ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN MOULIN-OLLAGNIER

Théorème ergodique presque sous-additif et convergence en moyenne de l'information

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 3 (1983), p. 257-266
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_3_257_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIX, n° 3-1983, p. 257-266.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorème ergodique presque sous-additif et convergence en moyenne de l'information

par

Jean MOULIN-OLLAGNIER

Département de Mathématiques, Université Paris-Nord,
Avenue J. B. Clément, 93430 Villetaneuse

ABSTRACT. — We give there the proof of a new ergodic theorem, that we called almost subadditive ergodic theorem. That allows a new proof of the result of Kieffer about the generalization of Shannon-McMillan's theorem to the action of an amenable group on a probability space.

Our proof is very simple: we only use Hölder's inequality and the subadditive ergodic theorem.

RÉSUMÉ. — Nous présentons ici un nouveau théorème ergodique qui permet la démonstration élémentaire du théorème de Shannon et McMillan pour l'action d'un groupe moyennable de transformations d'un espace probabilisé.

Le domaine des théorèmes ergodiques connaît en ce moment des progrès significatifs avec la généralisation multidimensionnelle du théorème de Kingman par M. Ackoglu et U. Krengel ou l'étude des théorèmes ergodiques sous-additifs dans L^2 par Y. Derriennic et U. Krengel, pour ne citer que des travaux très récents.

Le problème de la généralisation du théorème de Shannon et McMillan a été étudié par J. Fritz, J. P. Thouvenot, Y. Katznelson et B. Weiss, et Nguyen Xuan Xahn.

J. C. Kieffer a donné la solution complète dans son article de 1975. Mais ce travail est relativement long : Kieffer y utilise notamment la convergence presque sûre de l'information conditionnelle.

Notre démonstration est bien plus simple ; mis à part le théorème ergodique presque sous-additif, elle ne repose que sur l'inégalité de Hölder.

Nous obtenons dans la dernière partie la convergence en norme L_1 de l'information conditionnelle moyenne.

I. RAPPELS, DÉFINITIONS, ÉNONCÉ DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Système dynamique : nous appelons ici système dynamique un espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$ sur lequel agit un groupe G par des transformations bimesurables préservant la mesure.

Partition : une partition P est un ensemble fini ou dénombrable d'éléments de mesure non nulle de la tribu $\mathscr{A}$, deux à deux disjoints et de réunion X, aux ensembles de mesure nulle près. Si A est une partie finie du groupe G, la borne supérieure des partitions $T_g^{-1}(P)$, images réciproques de la partition P par les transformations T_g, où g décrit A, est notée P^A.

Information : l'information I(Q) relative à la partition Q est la fonction mesurable positive définie par

$$I(Q) = \sum_{a \in Q} 1_a . (-\operatorname{Log} \mu(a))$$

On appelle entropie de la partition Q et on note H(Q) l'intégrale de I(Q).

Dans la suite, on fixe une partition P d'entropie finie et on note I_A la fonction $I(P^A)$; d'après la sous-additivité de l'entropie, la fonction positive I_A est intégrable pour toute partie finie A de G.

Nous établissons dans ce travail le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si le groupe* G *de transformations de l'espace est moyennable et infini, l'information moyenne* $|A|^{-1} . I_A$ *relative à une partition fixée* P, *d'entropie finie, converge en norme* L_1 *selon le filtre moyennant vers un élément invariant de* $L_1^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ *; cette limite est la borne inférieure des espérances conditionnelles* $|A|^{-1} . E(I_A | \mathscr{I})$ *par rapport à la sous-tribu* $\mathscr{I}$ *des événements invariants.*

Démonstration. — La preuve de ce résultat repose sur le théorème ergodique presque sous-additif (théorème 2) que nous établissons dans la troisième partie. Des trois hypothèses de ce théorème, seule la presque sous-additivité n'est pas immédiate ; nous consacrons la deuxième partie à sa démonstration (théorème 1).

Les lecteurs familiers des suites de Følner et qui seront peut-être étonnés par l'utilisation du filtre moyennant et des fonctions de défaut d'invariance trouveront les rappels nécessaires en quelques lignes au début de la troisième partie.

