MARKUS DOZZI

Propriétés markoviennes de processus sur R2

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 2 (1983), p. 209-221
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_2_209_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIX, n° 2, 1983, p. 209-221. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Propriétés markoviennes de processus sur R^2

par

Markus DOZZI
Département de Statistique mathématique, Université de Berne,
Sidlerstr. 5, 3012 Berne, Suisse

RÉSUMÉ. — Nous considérons des propriétés markoviennes pour des processus $(X_z\,;\ z \in \mathbb{R}^2$ (ou $z \in \mathbb{Z}^2$)), l'intérêt portant sur des analogies à deux indices de la propriété locale de Markov suivante : $(Y_t\,;\ t_0 < t < t_1)$ est conditionnellement indépendant de $(Y_t\,;\ t < t_0$ ou $t > t_1)$ donné (Y_{t_0}, Y_{t_1}) pour un processus $(Y_t\,;\ t \in \mathbb{R})$. En particulier, nous caractérisons les processus X gaussiens stationnaires qui satisfont à une certaine propriété locale de Markov.

SUMMARY. — Markov properties of stochastic processes $(X_z\,;\ z \in \mathbb{R}^2$ (or $z \in \mathbb{Z}^2$)) are considered. Emphasis is on two-parameter analogies of the following local Markov property : $(Y_t\,;\ t_0 < t < t_1)$ is conditionally independent of $(Y_t\,;\ t < t_0$ or $t > t_1)$ given (Y_{t_0}, Y_{t_1}) for processes $(Y_t\,;\ t \in \mathbb{R})$. In particular, the stationary Gaussian processes X, satisfying a local Markov property, are characterized.

1. INTRODUCTION

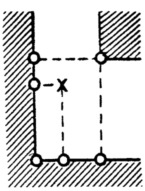
Soit $(X_t\,;\ t \in \mathbb{R})$ un processus de Markov. Alors, pour $t_0 \in \mathbb{R}$, le « passé » $(X_t\,;\ t < t_0)$ est conditionnellement indépendant du « futur » $(X_t\,;\ t > t_0)$ donné X_{t_0}. Plusieurs auteurs ont cependant étudié des processus $(X_t\,;\ t \in \mathbb{R})$ qui satisfont à la propriété suivante :

(1.1) Pour chaque couple $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $t_0 < t_1$, $(X_t\,;\ t_0 < t < t_1)$

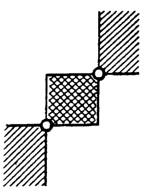
est conditionnellement indépendant de $(X_t\,;\,t < t_0$ ou $t > t_1)$ donné (X_{t_0}, X_{t_1}).

Cette propriété est appelée réciproque dans [7], quasi-markovienne dans [2] et localement markovienne dans [3] et [4]. La propriété de Markov implique (1.1) (l'inverse est faux en général), et les processus gaussiens stationnaires qui satisfont à (1.1) sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ sont caractérisés dans [2] et [7]. Dans [2] aussi le cas discret $(X_t\,;\,t \in \mathbb{Z})$ est considéré. Une condition suffisante pour qu'un processus localement markovien soit markovien est donnée dans [3].

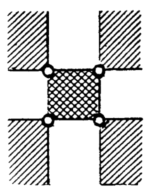
Pour les processus à paramètre deux dimensionnels $(X_z\,;\,z \in \mathbb{R}^2)$ quelques analogies de la propriété (locale) de Markov ont déjà été étudiées. Parmi d'autres, [1] [6] [8] [9] et [11] sont des références pour des résultats récents dans ce domaine. Ici, notre intention est de considérer les propriétés locales de Markov résumées par les schémas ci-dessous, où les aires hachurées et les points x (ou les aires hachurées différemment) sont indépendants conditionnellement aux points O. La propriété (2.2) est comparable à celle de harnais [5] en ce qui concerne la forme géométrique du « passé » et du « futur ». Nous mettons ces propriétés en relation avec celles étudiées dans [8] et [11] (Proposition 2.1) et démontrons certaines équivalences lorsque de plus X est gaussien (Proposition 3.5). Les résultats de [2] et [7] sur les processus gaussiens stationnaires sur $\mathbb{R}$ permettent de caractériser un type analogue de processus sur $\mathbb{R}^2$ satisfaisant à (3.6) (Proposition 3.6). De même, en appliquant les méthodes de démonstration de [3] aux processus sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{Z}^2$), on obtient une condition suffisante pour qu'un processus qui satisfait à (3.8) soit $*$-markovien (Définition 2.1, Proposition 4.1).



