands nombres pour les U-statistiques

$\mathrm{U}_n(f)$ est une martingale renversée ; on calcule aisément sa variance, on a la loi forte et une forme faible du Logarithme itéré (voir [*S*]) soit

LEMME 5. — Si f est F_0 intégrable, $\lim \mathrm{U}_n(f) = \mathbb{E}_0 f$ (p. s.).
Si f est de carré intégrable, et dans $\mathbb{L}_0^{\otimes \mathrm{A}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes \mathrm{A}^c}$, où a est le cardinal de a :

$\mathbb{E}_0 \mathrm{U}_n^2(f) = n^{-a} \| f \|_2^2 0_m(1)$; $\limsup n^{a/2} (\mathrm{Log}\, n)^{-b} \mathrm{U}_n(f) = 0_f(1)$ p. s. $\left(b > \dfrac{1}{2}\right)$
(la convention est qu'un 0 ne dépend que de son indice).

Démonstration. — Il suffit de démontrer le résultat dans le « cas pur » $a = m$, où il est clair que $\mathbb{E}_0 \mathrm{U}_n^2(f) = m!\, \mathrm{I}_{mn}^{-1} \| f \|_2^2 = 0_m(1) \| f \|_2^2$, et on suit Serfling. Puis on utilise la décomposition (4.1), $\mathrm{U}_m f = \sum_{k \geq a} g_k \odot 1^{\odot m-k}$,

où $g_k \in \mathbb{L}_0^{\odot k}$, avec $\sum_{k \geq a} \| g_k \|_2^2 = \| \mathrm{U}_m(f) \|_2^2$, enfin $\mathrm{U}_n f = \sum_{k \geq a} \mathrm{U}_n(g_k)$,

d'après (3.2). ∎

A. THÉORÈME LIMITE CENTRAL POUR LES U-STATISTIQUES

A l'espace $\mathbb{L}_0$, d'élément général noté γ associons l'espace Λ_0 des $\mathrm{N}(\gamma)$, variables Gaussiennes centrées de covariance $\mathbb{E}_0(\gamma\gamma') = \mathbb{E}(\mathrm{N}(\gamma)\mathrm{N}(\gamma'))$. Cette isométrie se prolonge en une isométrie Ψ de $\bigoplus_m \mathbb{L}_0^{\odot m}$ sur $\bigoplus_m \Lambda_0^{\odot m}$ par la formule $\Psi(\gamma^{\odot m}) = \mathrm{N}(\gamma)^{\odot m}$ (on rappelle que classiquement $h^{\odot m} = (m!)^{1/2} h^{\otimes m}$). Soit maintenant $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace de Probabilité contenant les $\mathrm{N}(\gamma)$, et $\mathscr{B}$ la sous-σ-algèbre engendrée par $\mathrm{N}(\gamma)$, γ variant dans $\mathbb{L}_0$; l'application Φ

définie par $\Phi(\exp \odot \mathrm{N}) = \exp(\mathrm{N} - \mathbb{E}(\mathrm{N}^2/2))$ (où $\exp \odot \mathrm{N} = \Sigma \mathrm{N}^{\odot m}/m\,!$) se prolonge en une isométrie, toujours notée Φ, de $\bigoplus_m \Lambda_0^{\odot m}$ *sur* $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P}_{\mathscr{B}})$. On appelle Chaos de Wiener d'ordre m l'image par Φ de $\Lambda_0^{\odot m}$; en particulier, si v est centrée *réduite*, $\Phi(v^{\odot m}) = \mathrm{H}_m(v)$, Polynôme d'Hermite de degré m (avec la normalisation $\| \mathrm{H}_m \|_2^2 = m\,!$) (Voir $[N]$).

Soit enfin $\{ \mathbb{L}_n \}$ la suite des espaces $\mathbb{L}^{\otimes n}$ (c'est-à-dire les espaces $\mathbb{L}^2$ de Probabilité sur $\mathbb{R}^{\times n}$ muni de $\mathrm{F}_0^{\otimes n}$) et $(\mathscr{V}_n)$ la suite d'applications définie sur les générateurs $\gamma^{\odot m}$ de $\bigoplus_m \mathbb{L}^{\odot m}$ par

$$\mathscr{V}_n(\gamma^{\odot m}) = \sqrt{m\,!}\binom{n}{m}^{1/2} \mathrm{U}_n(\gamma^{\otimes m}) \qquad \text{pour} \qquad n \geq m,$$

0 sinon, puis prolongée par linéarité et continuité. $\mathscr{V}_n$ est isométrique de $\bigoplus_{j \leq m} \mathbb{L}^{\odot j}$ dans $\mathbb{L}_n$ dès que $n \geq m$, et par ailleurs de norme 1.

Donnons deux résultats intermédiaires sur la convergence en loi :

(6.1) Soit $((\mathrm{X}_{i,n}), (\mathrm{Y}_j, n))$ une suite de v. a. multidimensionnelles telles que, quand n tend vers l'infini, $(\mathrm{X}_{i.n})$ tend en loi vers (X_i), et, pour chaque j, $\mathrm{Y}_{j,n}$ vers la constante c_j ; alors $((\mathrm{X}_{i,n}), (\mathrm{Y}_{j,n}))$ tend en loi vers $((\mathrm{X}_i), (c_j))$.