II. PRESQUE SOUS-ADDITIVITÉ DE L'INFORMATION

Le résultat de cette deuxième partie est le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit* $(X, \mathscr{A}, \mu, G)$ *un système dynamique et* P *une partition d'entropie finie de* X. *Alors, pour toute partie finie non vide* A *de* G *et toute décomposition à coefficients positifs de l'indicatrice de* A, $1_A = \Sigma\lambda_i 1_{A_i}$, *où les parties* A_i *ne sont également pas vides, on a la majoration*

$$\mu((I_A - \Sigma\lambda_i . I_{A_i})^+) \leqq 1$$

ce qui contrôle le défaut de sous-additivité de l'information.

Comme nous l'avons dit plus haut, la partie P est fixée et nous la sous-entendons dans la notation $I_A = I(P^A)$.

Démonstration. — La différence $I_A - \Sigma\lambda_i I_{A_i}$ est constante sur chaque atome de la partition P^A et l'on a

$$I_A - \Sigma\lambda_i I_{A_i} = \sum_{a \in P^A} 1_a . \operatorname{Log}\left(\frac{\prod_i (\mu(A_i(a))^{\lambda_i})}{\mu(a)}\right)$$

où $A_i(a)$ désigne l'atome de la partition P^{A_i} qui contient a.

Lorsqu'un réel x est supérieur ou égal à 1, on peut majorer son logarithme par x, ce qui permet la majoration de la partie positive de la différence étudiée.

$$\mu(I_A - \Sigma\lambda_i I_{A_i})^+ \leqq \sum_{a \in P_+^A} 1_a . \frac{\prod_i (\mu(A_i(a))^{\lambda_i})}{\mu(a)}$$

où la somme est étendue au sous-ensemble P_+^A des atomes de P^A pour lesquels le logarithme est positif ou nul. On obtient alors, en intégrant et en ajoutant des termes positifs, la majoration

$$\mu((\mathrm{I}_{\mathrm{A}} - \Sigma\lambda_i . \mathrm{I}_{\mathrm{A}_i})^+) \leqq \sum_{a \in \mathrm{P}^{\mathrm{A}}} \prod_i (\mu(\mathrm{A}_i(a))^{\lambda_i})$$

où la somme porte sans restriction sur tous les atomes de P^{A}.

Il reste donc à établir, pour toute partie finie A de G et toute décomposition à coefficients positifs $1_{\mathrm{A}} = \Sigma\lambda_i 1_{\mathrm{A}_i}$, la majoration par 1 de l'expression

$$\sum_{a \in \mathrm{P}^{\mathrm{A}}} \prod_i (\mu(\mathrm{A}_i(a))^{\lambda_i})$$

ce que nous démontrons par récurrence sur le cardinal de la partie A.

Le résultat est clairement vrai lorsque A est réduit à un point. Nous distinguons alors un point g de A et notons B le complémentaire de $\{ g \}$ dans A. En regroupant les atomes de P^{A} contenus dans le même atome de P^{B}, la somme précédente s'écrit

$$\sum_{a \in \mathrm{P}^{\mathrm{A}}} \prod_i (\mu(\mathrm{A}_i(a))^{\lambda_i}) = \sum_{b \in \mathrm{P}^{\mathrm{B}}} \prod_{\mathrm{A}_i \mathrm{B}} (\mu(\mathrm{A}_i(b))^{\lambda_i}) . \left(\sum_{\mathrm{B}(a)=b} \prod_{j, g \in \mathrm{A}_j} (\mu(\mathrm{A}_j(a))^{\lambda_j}) \right)$$

La somme des coefficients λ_j des parties A_j contenant g est égale à 1 et l'on peut appliquer l'inégalité de Hölder pour majorer les crochets

$$\sum_{\mathrm{B}(a)=b} \prod_{j, g \in \mathrm{A}_j} (\mu(\mathrm{A}_j(a))^{\lambda_j}) \leqq \prod_{j, g \in \mathrm{A}_j} \left\{ \sum_{\mathrm{B}(a)=b} \mu(\mathrm{A}_j(a)) \right\}^{\lambda_j}$$

La réunion des $\mathrm{A}_j(a)$, où $\mathrm{B}(a) = b$, n'est rien d'autre que $\mathrm{B}_j(b)$, où B_j est la partie $\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_j$ de B.