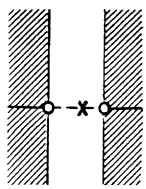
(2.2)



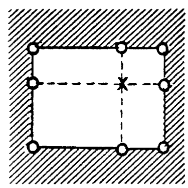
(3.3.a)



(3.6)



(3.7.a)



(3.8)

Notation. — Pour deux points $z=(s,t)$ et $z'=(s',t')$ de $\mathbb{R}^2$ nous écrivons $z \leq z'$ (resp. $z < z'$) si $s \leq s'$ et $t \leq t'$ (resp. $s < s'$ et $t < t'$). L'intervalle $(s,s'] \times (t,t']$ sera noté $(z,z']$. Soit $(\Omega, \mathbf{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité. Les résultats qui suivent sont souvent valables pour des processus sur $\mathbb{R}^2$ et pour des processus sur $\mathbb{Z}^2$. Pour cette raison nous dénotons les processus par $(X_z\,;\,z \in I)$, où I est un intervalle (éventuellement non borné) de $\mathbb{R}^2$ ou son intersection avec $\mathbb{Z}^2$. Soit $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_z =: \sigma(X_\zeta\,;\ \zeta \leq z,\ \zeta \in I))$ et $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_z := \sigma(X_\zeta\,;\ z \leq \zeta,\ \zeta \in I))$ la famille croissante et la famille décroissante de tribus engendrées par X. Si $\inf I := z_0 > -\infty$ nous définissons $\mathbf{F}_z$ pour $z \notin [z_0, \infty)$ comme la tribu engendrée par les éléments de $\mathbf{F}_{z_0}$ de probabilité zéro ou un. Soit $\mathbf{F}_s^1 = \bigvee_t \mathbf{F}_{st}$, $\mathbf{F}_t^2 = \bigvee_s \mathbf{F}_{st}$ et $\mathbf{F}_z^* = \mathbf{F}_s^1 \vee \mathbf{F}_t^2$. Nous dénotons par $\mathbf{F}^1$ (resp. $\mathbf{F}^2$) la famille $(\mathbf{F}_s^1)$ (resp. $(\mathbf{F}_t^2)$).

2. UNE PREMIÈRE PROPRIÉTÉ LOCALE DE MARKOV

Les propriétés markoviennes suivantes sont étudiées dans [*8*] et [*11*].

DÉFINITION 2.1. — *i*) X est *horizontalement markovien* (resp. *verticalement markovien*) *sur* $I = I_1 \times I_2$ si quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $t_1, \ldots, t_n \in I_2$ (resp. $(s_1, \ldots, s_n) \in I_1$), le processus $(X_{st_1}, \ldots, X_{st_n})_{s \in I_1}$ (resp. le processus $(X_{s_1t}, \ldots, X_{s_nt})_{t \in I_2}$) est markovien sur I_1 (resp. I_2) par rapport à $\mathbf{F}^1$ (resp. $\mathbf{F}^2$).

ii) X est $*$-*markovien sur* I si quels que soient $z, z' \in I$ avec $z < z'$ et f, fonction mesurable et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$(2.1)\qquad E[f(X_{z'}) \mid \mathbf{F}_z^*] = E[f(X_{z'}) \mid X_{st'}, X_z, X_{s't}].$$

Dans [*8*] il est démontré que *i*) implique *ii*). Une propriété locale de Markov qui correspond à *ii*) est la suivante :

DÉFINITION 2.2. — X est *localement* $*$-*markovien sur* I, si quels que soient $z, z', z'' \in I$ tel que $z < z''$ et $z' \in (z, z'']$ et quel que soit f, fonction mesurable et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$(2.2)\quad E[f(X_{z'}) \mid \mathbf{F}_z^* \vee \mathbf{G}_{z''}] = E[f(X_{z'}) \mid X_{st''}, X_{st'}, X_z, X_{s't}, X_{s''t}, X_{z''}].$$

Reprenant la méthode qui a été appliquée dans [*8*] à la propriété $*$-markovienne, on démontre que (2.2) est équivalent au suivant :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z, z'', z^1, \ldots, z^n \in I$ tel que $z < z''$ et $z^i \in (z, z'']$ $(i = 1, \ldots, n)$ et pour toute fonction mesurable et bornée f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

$$(2.3)\quad \begin{aligned} &E[f(X_{z^1}, \ldots, X_{z^n}) \mid \mathbf{F}_z^* \vee \mathbf{G}_{z''}] \\ &= E[f(X_{z^1}, \ldots, X_{z^n}) \mid X_{st''}, X_z, X_{s''t}, X_{z''}, X_{st^i}, X_{s^it} \quad (i = 1, \ldots, n)]. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.1. — *Si* X *est horizontalement et verticalement markovien sur* I, X *est localement* $*$-*markovien sur* I.