(6.2) Soit H un espace préhilbertien, $\mathbb{L}_n$, Z_n une suite d'espaces $\mathbb{L}^2$ de Probabilités, d'applications de H dans $\mathbb{L}_n$ linéaires, uniformément bornées $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$. On suppose que pour tout x de H, $\mathrm{Z}_n(x)$ tend en loi vers $\mathrm{Z}_\infty(x)$. Le résultat se prolonge alors au complété $\overline{\mathrm{H}}$ de H.

(Presque évident : il y a uniformité de la convergence en loi sur les fonctions continues bornées à dérivée continue bornée, car, pour une telle g

$$\mathbb{E} \mid g(\mathrm{Z}_n(x)) - g(\mathrm{Z}_n(x')) \mid \leq \sup \| \mathrm{Z}_n \| \; \| g' \|_\infty \; \| x - x' \|_{\mathrm{H}},$$

et ces fonctions suffisent à tester la convergence en loi).

Dans une telle situation, on appellera lim L l'opérateur $\lim \mathrm{LZ}_n = \mathrm{Z}_\infty$ dont le domaine est $\overline{\mathrm{H}}$. Nous redémontrons et énonçons dans des formes adaptées à ce que nous avons en vue le résultat suivant, dû à Rubin et Vitale $[R.\,V.]$:

PROPOSITION (7). — Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_m \mathbb{L}_0^{\odot m} & \xrightarrow{\{\mathscr{V}_n\}} & \{ \mathbb{L}_n \} \\
{}^m\Phi \downarrow & & \downarrow \lim \mathrm{L} \\
\bigoplus_m \Lambda_0^{\odot m} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P}_{\mathscr{B}})
\end{array}$$

est commutatif, soit pour tout x de $\bigoplus_m \mathbb{L}_0^{\odot m}$, $\mathscr{V}_n(x)$ converge en loi vers $\Phi_0\Psi(x)$.

Démonstration. — On appliquera (6.3) à $\mathscr{V}_n$ pour Z_n et pour H l'espace vectoriel (algébrique) engendré par les $(m_k!)^{-1/2}\gamma_k^{\odot m_k}$ dont on sait qu'il est dense dans $\oplus\ \mathbb{L}_0^{\odot m}$ si les m_k varient dans $\mathbb{N}$ et les γ_k dans un sous-ensemble suffisamment riche de la *sphère unité*, ici les fonctions bornées. On note $K = (\gamma_t)$ où $t = 1, 2 \dots K$ un ensemble fini de telles fonctions, et A_K désigne le $\sup\limits_{1 \leq t \leq K} \| \gamma_t \|_\infty$.

Il suffit de montrer que pour tout M fini, toute partie K finie, le système des $(\dots, (m!)^{1/2}\binom{n}{n}^{-1/2}U_n(\gamma_t), \dots)$ tend en loi vers $(\dots, (m!)^{-1/2}H_m(\upsilon_t), \dots)$ pour $1 \leq m \leq M$, $1 \leq t \leq K$, où on a posé $\upsilon_t = \upsilon(\gamma_t)$. En multipliant par le facteur (tendant vers 1) $n^{-m/2}[n(n-1)\dots(n-m+1)]^{1/2}$ on remplace le terme général par $Z_{t,m,n} = n^{-m/2} \sum\limits_{u \in I_{m,n}} \prod\limits_{i=1}^{m} {}_t X_{u(i)}$ où ${}_tX_i$ note $\gamma_t(X_i)$. Soit ${}_ts_n^{(h)} = \sum\limits_{i=1}^{n} {}_tX_i^h$ (h entier). Un résultat classique sur les Polynômes symétriques (ici de plus homogènes) montre que $Z_{t,m,n} = P_m(\dots, {}_ts_n^{(h)}/n^{h/2}, \dots)$ où P_m est un Polynôme de m variables *ne dépendant que de m*. Puis :

A) le T. L. C. multidimensionnel montre que $(\dots, {}_ts_n^{(1)}/n^{1/2}, \dots)$ tend en loi vers $(\dots, \upsilon_t, \dots)$, la loi forte que ${}_ts_n^{(h)}/n^{h/2}$ converge vers 1 pour $h=2$, 0 au-delà (les X sont dans tous les $\mathbb{L}^p$, et centrées réduites). Si donc on pose $Q_m(x) = P_m(x, 1, 0, \dots, 0)$ d'après (6.2), le système tend en loi vers $(\dots, Q_m(\upsilon_t), \dots)$.

B) Pour terminer, c'est-à-dire identifier les Q_m aux Polynômes d'Hermite normalisés, comme ce sont des Polynômes de degré moindre que m, il suffit de vérifier que les $Q_m(\upsilon)$ forment un système orthonormal. Il suffit de se limiter au cas d'*une* γ (d'une X) et de montrer alors que les $Z_{m,n}$ pour $m \leq M$ restent dans une même Boule de $\mathbb{L}^4$: l'équiintégrabilité en résultant donnera $\mathbb{E}(Q_m(\upsilon)Q_{m'}(\upsilon)) = \lim \mathbb{E}_0(Z_{m,n}Z_{m',n}) = \partial_{m,m'}$ (symbole de Kronecker) et le résultat.