On majore ainsi l'expression initiale $\displaystyle\sum_{a \in \mathrm{P}^{\mathrm{A}}} \prod_i (\mu(\mathrm{A}_i(a))^{\lambda_i})$ par

$$\sum_{b \in \mathrm{P}^{\mathrm{B}}} \prod_i (\mu(\mathrm{B}_i(b))^{\lambda_i})$$

où les $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}$ vérifient $1_{\mathrm{B}} = \Sigma\lambda_i 1_{\mathrm{B}_i}$.

La dernière expression est inférieure ou égale à 1, par hypothèse de récurrence, d'où le résultat annoncé.

III. THÉORÈME ERGODIQUE PRESQUE SOUS-ADDITIF

Rappelons d'abord, sans démonstration, quelques résultats sur le filtre moyennant d'un groupe moyennable ; on pourra trouver des développements de ce sujet par exemple dans (6).

a) Soit G un groupe et $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble de ses parties finies. Étant donnée une partie finie D de G, on désigne par m_D la fonction réelle sur $\mathcal{F}(G)$ définie par

$$m_D(A) = |\{ x \in A, \exists d \in D, dx \notin A \}|$$

On note $\mathcal{M}(D, \varepsilon)$ l'ensemble des parties finies non vides de G telles que $m_D(A)/|A|$ soit inférieur à ε.

Lorsque le groupe G est moyennable, et c'est là la substance du résultat de Følner, tous les ensembles $\mathcal{M}(D, \varepsilon)$ sont non vides ; ils constituent alors une base d'un filtre, que l'on appelle moyennant et que l'on note $\mathcal{M}$ dans la suite.

b) Pour une partie finie B de G, on désigne par Δ_B la fonction sur $\mathcal{F}(G)$ ainsi définie

$$\Delta_B(A) = |\{ g \in G, Bg \cap A \neq \emptyset \text{ et } Bg \subset A \}|$$

La limite selon le filtre moyennant du rapport $\Delta_B(A)/|A|$ est nulle.

c) Pour toute partie finie K de G, la limite selon le filtre moyennant du rapport $|KA|/|A|$ est égale à 1.

d) Si le groupe moyennable G est infini, le cardinal tend vers l'infini selon le filtre moyennant.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème ergodique presque sous-additif.

THÉORÈME 2. — *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, G)$ *un système dynamique où le groupe* G *de transformations bimesurables préservant la mesure est moyennable et infini. On considère une famille* $\{f_A\}$ *d'éléments de* $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ *indexée par les parties finies du groupe* G *vérifiant les trois hypothèses suivantes :*

i) *covariance : pour toute partie finie* A *de* G *et tout élément g du groupe, on a* $f_A \circ T_g = T_{Ag}$ *où* T_g *est la transformation correspondant à g.*

ii) *presque sous-additivité : il existe une constante* C, *positive ou nulle, telle que, pour toute décomposition à coefficients positifs de toute indicatrice de partie finie,* $1_A = \Sigma\lambda_i . 1_{A_i}$, *on ait*

$$\mu((f_A - \Sigma\lambda_i . f_{A_i})^+) \leq C$$

iii) *borne inférieure : la borne inférieure* K *sur toutes les parties finies non vides du rapport* $\mu(f_A)/|A|$ *est finie.*

Alors, la moyenne $f_A/|A|$ converge en norme selon le filtre moyennant ; la limite f est une fonction invariante sous l'action du groupe G et c'est la borne inférieure des espérances conditionnelles $|A|^{-1}.E(f_A|\mathscr{I})$ par rapport à la sous-tribu $\mathscr{I}$ des événements invariants.

Faisons une remarque avant de passer à la démonstration du théorème. Le résultat de convergence reste vrai (il devient même trivial) lorsque le groupe est fini, mais il est facile de construire des exemples où la limite n'est pas la borne inférieure des espérances conditionnelles.