Preuve. — Nous écrivons la preuve pour X défini sur (un intervalle de) $\mathbb{R}^2$:

pour X défini sur $\mathbb{Z}^2$ il suffit de remplacer $(z, z']$ par $(z, z'] \cap \mathbb{Z}^2$. Par la propriété de Markov horizontale nous avons

$$\mathbf{F}^1_{s''} \underset{\sigma(X_{s''\tau};\tau \geq t'') \vee \sigma(X_{s''\tau};\tau \leq t)}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_\zeta ; \zeta \in [s'', \infty) \times (-\infty, t]) \vee \mathbf{G}_{z''} . \tag{2.4}$$

Nous remplaçons le membre à gauche de (2.4) par $\sigma_1 \vee \sigma(X_{z'})$, où

$$\sigma_1 = \sigma(X_\zeta ; \zeta \in (-\infty, s] \times [t, \infty) \cup (-\infty, s''] \times (-\infty, t] \cup \{s''\} \times [t'', \infty)).$$

Appliquons maintenant le fait que si $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont des sous-tribus de $\mathbf{F}$ tel que $\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{B}_2 \underset{\mathbf{C}}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{D}$, alors $\mathbf{B}_1 \underset{\mathbf{C} \vee \mathbf{B}_2}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{D} \vee \mathbf{B}_2$; nous obtenons donc $\sigma(X_{z'}) \underset{\sigma_1}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{F}^*_z \vee \mathbf{G}_{z''}$. Donc

$$E[f(X_{z'}) \mid \mathbf{F}^*_z \vee \mathbf{G}_{z''}] = E[f(X_{z'}) \mid \sigma_1]. \tag{2.5}$$

Par la propriété de Markov horizontale nous avons

$$\mathbf{F}^2_{t''} \underset{\sigma(X_{\sigma t''};\sigma \leq s) \vee \sigma(X_{z''})}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_\zeta ; \zeta \in (-\infty, s] \times [t'', \infty)) \vee \sigma(X_{s''\tau} ; \tau \geq t'').$$

Par les mêmes arguments que ci-dessus nous obtenons $\sigma(X_{z'}) \underset{\sigma_2}{\perp\!\!\!\perp} \sigma_1$, où

$$\sigma_2 = \sigma(X_\zeta ; \zeta \in (-\infty, s] \times [t, t''] \cup (-\infty, s''] \times (-\infty, t]) \vee \sigma(X_{z''}).$$

Donc

$$E[f(X_{z'}) \mid \sigma_1] = E[f(X_{z'}) \mid \sigma_2]. \tag{2.6}$$

A nouveau par la propriété de Markov verticale

$$\sigma(X_{z''}, X_{z'}) \vee \sigma(X_\zeta ; \zeta \in (-\infty, s] \times [t, t'']) \underset{\sigma(X_{\sigma t};\sigma \leq s) \vee \sigma(X_{s't}, X_{s''t})}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{F}^2_t .$$

Ceci implique $\sigma(X_{z'}) \underset{\sigma_3}{\perp\!\!\!\perp} \sigma_2$, où

$$\sigma_3 = \sigma(X_\zeta ; \zeta \in (-\infty, s] \times [t, t'']) \vee \sigma(X_{z''}, X_{s't}, X_{s''t}).$$

Donc

$$E[f(X_{z'}) \mid \sigma_2] = E[f(X_{z'}) \mid \sigma_3]. \tag{2.7}$$

Par la propriété de Markov horizontale

$$\sigma(X_{z'}, X_{z''}, X_{s't}, X_{s''t}) \underset{\sigma(X_z, X_{st'}, X_{st''})}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_\zeta ; \zeta \in (-\infty, s] \times [t, t''])$$

et nous avons $\sigma(X_{z'}) \underset{\sigma_4}{\perp\!\!\!\perp} \sigma_3$ avec $\sigma_4 = \sigma(X_{st''}, X_{st'}, X_z, X_{s't}, X_{s''t}, X_{z''})$. Ceci, conjointement avec (2.5)-(2.7), démontre la proposition. □