C) A cet effet, comme on manipule un nombre fini de Polynômes (les P_m pour $m \leq M$) il suffit de donner un majorant commun aux $\mathbb{E}_0({}_ts_n^{(h)}/n^{h/2})^{4M/h}$. Pour $h=1$, on utilise Khintchine (les ${}_tX_i$ étant centrées indépendantes) qui donne

(8) $\quad \mathbb{E}_0({}_ts_n^{(1)})^T = 0_T(1)\,\mathbb{E}_0({}_ts_n^{(2)})^{T/2}$; $\quad$ puis pour $h \geq 2$, $\quad [{}_ts_n^{(h)}]^T \leq n^T A_K^{hT}$. ■

3. THÉORÈME LIMITE CENTRAL POUR LES FONCTIONNELLES POLYNÔMES

On se restreint désormais à une somme *finie* de telles fonctionnelles, qu'on peut toujours regrouper en une seule, qu'on va centrer, soit

$$\text{(9)} \qquad T_n = T_f(\hat{F}_n) - T_f(F_0) = (f, \hat{F}_n^{\otimes m}) - (f, F_0^{\otimes m})$$

où f est dans $\mathscr{F}_m$ ou dans $\mathscr{S}_m$. La formule de Hoeffding (1) donne :

$$\text{(10)} \qquad T_n = T_f(\hat{F}_n) - T_f(F_0) = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (\varphi_k, \hat{F}_n^{\otimes k})$$

où les φ_k sont des fonctions de $\mathbb{L}_0^{\otimes k}$, et symétriques.

Réduction à une somme de U-statistiques

On note $\mathscr{P}_m$ l'ensemble des partitions de $[1, m]$, soit des $P = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$ où l'entier p est le cardinal de P et les A_i disjoints et non vides; on note $j_s(P)$ le nombre de parties de P de cardinal s, J(P) l'ensemble des indices constituant une partie à un élément (J a pour cardinal j_1). On note $\mathscr{P}_{1,2}$ l'ensemble des partitions pour lesquelles $j_s = 0$ si $s > 2$. D est la partition discrète ($p = m$). On a les formules

$$\text{(11)} \qquad \Sigma s j_s = m \, ; \qquad \Sigma j_s = p$$

$$\begin{array}{llll} \text{si } P \in \mathscr{P}_{1,2}, & j_1 = m \text{ modulo } 2, & \text{et} & 2p = j_1 + m \, ; \\ \text{si } P \notin \mathscr{P}_{1,2} & & & 2p < j_1 + m \, . \end{array}$$

On définit $\underline{P}$ comme l'ensemble des applications u de $[1, m]$ dans $[1, n]$ telles que $u(i) = k_t$ pour $i \in A_t$, avec les k_t *tous différents* (pour factoriser les u par des applications injectives) de sorte que le cardinal de $\underline{P}$ vaut $I_{p,n}$. On définit l'application de condensation J_P de $\mathscr{F}_m$ dans $\mathscr{F}_p$ par la formule :

$$\text{(12)} \qquad J_P f(y_1, y_2, \ldots, y_p) = f(x_1, \ldots, x_m) \qquad \text{où} \qquad x_i = y_t \qquad i \in A_t \, .$$

A l'aide de ce formalisme, on décompose les fonctionnelles polynômes en sommes de U-statistiques par les formules :

$$\text{(13)} \qquad \sum_{u \in \underline{P}} \left(f, \bigotimes_{i=1}^{m} \partial_{X_{u(i)}} \right) = I_{p,n} U_n(J_P f)$$

et donc

(13) $$(f, \hat{\mathrm{F}}_n^{\otimes m}) = \Sigma n^{-m} \mathrm{I}_{p,n} \mathrm{U}_n(\mathrm{J}_\mathrm{P} f) \quad (\text{sommation sur } \mathrm{P} \in \mathscr{P}).$$

Normes fortes

Soit $q \geq 1$; on note $\| \,.\, \|_q$ la q-norme dans la dualité avec F_0 : pour h dans $\mathscr{F}_k$, $\| h \|_q^q = (\, | h |^q, \mathrm{F}_0^{\otimes k})$. La *norme forte* est alors définie par

(14) $$||| f |||_q^q = \operatorname{Sup} \| \mathrm{J}_\mathrm{P} f \|_q^q ,$$

Sup pris sur toutes les P de $\mathscr{P}_m$. On a

LEMME

(15) $$||| f \otimes f |||_1 \leq ||| f |||_2^2 ; \qquad ||| \varphi_k |||_q \leq 2^k \, ||| f |||_q \qquad (f \in \mathscr{S}_m).$$