Démonstration du théorème. a) Montrons d'abord que les moyennes deviennent asymptotiquement inférieures aux espérances conditionnelles ; de manière précise, si nous fixons une partie finie B, la partie positive de la différence $\Delta(A, B) = f_A/|A| - E(f_B|\mathscr{I})/|B|$ tend vers 0 en norme selon le filtre moyennant.

Considérons, en effet, la décomposition à coefficients positifs

$$1_A = |B|^{-1}. \sum_{Bg\cap A\neq O} 1_{Bg\cap A}$$

En appliquant l'inégalité de presque sous-additivité aux éléments correspondants de la famille, il vient

$$\mu\left(\left(f_A - |B|^{-1}. \sum_{Bg\cap A\neq O} f_{Bg\cap A}\right)^+\right) \leqq C$$

En séparant les éléments g tels que Bg soit contenu dans A et en utilisant la covariance de la famille, nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned}\mu((\Delta(A, B))^+) \leqq\ & C/|A| \\ & + \| E(f_B|\mathscr{I})/|B| - |A|^{-1}.|B|^{-1}. \sum_{Bg\subset A} f_B \circ T_g \|_1 \\ & + |A|^{-1}.|B|^{-1}. \sum_{Bg\cap A\neq O, Bg\not\subset A} \| f_{B\cap Ag^{-1}} \circ T_g \|_1\end{aligned}$$

Les trois termes du deuxième membre tendent vers 0 selon le filtre moyennant :

i) le rapport $C/|A|$ tend vers 0 puisque le groupe moyennable G est infini.

ii) le deuxième terme tend vers 0 selon $\mathscr{M}$: c'est l'application du théorème ergodique en moyenne à la fonction $f_B/|B|$.

iii) puisque les parties de B sont en nombre fini, et la mesure μ invariante, il existe une borne commune $\phi(B)$ aux normes $\| (f_{B \cap Ag^{-1}}) \circ T_g \|_1$ ce qui permet de majorer le troisième terme par

$$| B |^{-1} . | A |^{-1} . \phi(B) . \Delta_B(A)$$

d'où la nullité de la limite.

b) Puisque l'espace L_1 est complet, il suffit, pour établir la convergence selon $\mathscr{M}$ des fonctions $f_A/| A |$, de vérifier le critère de Cauchy.

Soit donc ε un réel positif et B une partie finie de G telle que $\mu(f_B/| B |)$ soit inférieur à $\varepsilon/6$.

En appliquant le résultat de l'étape *a*), on peut trouver une partie finie D et un réel positif δ tels que $\mu(\Delta(A, B)^+)$ soit inférieur à $\varepsilon/6$ dès que A appartient à $\mathscr{M}(D, \delta)$.

On a alors la majoration de l'intégrale de $E(f_B | \mathscr{I})/| B |$

$$\mu(E(f_B | \mathscr{I}))/| B | = \mu(f_B)/| B | < K + \varepsilon/6 \leqq \mu(f_A)/| A | + \varepsilon/6$$

D'où la minoration de l'intégrale de $\Delta(A, B)$

$$- \varepsilon/6 < \mu(\Delta(A, B)) = \mu(\Delta(A, B)^+) - \mu(\Delta(A, B)^-)$$

L'intégrale de la partie négative de $\Delta(A, B)$ est donc majorée par $\varepsilon/3$ et la norme L_1 de $\Delta(A, B)$ par $\varepsilon/2$.

Donc, lorsque les deux parties finies A_1 et A_2 appartiennent à $\mathscr{M}(D, \delta)$, on a

$$\| f_{A_1}/| A_1 | - f_{A_2}/| A_2 | \|_1 < \varepsilon$$

et le critère de Cauchy est ainsi vérifié.

c) De l'invariance à droite des $\mathscr{M}(D, \delta)$, on déduit immédiatement que la limite f est une fonction invariante.

En passant à la limite, il résulte de l'étape *a*) que f est inférieure ou égale à toutes les espérances conditionnelles $E(f_A | \mathscr{I})/| A |$.

L'espérance conditionnelle est un opérateur contractant de L_1 ; f est donc la limite selon le filtre $\mathscr{M}$ et la borne inférieure sur l'ensemble de toutes les parties finies non vides des $E(f_A | \mathscr{I})/| A |$.