Considérons maintenant quelques exemples et contre-exemples pour ces propriétés markoviennes.

a) $(\overline{X}_z\,;\,z\in\mathbb{R}_+^2)$ donné par $\overline{X}_z=\int_{(0,z]}\exp\left(-a(s-\sigma)-b(t-\tau)\right)dW_{\sigma\tau}$ où a, $b>0$ sont des constantes et où $(W_{\sigma\tau}\,;\,(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}_+^2)$ est le processus de Wiener. $\overline{X}$ satisfait aux propriétés 2.1 et 2.2. De façon plus générale, soit $(\overline{Y}_z\,;\,z\in\mathbb{R}_+^2)$ défini par $\overline{Y}_z=f(z)\int_{(0,z]}g(\zeta)dW_\zeta$ où f et g sont des fonctions (non aléatoires), $f(z)\neq 0$ pour tous $z\in\mathbb{R}_+^2$ et g tel que l'intégrale stochastique existe. Alors Y satisfait aux propriétés de la définition 2.1 et 2.2 [*11*].

b)
$$(X_z\,;\,z\in\mathbb{R}_+^2)$$
avec
$$X_z=\overline{X}_z-\exp(-as-bt)X_0^1+\exp(-as)X_{0t}^2+\exp(-bt)X_{s0}^3,$$
où $\overline{X}$, X_0^1, X^2, X^3 sont indépendants et gaussiens centrés
$$(EX_0^1=EX_{s0}^2=EX_{0t}^3=0\quad\text{pour}\quad s,t\geq 0)$$
et tel que
$$E(X_0^1)^2=(4ab)^{-1},$$
$$EX_{0t}^2X_{0t'}^2=(2b)^{-1}\exp(-b\,|\,t-t'\,|),$$
$$EX_{s0}^3X_{s'0}^3=(2a)^{-1}\exp(-a\,|\,s-s'\,|).$$

X est stationnaire et de covariance
$$EX_{st}X_{s't'}=(4ab)^{-1}\exp(-a\,|\,s-s'\,|-b\,|\,t-t'\,|),$$
et
$$X_z=\int_{(-\infty,z]}\exp(-a(s-\sigma)-b(t-\tau))d\widetilde{W}_{\sigma\tau},$$

où $\widetilde{W}$ est un brownien. X a les mêmes propriétés markoviennes que $\overline{X}$ en *a*).

c) Un autre exemple est $(X_z\,;\,z\in\mathbb{Z}^2)$ donné par

$$X_z=Y_1\cos a\pi s\cos b\pi t+Y_2\cos a\pi s\sin b\pi t+Y_3\sin a\pi s\cos b\pi t+Y_4\sin a\pi s\sin b\pi t \tag{2.8}$$

où les Y_i $(i=1,2,3,4)$ sont indépendants et gaussiens centrés tels que $EY_i^2=1$. X est stationnaire de covariance
$$EX_zX_{z'}=\cos a\pi(s-s')\cos b\pi(t-t').$$

Si a et b sont choisis irrationnels, X est localement $*$-markovien, mais pas $*$-markovien. En effet, X est déterminé par ses valeurs aux quatre points (s, t), (s', t), (s, t') et (s', t'). Le déterminant de la matrice formé par les seconds membres de (2.8) pour ces quatre points est égal à

$$- \sin^2 a\pi(s - s') \sin^2 b\pi(t - t').$$

3. UNE SECONDE PROPRIÉTÉ LOCALE DE MARKOV

Nous considérons maintenant les propriétés suivantes de $(X_z ; z \in I)$:

a) Pour tous $z \in I$ $\mathbf{F}_z \underset{\sigma(X_z)}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{G}_z$; *b*) Pour tous $z \in I$ $\mathbf{H}_z \underset{\sigma(X_z)}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{K}_z$,

(3.0)

où
$$\mathbf{H}_z = \sigma(X_\zeta ; \zeta \in (-\infty, s] \times [t, \infty) \cap I),$$
$$\mathbf{K}_z = \sigma(X_\zeta ; \zeta \in [s, \infty) \times (-\infty, t] \cap I).$$

Voici comment ces propriétés s'écrivent en termes d'espérances conditionnelles : (3.0.*a*), par exemple, équivaut à

(3.0.*a'*) Pour tous $z \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $z^1, \ldots, z^n \in I$ tel que $z < z^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ et f, fonction mesurable et bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

$$E[f(X_{z^1}, \ldots, X_{z^n}) \mid \mathbf{F}_z] = E[f(X_{z^1}, \ldots, X_{z^n}) \mid X_z].$$

LEMME 3.1. — *Si* X *est horizontalement et verticalement markovien,* X *satisfait aux propriétés* (3.0).