Démonstration. — Soit A une partie de $[1, m]$; définissons la partition $\mathrm{P} * \mathrm{A}$ comme trace sur A de P, complétée par la partition discrète sur A^c. On a : $\mathbb{E}_0^\mathrm{A}(\mathrm{J}_{\mathrm{P*A}} h) \otimes 1^{\mathrm{A}^c} = \mathrm{J}_p(\mathbb{E}_0^\mathrm{A} h \otimes 1^{\mathrm{A}^c})$; l'appliquant à $h = | f |^q$ et utilisant Jensen, il vient

$$\| \mathrm{J}_{\mathrm{P*A}} f \|_q^q = \| \mathrm{J}_p(\mathbb{E}_0^\mathrm{A} | f |^q \otimes 1^{\mathrm{A}^c}) \|_1 \geq \mathrm{J}_\mathrm{P}(\mathbb{E}_0^\mathrm{A} | f |^q \|_1 = \| \mathrm{J}_\mathrm{P}(\mathbb{E}_0^\mathrm{A} f \|_q^q$$

et donc $||| \mathbb{E}_0^\mathrm{A} f |||_q^q \leq ||| f |||_q^q$; la seconde inégalité en découle, φ_k étant somme (signée) de 2^k espérances conditionnelles. De même, si P partitionne $[1, m] \times [1, m] = [1, 2m]$, si Q est la trace de P sur la seconde moitié, on a

$$\| \mathrm{J}_\mathrm{P} f \otimes f \|_1 \leq \| \mathrm{J}_\mathrm{P} f \otimes 1^{\otimes m} \|_2 \; \| \mathrm{J}_\mathrm{P} 1^{\otimes m} \otimes f \|_2 ,$$

mais

$$\mathrm{J}_\mathrm{P} 1^{\otimes m} \otimes f = 1^{\otimes m} \otimes \mathrm{J}_\mathrm{Q} f \ldots \qquad \blacksquare$$

Désormais, on suppose que f vérifie l'hypothèse

(H) f est de 2-norme forte finie (sous F_0) et donc également les φ_k.

LEMME (16). — Soit f dans $\mathscr{F}_m$ vérifiant (H). $\lim (f, \hat{\mathrm{F}}_n^{\otimes m}) = \mathbb{E}_0 f$ (p. s.).

Si de plus $f \in \mathbb{L}_0^{\otimes \mathrm{A}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes \mathrm{A}^c}$, $\limsup n^{a/2} (\operatorname{Log} n)^{-b} (f, \hat{\mathrm{F}}_n^{\otimes m}) = 0_f(1) \left(b > \frac{1}{2} \right)$ (p. s.) et $\mathbb{E}_0(f, \hat{\mathrm{F}}_n^{\otimes m})^2 = n^{-a} \, ||| f |||_2^2 0_m(1)$.

Démonstration. — On utilise la décomposition (13). Toutes les $\| \mathrm{J}_p f \|_2$ sont majorées par $||| f |||_2$ (15), les $\mathrm{J}_p f$ vérifient donc les Hypothèses du Lemme (5). Pour la première assertion : si $p < m$, $n^{-m} \mathrm{I}_{p,n} = 0(1/n)$, $n^{-m} \mathrm{I}_{p,n} \mathrm{U}_n(\mathrm{J}_p f)$ tend p. s. vers 0 d'après la 1^re^ assertion de (5) ; pour $p = m$, $\mathrm{P} = \mathrm{D}$, $\mathrm{J}_\mathrm{D} f = f$, et $n^{-m} \mathrm{I}_{m,n}$ tend vers 1. Pour la seconde : on démontre le résultat pour chaque P de $\mathscr{P}_m$, soit à étudier $n^{a/2 - m} (\operatorname{Log} n)^{-b} \mathrm{I}_{p,n} \mathrm{U}_n(\mathrm{J}_p f)$.

Rappelons que J(P) désigne l'ensemble des indices constituant une partie à un élément de P, son cardinal est j_1. Si donc K, de cardinal k, désigne $A \cap J(P)$, $k \geqslant j_1 + a - m$, et $J_P(f) \in \mathbb{L}_0^{\otimes K} \otimes \mathbb{L}^{\otimes K^c}$. D'où le résultat en reportant dans (5), et notant que $-k/2 + a/2 - m + p \leqslant 0$, d'après l'évaluation de k et (11) : $2p - j_1 \leqslant m$. De même pour la majoration de la norme. ■

Revenons à la formule de Hoeffding (10). Soit k le premier indice tel que $|||\varphi_k|||_2 \neq 0$. D'après le Lemme précédent, la somme étant *finie*, $n^{k/2}\{T_n - \binom{m}{k}(\varphi_k, \hat{F}_n^{\otimes k})\}$ tend vers 0, p. s. puisque $n^{-1/2}(\operatorname{Log} n)^b$ tend vers 0. Autrement dit, on peut supposer que f est dans $\mathbb{L}_0^{\odot k}$, et on suppose désormais en vertu du principe d'économie des notations :

(17) (H) *est vérifiée, f est de norme forte non nulle et f est dans* $\mathbb{L}_0^{\odot m}$.