IV. CONVERGENCE EN MOYENNE DE L'INFORMATION CONDITIONNELLE

Dans l'espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$, on appelle information conditionnelle de la partition P par rapport à la sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$, la fonction mesurable positive définie par

$$1(P | \mathscr{B}) = \sum_{a \in P} 1_a . (- \text{Log } E(1_a | \mathscr{B}))$$

où $E(1_a \mid \mathscr{B})$ désigne l'espérance conditionnelle de la fonction intégrable 1_a par rapport à la sous-tribu $\mathscr{B}$ (la notation de la probabilité μ est sous-entendue).

Si l'entropie de la partition P est finie, l'information conditionnelle de P par rapport à n'importe quelle sous-tribu de $\mathscr{A}$ est intégrable car son intégrale est majorée par l'entropie de P.

Nous considérons maintenant l'action d'un groupe moyennable G sur l'espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$ par des transformations bimesurables préservant μ et nous fixons une partition d'entropie finie P.

On appelle information conditionnelle relative à la partie finie A et on note $\tilde{I}_A$ la fonction positive intégrable $\tilde{I}_A = I(P^A \mid P^{A^c})$, où P^A est la borne supérieure des partitions $T_g^{-1}(P)$, où g décrit la partie A et P^{A^c} est la tribu engendrée par les images réciproques $T_g^{-1}(P)$, où g décrit la partie complémentaire de A dans G.

Nous montrons dans cette quatrième partie la convergence en norme L_1 selon le filtre moyennant de la moyenne $|A|^{-1} . \tilde{I}_A$.

Nous établissons pour cela une condition de presque sur-additivité sur la famille de fonctions $\tilde{I}_A$, condition plus faible que la symétrique de la condition de presque sous-additivité *ii*), du théorème ergodique.

PROPOSITION 1. — *La famille* $(\tilde{I}_A)$ *vérifie la condition de presque sur-additivité suivante : pour toute décomposition à coefficients positifs de toute indicatrice* $1_A = \Sigma\lambda_i . 1_{A_i}$, *la partie négative de la différence* $\tilde{I}_A - \lambda_i . \tilde{I}_{A_i}$ *a une intégrale majorée par la somme des coefficients de la décomposition.*

Démonstration. — Si R et S sont deux partitions d'entropie finie et $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$, on vérifie simplement la formule d'accroissement

$$I(P \mid \mathscr{B} \vee Q) = I(P \vee Q \mid \mathscr{B}) - I(Q \mid \mathscr{B})$$

En appliquant cette formule à $\tilde{I}_{A_i}$, on obtient

$$\tilde{I}_{A_i} = I(P^A \mid P^{A^c}) - I(P^{A-A_i} \mid P^{A^c})$$

Il vient alors

$$\tilde{I}_A - \Sigma\lambda_i . \tilde{I}_{A_i} = -(\Sigma\lambda_i - 1) . \{ I(P^A \mid P^{A^c}) - \Sigma\alpha_i . I(P^{A-A_i} \mid P^{A^c}) \}$$

où α_i est le quotient de λ_i par le nombre $(\Sigma\lambda_i - 1)$ qui est strictement positif, à moins que la décomposition de 1_A ne soit triviale, auquel cas le résultat est immédiat.

On remarque que $\Sigma\alpha_i . 1_{A-A_i}$ est une décomposition à coefficients positifs de 1_A et que le théorème 1 demeure vrai lorsque l'on conditionne par rapport à une même sous-tribu (ici P^{A^c}).

D'où le résultat annoncé

$$\mu((\tilde{\mathrm{I}}_{\mathrm{A}} - \Sigma\lambda_i . \tilde{\mathrm{I}}_{\mathrm{A}_i})^-) \leqslant \Sigma\lambda_i - 1 \leqslant \Sigma\lambda_i$$

Nous appelons *ii'*) cette condition de sous-additivité en permettant une constante C en facteur devant la somme des coefficients.