Preuve. — Par la propriété horizontale de Markov

$$(3.1) \quad E[f(X_{z^1}, \ldots, X_{z^n}) \mid \mathbf{F}_z^1] = E[f(X_{z^1}, \ldots, X_{z^n}) \mid X_{st^1}, \ldots, X_{st^n}].$$

Le second membre de (3.1) est une fonction mesurable et bornée de $(X_{st^1}, \ldots, X_{st^n})$ que nous dénotons par h. Par la propriété verticale de Markov

$$(3.2) \qquad E[h(X_{st^1}, \ldots, X_{st^n}) \mid \mathbf{F}_z^2] = E[h(X_{st^1}, \ldots, X_{st^n}) \mid X_z].$$

En conditionnant par rapport à $\mathbf{F}_z$ dans (3.1) et (3.2) on obtient (3.0.*a'*). La preuve de (3.0.*b*) est pareille et donc omise ici. □

Remarques. — *i*) Dans le cas gaussien l'implication inverse dans le lemme 3.1 est également vraie. Car, pour démontrer la propriété horizontale de Markov pour ce cas, il suffit de vérifier $\sigma(X_{s't}) \underset{\sigma(X_z)}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{F}_s^1$ pour tous couples z, $(s', t) \in \mathrm{I}$ tel que $s < s'$. Mais ceci résulte de (3.0). De façon analogue on démontre que (3.0) implique la propriété verticale de Markov.

ii) L'exemple suivant montre que la propriété $*$-markovienne n'implique pas (3.0) :

d) Soient $(\mathrm{X}_s^1 ; s \in \mathrm{I}_1)$ et $(\mathrm{X}_t^2 ; t \in \mathrm{I}_2)$ des processus stochastiques indépendants sur $(\Omega, \mathbf{A}, \mathrm{P})$. Si pour tous $(s, t) \in \mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2$ $\mathrm{X}_s^1 \mathrm{X}_t^2 \neq 0$ P-p. s., le processus $(\mathrm{X}_z := \mathrm{X}_s^1 \mathrm{X}_t^2 ; z = (s, t) \in \mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2)$ est $*$-markovien, mais ne satisfait pas, en général, à (3.0).

iii) Les exemples *a*) et *b*) du paragraphe 2 satisfont à (3.0) pour $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^2$, et la proposition suivante caractérise le processus de Ornstein-Uhlenbeck dans la classe des processus gaussiens stationnaires sur $\mathbb{R}_+^2$ qui satisfont à (3.0.*a*).

PROPOSITION 3.2. — *Soit* $(\mathrm{X}_z ; z \in \mathbb{R}_+^2)$ *un processus gaussien centré de covariance* $\mathrm{EX}_z\mathrm{X}_{z'} = f(|s - s'|, |t - t'|)$, *où f est continue, et soit* $\mathrm{EX}_0^2 = 1$. *Si* X *satisfait à* (3.0.*a*) *sur* $\mathbb{R}_+^2$, *alors*

$$\mathrm{EX}_z\mathrm{X}_{z'} = \exp(-a|s - s'| - b|t - t'|) \qquad [a, b > 0].$$

Preuve. — Par (3.0.*a*) nous avons pour $\sigma, \sigma', \tau, \tau' \geq 0$

$$\begin{aligned}
\log f(\sigma + \sigma', \tau + \tau') &= \log f(\sigma + \sigma', 0) + \log f(0, \tau + \tau'), \\
\log f(\sigma + \sigma', 0) &= \log f(\sigma, 0) + \log f(\sigma', 0), \\
\log f(0, \tau + \tau') &= \log f(0, \tau) + \log f(0, \tau').
\end{aligned}$$

Puisque $\log f \leq 0$, il existe $a, b \geq 0$ tel que $f(\sigma, 0) = -a\sigma$ et $f(0, \tau) = -b\tau$. Donc $f(\sigma, \tau) = -a\sigma - b\tau$. □

Nous considérons maintenant des propriétés locales de Markov qui correspondent à (3.0).