Utilisons à nouveau la décomposition (13). Soit

$$\psi_j = \Sigma\, \mathbb{E}_0^{J(P)}(J_P f), \tag{18}$$

sommation portant sur les P de $\mathscr{P}_{1,2}$ avec $j_1(P) = j$ (voir (11) pour ces notations). On a pratiqué l'abus de notations consistant à considérer $\mathbb{E}_0^J(h)$ comme fonction de j variables sans places précises dans $[1, p]$; notons que $\psi_j \in \mathbb{L}_0^{\odot j}$ (symétrie sur les P de la sommation) et qu'elle est de norme forte finie (car $J_P f$ l'est, ainsi que toute J_P, $J_P f$, les J_P, J_P s'interprétant comme des J_Q pour Q choisie « ad hoc ».)

A : pour $P \notin \mathscr{P}_{1,2}$, $n^{-m/2} I_{p,n} U_n(J_P f)$ *tend vers* 0 *p. s.* : en effet, un examen de la preuve de (16) où on porte $a = m$, montre que $-m + p - k/2 < -m/2$ si P n'est pas dans $\mathscr{P}_{1,2}$ (voir (11)). On gagne donc *une puissance de n* dans la seconde majoration du Lemme (16), comme dans la précédente réduction au premier indice k.

B : pour $P \in \mathscr{P}_{1,2}$, $n^{-m/2} I_{p,n} U_n(J_P f - \mathbb{E}_0^{J(P)}(J_P f) \otimes 1^{p-j_1})$ *tend p. s. vers* 0 : en effet d'après (4.2), ce terme est la U-statistique d'un élément de $\mathbb{L}_0^{\otimes j_1+1} \otimes \mathbb{L}^{\otimes p-j_1-1}$, et ce terme avec sa normalisation est

$$0_{\text{p.s.}} \quad (n^{-m/2+p-j_1/2-1/2}(\operatorname{Log} n)^b),$$

même conclusion que dans A puisque cette fois, $m = j_1 + 2(p - j_1)$.

Nous sommes donc ramenés aux ψ_j, pour lesquels on utilise (3.2). Nous obtenons

(19) Sous (17), $$n^{m/2} T_n = \sum_j (1 + 0(1/n)) I_{j,n}{}^{1/2} U_n(\psi_j) + \sigma_{p.s.} \quad (1)$$

Bien noter que dans cette formule, *j a même parité que m* puisque pour P dans $\mathscr{P}_{1,2}$ $j_1(\mathrm{P})/2 = -m/2 + p$... Le retour au cas général et la Proposition (7) donnent :

PROPOSITION (20). — Soit f dans $\mathscr{F}_m$, de norme forte finie, différente de son espérance pour la norme forte. Soit k le plus petit entier tel que $|||\, \varphi_k \,||| \neq 0$. Alors $n^{k/2} \{ (f, \hat{\mathrm{F}}_n^{\otimes m}) - \mathbb{E}_0 f \}$ converge en loi.

La limite, non nulle, appartient à la somme des Chaos de Wiener d'indice j moindre que k et de même parité que k.

Notons que Filippova [F], dans son Théorème 4, avait donné la limite sous la forme d'une intégrale stochastique de Pont Brownien, mais sans la restriction de parité.

4. BOOTSTRAP DES FONCTIONNELLES POLYNÔMES

Nous allons suivre le plan des paragraphes précédents. Nous serons amenés à utiliser une nouvelle classe de partitions, la classe $\mathscr{C}_m$ définie comme l'ensemble des *couplages* de $[1, m] \times [1, m]$, c'est-à-dire des partitions C de cet ensemble, de cardinal c, composées de c_1 parties à un élément, et de c_2 paires liant *un* élément de la première moitié à *un* élément de la seconde, avec donc $c = c_1 + c_2$; $c_1 + 2c_2 = 2m$

$$\mathrm{I}_{m,n}^2 \mathrm{U}_n^2(f) = \sum_{u \in \underline{\mathrm{D}}\ v \in \underline{\mathrm{D}}} \left(f, \bigotimes_{i=1}^{m} \partial_{\mathrm{X}_{u(i)}}\right)\left(f, \bigotimes_{i=1}^{m} \partial_{\mathrm{X}_{v(i)}}\right)$$
$$= \sum_{\mathrm{C}} \sum_{w \in \underline{\mathrm{C}}} \left(f \otimes f, \bigotimes_{i=1}^{2m} \partial_{\mathrm{X}_{w(i)}}\right)$$

soit encore

$$(21) \qquad \mathrm{I}_{m,n}^2 \mathrm{U}_n^2(f) = \Sigma \mathrm{I}_{c,n} \mathrm{U}_n(\mathrm{J}_{\mathrm{C}}(f \otimes f)) \quad \text{sommation sur } \mathrm{C} \in \mathscr{C}_m .$$