La famille $(-\tilde{\mathrm{I}}_{\mathrm{A}})$ d'éléments de $\mathrm{L}_1^-(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ vérifie les hypothèses *i*) et *iii*) du théorème 2 mais la condition de presque sous-additivité *ii'*) est plus faible que la condition *ii*) du théorème. Ces conditions sont néanmoins suffisantes pour établir la convergence en moyenne selon le filtre moyennant. Ceci fait l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 3 (*théorème ergodique presque sous-additif* bis). — *Soit* (f_{A}) *une famille indexée par les parties finies de* G *d'éléments de* $\mathrm{L}_1(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *satisfaisant les conditions de covariance i*) *et de borne inférieure iii*) *du théorème* 2 *ainsi que la condition de presque sous-additivité ii'*) *citée plus haut. Alors* $|\mathrm{A}|^{-1} . f_{\mathrm{A}}$ *converge en norme* L_1 *selon le filtre moyennant vers un élément invariant.*

Démonstration. — Ce résultat étant essentiellement un raffinement du théorème ergodique presque sous-additif, nous nous contenterons d'un schéma de démonstration indiquant les modifications que doivent subir les divers arguments.

a) La limite supérieure selon $\mathscr{M}$ de $\mu((|\mathrm{A}|^{-1} . f_{\mathrm{A}} - |\mathrm{B}|^{-1} . \mathrm{E}(f_{\mathrm{B}} | \mathscr{I})^+)$ est inférieure ou égale à $\mathrm{C} . |\mathrm{B}|^{-1}$ au lieu d'être nulle.

Le $\mathrm{C} . |\mathrm{A}|^{-1}$ de la majoration doit en effet être remplacé par $\mathrm{C} . |\mathrm{A}|^{-1} . |\mathrm{B}|^{-1} . |\{ g, \mathrm{B}g \cap \mathrm{A} \neq \varnothing \}|$ dont la limite est $\mathrm{C} . |\mathrm{B}|^{-1}$.

b) On choisit B telle que $\mu(|\mathrm{B}|^{-1} . f_{\mathrm{B}})$ soit inférieur à $\mathrm{K} + \varepsilon/10$ et $\mathrm{C}/|\mathrm{B}|$ inférieur à $\varepsilon/10$.

Le théorème ergodique en moyenne permet de trouver (D, δ) tel que si A appartient à (D, δ), on ait

$$\mu((|\mathrm{A}|^{-1} . f_{\mathrm{A}} - |\mathrm{B}|^{-1} . \mathrm{E}(f_{\mathrm{B}} | \mathscr{I}))^+) < 2\varepsilon/10$$

La mesure de la partie négative de la différence précédente est alors majorée par $3\varepsilon/10$ et donc sa valeur absolue par $5\varepsilon/10$.

On vérifie ainsi le critère de Cauchy.

c) La limite f est invariante mais on ne peut plus affirmer, comme dans le théorème 2, qu'elle soit la borne inférieure des espérances conditionnelles des moyennes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Ackoglu et U. Krengel, Ergodic theorems for superadditive processes. *A paraître.*
[2] Y. Derriennic et U. Krengel, Subadditive mean ergodic theorems. *A paraître.*
[3] J. Fritz, Generalization of McMillan's theorem to random set functions. *Studia Sci. Math. Hung.*, t. **5**, 1970, p. 369-394.
[4] Y. Katznelson et B. Weiss, Commuting measure-preserving transformations. *Israel Jour. Math.*, t. **12**, 1972, p. 161-173.
[5] J. C. Kieffer, A generalized Shannon-McMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space. *The Annals of Probability*, t. **3**, 1975, p. 1031-1037.
[6] J. Moulin-Ollagnier et D. Pinchon, Filtre moyennant et valeur moyenne des capacités invariantes. *Bull. S. M. F.*, 1982.
[7] Nguyen Xuan Xahn, Ergodic theorems for spatial processes. *Zeit. für Wahr.*, t. **48**, 1979, p. 133-158.
[8] J. P. Thouvenot, Convergence en moyenne de l'information pour l'action de Z^2. *Zeit. für Wahr.*, t. **24**, 1972, p. 135-137.

(Manuscrit reçu le 1er juillet 1982)