DÉFINITION 3.1. — X est *localement markovien sur* I, si pour tous $z, z' \in \mathrm{I}$ tel que $z \leq z'$ et $z \neq z'$

$$(3.3.a) \qquad \mathbf{F}_z \vee \mathbf{G}_{z'} \underset{\sigma(\mathrm{X}_z, \mathrm{X}_{z'})}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(\mathrm{X}_\zeta ; \zeta \in [z, z'] \cap \mathrm{I}).$$

Nous considérons aussi la propriété

(3.3.*b*) Pour tous $z, z' \in \mathrm{I}$ tel que $s \leq s'$, $t' \leq t$ et $z \neq z'$

$$\mathbf{H}_z \vee \mathbf{K}_{z'} \underset{\sigma(\mathrm{X}_z, \mathrm{X}_{z'})}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(\mathrm{X}_\zeta : \zeta \in [(s, t'), (s', t)] \cap \mathrm{I}).$$

LEMME 3.3. — (3.0.*a*) *implique* (3.3.*a*) *et* (3.0.*b*) *implique* (3.3.*b*).

Preuve. — Puisque la méthode est la même pour les deux implications, nous ne démontrons ici que la première. Il faut montrer que

$$(3.4)\quad E[f(X^1)g(X^2)h(X^3) \mid X_z, X_{z'}] = E[f(X^1)h(X^3) \mid X_z, X_{z'}]E[g(X^2) \mid X_z, X_{z'}]$$

où X^1 (resp. X^2 ; X^3) sont des vecteurs aléatoires avec composantes X_ζ ; $\zeta \leq z$ (resp. $z \leq \zeta \leq z'$; $z' \leq \zeta$) et où f, g et h sont des fonctions mesurables et bornées. Le premier membre de (3.4) est égal à

$$\begin{aligned} E[f(X^1)g(X^2)E[h(X^3) \mid X_z, X_{z'}, X^1, X^2] \mid X_z, X_{z'}] &= E[h(X^3) \mid X_z, X_{z'}]E[g(X^2)E[f(X^1) \mid X_z, X_{z'}, X^2] \mid X_z, X_{z'}] \\ &= E[h(X^3) \mid X_z, X_{z'}]E[f(X^1) \mid X_z, X_{z'}]E[g(X^2) \mid X_z, X_{z'}] \\ &= E[f(X^1)h(X^3) \mid X_z, X_{z'}]E[g(X^2) \mid X_z, X_{z'}] \end{aligned}$$

où nous avons appliqué (3.0.a). □

L'exemple suivant montre que, même dans le cas gaussien, les implications inverses du lemme 3.3 ne sont pas vraies en général : Soit $(X_z ; z \in \mathbb{Z}^2)$ donné par

$$(3.5)\qquad X_z = Y_1 \cos a\pi s \cos b\pi t + Y_2 \sin a\pi s \sin b\pi t$$

où Y_1 et Y_2 sont indépendants, gaussiens centrés et tels que $EY_i^2 = 1$ $(i = 1, 2)$ et où a et b sont irrationnels.

D'autres exemples de processus localement markoviens sont donnés par d) ci-dessus, si on choisit X^1 et X^2 localement markovien (à un indice, (1.1)). Si, en plus, X^1 et X^2 ne sont pas markoviens, $X = X^1X^2$ est un autre exemple qui montre que les implications inverses du lemme 3.3 ne sont pas vraies.

Considérons maintenant la propriété de Markov locale pour les processus gaussiens centrés.

PROPOSITION 3.4. — *Soit $(X_z ; z \in I)$ un processus gaussien centré qui satisfait à* (3.3). *Alors pour tous z, $z' \in I$ tel que $z \leq z'$ et $z \neq z'$*

$$(3.6)\qquad \mathbf{F}_z \vee \mathbf{G}_{z'} \vee \mathbf{H}_{st'} \vee \mathbf{K}_{s't} \underset{\sigma(X_z, X_{z'}, X_{st'}, X_{s't})}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_\zeta ; \zeta \in [z, z'] \cap I).$$

Preuve. — (3.6) résulte immédiatement de (3.3.a) et (3.3.b) et du résultat suivant [*1*] : soient H_1, H_2, H, K des sous-espaces fermés d'un espace gaussien et soient $\mathbf{B}(H_1)$, $\mathbf{B}(H_2)$, $\mathbf{B}(H)$ et $\mathbf{B}(K)$ les tribus associées ; alors $\mathbf{B}(H_i) \underset{\mathbf{B}(K)}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{B}(H)$ $(i = 1, 2)$ implique $\mathbf{B}(H_1 \vee H_2) \underset{\mathbf{B}(K)}{\perp\!\!\!\perp} \mathbf{B}(H)$. □