Nous renforçons (H) en (H') : f est de norme forte $|||\, f \,|||_4^2$ finie, qui donne comme majorant commun $|||\, f \,|||_4^2$ aux $\|\, \mathrm{J}_{\mathrm{C}}(f \otimes f) \,\|_2^2$, en suivant (15), afin de contrôler P$\hat{\mathrm{L}}$ ou p. s. $\hat{\mathrm{L}}$ les termes négligeables : on ne peut utiliser directement les assertions type LogLog des lemmes (5) et (16), mais on les utilise sur les normes quadratiques *relativement à* $\hat{\mathrm{F}}_n$ (c'est-à-dire conditionnellement au premier échantillon (X_i)) ; on note $\hat{\mathbb{E}}_n$ cette espérance conditionnelle. La complication relative des calculs provient de cette nécessité technique, également de ce que (B.3.3) nous oblige à une double réduction aux U statistiques. (3) avec $\hat{\mathbb{E}}_n$ au lieu de $\mathbb{E}_0$, donne

$$\text{(B.3.1)} \qquad V_N(f) = I_{m,N}^{-1} \sum_{u \in I_{m,N}} \left(f, \bigotimes_{j=1}^{N} \partial_{Y_{u(j)}} \right)$$

(on change légèrement la notation pour les nouvelles U-statistiques) et

$$\text{(B.3.3)} \qquad \hat{\mathbb{E}}_n(V_N(h_k)) = (h_k, \hat{F}_n^{\otimes k}).$$

Comme, pour les fonctions d'*une* variable, U statistiques et fonctionnelles Polynômes coïncident, on a immédiatement :

(22) Pour g dans $\mathbb{L}$, $V_N(g)$ converge p. s. $\hat{L}$ vers $\mathbb{E}_0 g$ si N, n tendent vers l'infini.

Démonstration. — Posons $\gamma = g - \mathbb{E}_0 g$, $\gamma \in \mathbb{L}_0$. Il faut montrer que $V_N(\gamma)$ tend p. s. $\hat{L}$ vers 0, on utilise une technique de moments (conditionnels) :

$\hat{\mathbb{E}}_n V_n(\gamma) = U_n(\gamma)$ d'après (B.3.3), qui tend p. s. vers 0 (loi forte).

$N \operatorname{Var}_N V_N(\gamma) = U_n(\gamma^2) - U_n(\gamma)^2$, qui tend p. s. vers $\operatorname{Var}_0 h$ (loi forte). ■

Pour γ dans $\mathbb{L}_0$, suivant (7), posons $\tilde{s}_N^{(h)} = \sum_{j=1}^{N} \gamma(Y_j)^h$. Comme $N^{-h/2} s_N^{(h)} = N^{1-h/2} V_N(\gamma^h)$, (22) donne immédiatement (quand N, n tendent vers ∞).

(23) Si $\|\gamma\|_\infty < \infty$, $N^{-h/2} \tilde{s}_N^{(h)}$ tend p. s. $\hat{L}$ vers $\|\gamma\|_2^2$ ou 0 suivant que $h=2$ ou $h > 2$.

Bickel et Freedman ont montré dans [*BF*] le TLC au premier ordre pour le Bootstrap, qui, dans notre cas particulier s'écrit :

(24) $N^{-1/2}(V_N(\gamma) - U_n(\gamma))$ converge p. s. $\hat{L}$ vers $N(\gamma)$ si N, n tendent vers ∞ (notations de (7), γ dans $\mathbb{L}_0$ et $N(\gamma)$ Gaussienne associée dans Λ_0).

Introduisons trois hypothèses liant N et n :

(N_0) N et n tendent vers ∞. (N_1) $N = \sigma(n)$ et N tend vers ∞.

(N_2) Pour un $b > 1$, $N = \sigma(n(\operatorname{Log} n)^{-b})$ et N tend vers ∞.

Sous (N_1), le terme de centrage de (24) : $N^{-1/2} U_n(\gamma)$ tend en P vers 0, et p. s. $\hat{L}$ sous (N_2). On obtient donc, toujours en suivant les notations de (7).

(25) Pour toute partie finie $K = (\gamma_t)$ de la sphère unité de $\mathbb{L}_0$ telle que A_k soit fini, le système des $(\ldots, (m!)^{1/2} \binom{N}{m}^{-1/2} V_N(\gamma_t), \ldots)$ tend vers

$$(\ldots, (m!)^{-1/2} H_m(v_t), \ldots) \qquad \text{(pour } 1 \leqslant m \leqslant M \text{ fini)} ;$$

la convergence a lieu $P\hat{L}$ sous (N_1), p. s. $\hat{L}$ sous (N_2).

Démonstration. — Il suffit de reprendre la fin de la démonstration de (7).

en notant que le terme de centrage au premier ordre disparaît ; (7) a déjà identifié les $P_m(x, 1, 0, \ldots, 0)$ comme étant les Polynômes de Hermite $H_m(x)$. ■

Soit maintenant x un élément centré *de type fini* de $\oplus_m \mathbb{L}_0^{\odot m}$, c'est-à-dire que $x = \bigoplus_{i=1}^{m} x_i$, $x_i \in \mathbb{L}_0^{\odot i}$. On suppose de plus que chaque x_i vérifie (H'). Notons $\tilde{\upsilon}_N$ l'application $\tilde{\upsilon}_N(\gamma^{\odot m}) = (m!)^{1/2}\binom{N}{m}^{1/2} V_N(\gamma^{\otimes m})$. Pour montrer que (B.7). Pour tout x comme plus haut, $\tilde{\upsilon}_N(x)$ tend vers $\Phi_0\psi(x)$, P$\hat{\mathrm{L}}$ sous (N_1), p. s. $\hat{\mathrm{L}}$ sous (N_2) il nous manque un seul ingrédient :

LEMME (26). — Soit f dans $\mathbb{L}_0^{\otimes m}$, vérifiant (H'). Alors $N^m \hat{\mathbb{E}}_n V_N(f)^2$ converge vers $m! \| f \|_2^2$, en P sous (N_1), p. s. sous (N_2).

Démonstration de (B.7) *sous les hypothèses de* (26). — Fixons $i = m$ pour l'instant. Choisissons une partie K comme dans (25), y_m est la projection de x_m sur $(SpK)^{\odot m}$, où SpK est l'espace linéaire engendré par les γ_t de K ; posons $f_K = x_M - y_m$; il est clair que f_K vérifie (H'), et que $\| f_K \|_2$ peut être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de K. La linéarité des U-statistiques et (26) donnent $\hat{\mathbb{E}}_n(\tilde{\upsilon}_N(x_m) - \tilde{\upsilon}_N(y_m))^2$ converge, en P ou p. s., vers $m! \| f_K \|_2^2$. On peut faire cette opération pour tous les x_i à la fois (ils sont en nombre fini). La continuité de l'opérateur $\Phi_0\psi$ et une diagonalisation sur K donnent le résultat, en utilisant une inégalité de Bienaymé-Tchebichev conditionnelle. ■

Démonstration de (26). — On peut (et on le fait) supposer f symétrique. (B.3.1), (B.3.3) et (21) (où n, U deviennent N, V) intégrée par $\hat{F}_n$ donnent :

$$\hat{\mathbb{E}}_n I_{m,N} V_N^2(f) = \Sigma I_{m,N}^{-1} I_{c,N}(J_C(f \otimes f), \hat{F}_n^{\otimes c}), \text{ sommation sur les C de } \mathscr{C}_m.$$

Notons que $N^{-m} I_{m,N}$ tend vers 1, et que ce terme équivaut donc à celui de (26). Pour $c_1 = 0$, $c = m$ et la somme des $J_C(f \otimes f)$ vaut $m!\ f^2$. Le total des termes correspondants vaut $m!\,(f^2, \hat{F}_n^{\otimes m})$. f^2 vérifiant (H), ce terme tend p. s. vers $m!\ \| f \|_2^2$ d'après la première assertion du Lemme (16). ... Pour $c_1 > 0$ (il vaut alors au moins 2), $I_{m,N}^{-1} I_{c,N} = 0(N^{c_1/2})$, $J_C(f \otimes f)$ vérifie (H), et appartient à $\mathbb{L}_0^{\otimes C_1} \otimes \mathbb{L}^{\otimes C_2}$ pour deux parties C_1, C_2 de cardinaux c_1, c_2. On applique la seconde assertion de (16), $(N/n)^{c_1/2}$ ou $(N/n)^{c_1/2}(\mathrm{Log}\, n)^b$ tendant vers 0 sous (N_1) ou (N_2). ■

Remarque. — Ici, (N_2) n'a pas été utilisée pour éliminer un terme de centrage, comme dans (25) ; on peut donc préciser :

(27) Sous les hypothèses de (26), si $a > 0$, $N^{m-a} \hat{\mathbb{E}}_n V_N^2(f)$ tend p. s. vers 0 sous (N_0). Nous avons donc démontré l'analogue de (7), reste à faire l'étude

parallèle à celle du paragraphe 3. Dans celui-ci, on réduit tous les termes de $n^{m/2}(f, \hat{F}_n^{\otimes m})$ aux seuls termes de la formule (18) en montrant que tous les autres termes sont des U-statistiques *surnormalisées*, c'est-à-dire qu'ils comportent en facteur une puissance négative de n devant leur normalisation quadratique. En utilisant (27), les termes correspondants tendent p. s. $\hat{\mathbb{L}}$ vers 0 sous la seule (N_0) (vérification laissée au lecteur). Rappelons que (24) est également valide sous la seule (N_0). Écrivons maintenant le résultat final :

THÉORÈME. — Soit f fonction de m variables, de norme forte d'ordre 4 finie, non constante pour cette norme (Déf. (14)). Soit k le premier entier > 0 tel que la $k^{\text{ème}}$ projection φ_k soit non nulle pour cette norme (Déf. (1)). Soient

$$T_n(f) = (f, \hat{F}_n^{\otimes m}) - (f, F_0^{\otimes m})$$

et

$$BT_N(f) = (f, F_N^{\otimes m}) - (f, \hat{F}_n^{\otimes m}).$$

Alors :

1. Le Bootstrap fonctionne à l'ordre k : $n^{k/2}T_n(f)$ converge en loi vers une limite non dégénérée, qui appartient à la somme des Chaos de Wiener d'ordre inférieur ou égal à k et de même parité ; la loi conditionnelle de $N^{m/2}$, $BT_N(f)$ converge vers la même limite, en Probabilité si N tend vers l'infini et N/n vers 0 ; presque sûrement si N tend vers l'infini et $N(\text{Log}\, n)^b/n$ vers 0 pour un $b > 1$.