Remarques. — *i*) Le processus gaussien centré (X_z ; $z \in [0, 1]^2$) de covariance $EX_zX_{z'} = (1 - |s - s'|)(1 - |t - t'|)$ satisfait à (3.6), mais ne satisfait à (3.3) que si $s = s'$ ou $t = t'$. Donc (3.6) n'implique pas la propriété markovienne locale. En plus, X n'est pas localement $*$-markovien. Ceci, conjointement avec l'exemple *d*), montre que (3.6) et la propriété $*$-markovienne locale (2.2) sont logiquement indépendants.

ii) Un exemple d'un processus non gaussien satisfaisant à (3.6) et de même covariance que le processus dans *i*) ci-dessus est donné par *d*) si on choisit $(X_s^1 ; s \in [0, 1])$ (resp. $(X_t^2 ; t \in [0, 1])$) gaussien centré de covariance $EX_s^1X_{s'}^1 = 1 - |s - s'|$ (resp. $EX_t^2X_{t'}^2 = 1 - |t - t'|$).

iii) Soit $I = I_1 \times I_2$. Pour $s \in I_1$ soit $\mathbf{G}_s^1 = \vee \{ \mathbf{G}_{st} ; t \in I_2 \}$ et, pour $t \in I_2$, soit $\mathbf{G}_t^2 = \vee \{ \mathbf{G}_{st} ; s \in I_1 \}$. Alors (3.6) implique en particulier

a) pour tous s, s', $s'' \in I_1$ tel que

$$(3.7.a) \qquad s < s' < s'' \quad \mathbf{F}_s^1 \vee \mathbf{G}_{s''}^1 \underset{\sigma(X_{st}, X_{s''t})}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_{s't}) \quad (t \in I_2) ;$$

b) pour tous t, t', $t'' \in I_2$ tel que

$$(3.7.b) \qquad t < t' < t'' \quad \mathbf{F}_t^2 \vee \mathbf{G}_{t''}^2 \underset{\sigma(X_{st}, X_{st''})}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_{st'}) \quad (s \in I_1) .$$

PROPOSITION 3.5. — *Soit* (X_z ; $z \in I$) *un processus gaussien centré. Alors* (3.6) *et* (3.7) *sont équivalents et impliquent pour tous* z, z', $z'' \in I$ *tel que* $z < z' < z''$

$$(3.8) \qquad \sigma(X_{z'}) \underset{\mathbf{C}}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_\zeta ; \zeta \in [z, z'']^c \cap I)$$

où $\quad \mathbf{C} = \sigma(X_\zeta ; \zeta \in (H_{z'} \cup V_{z'}) \cap \partial [z, z'']) \vee \sigma(X_z, X_{s''t}, X_{st''}, X_{z''})$

et H_z (*resp.* V_z) *est l'horizontale* (*resp. la verticale*) *qui passe par* z.

Preuve. — (3.7) $\Rightarrow$ (3.6) : Soit $z, z', z'' \in I$ tel que $z < z' < z''$. Par (3.7.*a*) on a

$$(3.9) \qquad E[f(X_{z'}) \mid \mathbf{F}_s^1 \vee \mathbf{G}_{s''}^1] = E[f(X_{z'}) \mid X_{st'}, X_{s''t'}] .$$

Dénotons le second membre de (3.9) par $g(X_{st'}, X_{s''t})$. Alors, par (3.7.*b*)

$$(3.10) \quad E[g(X_{st'}, X_{s''t'}) \mid \mathbf{F}_t^2 \vee \mathbf{G}_{t''}^2] = E[g(X_{st'}, X_{s''t'}) \mid X_z, X_{z''}, X_{st''}, X_{s''t}] .$$

(3.6) résulte alors de (3.9) et (3.10).

(3.7) $\Rightarrow$ (3.8) : Par (3.7.*a*) on a $\mathbf{F}_s^1 \vee \mathbf{G}_{s''}^1 \underset{\mathbf{C}^1}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_{s't}, X_{z'}, X_{s't''})$

où $\qquad \mathbf{C}^1 = \sigma(X_z, X_{s''t}, X_{st'}, X_{s''t'}, X_{st''}, X_{z''}) .$

Donc

$$\mathbf{F}_s^1 \vee \mathbf{G}_{s''}^1 \vee \sigma(X_{s't}, X_{s't''}) \underset{\mathbf{C}}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_{z'}) .$$