2. A l'ordre 1, sous la seule hypothèse N tend vers l'infini et $N = 0(n)$, $n^{1/2}T_n(f)$ et $N^{1/2}BT_N(f)$ ont la même limite gaussienne éventuellement dégénérée, en loi pour la première, presque sûrement en loi conditionnelle pour la seconde.

Démonstration. — La décomposition de Hoeffding donne par différence

$$T_n(f) = \sum_j \binom{m}{j} T_n(\varphi_j), \qquad BT_N(f) = \sum_j \binom{m}{j} (BT_N(\varphi_j) - T_n(\varphi_j)).$$

Pour φ_j nul au sens fort si $j < k$, comme au-delà de k les termes sont négligeables (en P, ou p. s. $\hat{L}$, suivant (16) ou (27) sous (N_0)), tout se réduit à $n^{k/2}\binom{m}{k}T_n(\varphi_k)$ ou $N^{k/2}\binom{m}{k}(BT_N(\varphi_k) - T_n(\varphi_k))$. 1°) dans le cas 1, avec les restrictions supplémentaires sur N, n, le terme de centrage conditionnel disparaît. On applique la Proposition (20) ou son calque compte tenu des remarques précédant l'énoncé.

2° Dans le cas 2, on retombe sur le résultat de Bickel Freedman, valable sous (N_0). ■

COMMENTAIRES DU RÉSULTAT FINAL

1) Avec les U-statistiques généralisées (c'est-à-dire travaillant sur l'espace complet $\oplus\ \mathbb{L}_0^{\otimes m}$) on peut atteindre comme limite toute loi de Probabilité, du moins dès que $\mathbb{L}^2(F_0)$ est de dimension infinie : on sait alors en effet que $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P}_{\mathscr{B}})$ contient des v. a. de loi arbitraire. Mais avec les fonctionnelles Polynômes on en est fort loin ! Hors les restrictions (minimes sans doute) de finitude de la norme forte et de degré fini, on a une très surprenante *restriction de parité* sur les Chaos atteints qui suggère qu'il est inutile d'espérer la validité du Théorème du Bootstrap pour une loi limite ne possédant pas cette parité.

2) *Justification de* (N_1). — Prenons comme contre-exemple $f(x, y) = xy$, F_0 régit un signe $\varepsilon = \pm 1$ avec $\mathbb{E}_0\varepsilon = 0$. La loi limite de la fonctionnelle est alors G_1^2, G_1 gaussienne centrée réduite. Prenons $N = n$; le terme Bootstrapé normalisé vaut alors $n^{-1}((\Sigma K_i\varepsilon_i)^2 - (\Sigma\varepsilon_i)^2)$, où (K_i) suit une loi multinomiale $\mathbb{P}(\ldots K_i = k_i \ldots) = n!(\Pi k_i!)^{-1}n^{-n}$, indépendante des ε_i. On peut appliquer le TLC conditionnellement à ce terme, il est facile de voir que sa loi conditionnelle est asymptotiquement $2G_1G_2 + G_2^2$, où G_2 est une seconde Gaussienne centrée réduite indépendante de G_1. Le Bootstrap ne fonctionne donc pas.

3) Pour être complet, reste à montrer que *toutes* les limites proposées peuvent être effectivement atteintes : Soit ψ_j une famille finie d'éléments de $\mathbb{L}_0^{\otimes j}$, j de même parité et moindres que m, de normes fortes finies, et soit

$$f = \sum_j \psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_j) 1_{x_{j+1}=x_{j+2}} 1_{x_{j+3}=x_{j+4}} \ldots 1_{x_{m-1}=x_m}.$$

Si F_0 *est diffuse* f est dans $\mathbb{L}_0^{\otimes m}$, et de norme forte finie, l'étude précédente, à partir du (18), montre qu'alors $n^{m/2}(T_f(\hat{F}_n) - T_f(F_0))$ tend en loi vers $\Phi_0\Psi(\Sigma\psi_j)$ et que le Bootstrap fonctionne.

Il me reste à rendre à Jacques Neveu ce qui lui est dû. C'est la limpidité de son Cours de Montréal qui m'a permis de mener à bien ces calculs, *simples* dans l'esprit de ce cours en dépit de la présente rédaction.

RÉFÉRENCES

[*E*] EFRON, Bootstrap Methods. *Ann. Stat.*, t. **7**, 1, 1979, p. 1.

[*F*] FILIPPOVA, Mises Theorems. *Theory of Prob. and Appl.* (SIAM), t. **VI**, 1, 1962, p. 24.

[*BF*] BICKEL, FREEDMAN, Some asymptotic. Theory for the Bootstrap. *Ann. Stat.*, t. **9**, 6, 1981, p. 1196.

[*N*] NEVEU, Processus aléatoires gaussiens, Université de Montréal, 1968.
[*S*] SERFLING, Approximations Theorems of Mathematical Statistics, Wiley.
[*RV*] RUBIN, VITALE, Asymptotic Distributions of Symetric Statistics. *Ann. Stat.*, t. **8**, 1980, p. 165.

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1982)