De façon analogue on obtient $\mathbf{F}_t^2 \vee \mathbf{G}_{t''}^2 \vee \sigma(X_{st'}, X_{s''t'}) \underset{\mathbf{C}}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_{z'})$. □

Remarques. — *i)* (3.8) est équivalent à l'énoncé suivant : pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z, z'', z^1, \ldots, z^n \in \mathrm{I}$ tel que $z < z''$ et $z^i \in [z, z'']$ $(i = 1, \ldots, n)$

$$(3.11) \qquad \sigma(X_{z^i} : i = 1, \ldots, n) \underset{\mathbf{C}^{(n)}}{\perp\!\!\!\perp} \sigma(X_\zeta ; \zeta \in [z, z'']^c \cap \mathrm{I})$$

où

$$\mathbf{C}^{(n)} = \sigma\left(X_\zeta ; \zeta \in \bigcup_1^n (H_{z^i} \cup V_{z^i}) \cap \partial [z, z''] \right) \vee \sigma(X_z, X_{s''t}, X_{st''}, X_{z^n}) .$$

Notons que la démonstration de cette équivalence se fait par la méthode appliquée pour démontrer (2.3) et ne dépend pas du caractère gaussien de X.

ii) Les résultats de [*6*] affirment que les processus $(Y_z ; z \in \mathbb{R}^2)$ donnés par $Y_z = \int_{(-\infty,z]} k(\sigma)h(\tau)dW_{\sigma\tau}$, où k et h sont des fonctions déterministes, satisfont à (3.8) (propriété nommée markovienne de type fini). L'espérance conditionnelle $E[Y_{z'} \mid \mathbf{C}]$ est calculée explicitement.

Nous donnons encore une caractérisation des processus stationnaires gaussiens centrés qui satisfont à (3.6). Dans [*2*], la classe correspondante de processus $(X_u ; u \in \mathbb{R})$ à paramètre réel, de covariance continue et quasi-markovienne sur un intervalle $[0, u_0]$ est déterminée. Les covariances $R(u)$ ont une des trois formes suivantes :

$$(3.12) \qquad R(u) = A \exp(-au) + (1 - A) \exp(au),$$

où

$$a \geq 0, A > \frac{1}{2}$$

et

$$u_0 \leq \begin{cases} \dfrac{1}{a} \log \dfrac{A}{A-1} & \text{si } A \geq 1, \\ \dfrac{1}{a} \log \dfrac{A}{1-A} & \text{si } 1 > A > \dfrac{1}{2} ; \end{cases}$$

$$(3.13) \qquad R(u) = \cos au + B \sin au,$$

où

$$a \geq 0, B \leq 0 \quad \text{et} \quad u_0 \leq \frac{2}{a} \operatorname{arc\,cotg}(-B) ;$$

$$(3.14) \qquad R(u) = 1 - au, \text{ où } a \geq 0 \text{ et } u_0 \leq 2/a .$$

La caractérisation suivante est un corollaire du théorème 2 de [*2*] :

PROPOSITION 3.6. — *Soit* $(X_z\,;\, z \in \mathbb{R}^2)$ *un processus gaussien centré de covariance* $EX_zX_{z'} = R_1(|s - s'|)R_2(|t - t'|)$, *où* R_1 *et* R_2 *sont des covariances continues et telles que* $R_1(0) = R_2(0) = 1$. *Alors* X *satisfait à* (3.6) *sur* $[0, (s_0, t_0)]$ *si et seulement si*

$$(R_1(s)\,;\, 0 \leq s \leq s_0) \qquad \textit{et} \qquad (R_2(t)\,;\, 0 \leq t \leq t_0)$$

sont de la forme (3.12), (3.13) *où* (3.14).

Preuve. — Supposons que X satisfait à (3.6) sur $I = [0, z_0]$ où $z_0 = (s_0, t_0)$. Alors, pour $t \in [0, t_0]$, $EX_{st}X_{s't} = R_1(|s - s'|)$, et par le théorème 2 de [*2*], R_1 est de la forme (3.12)-(3.14). Par symétrie, aussi R_2 est de cette forme. Inversement les fonctions (3.12)-(3.14) sont des covariances qui satisfont à (3.7) (où z_0 est donné par les conditions sur u_0). Par la proposition 3.5 X satisfait à (3.6).

4. UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UN PROCESSUS SOIT $*$-MARKOVIEN

Nous nous sommes intéressés à une condition suffisante pour qu'un processus qui satisfait à (3.8) soit $*$-markovien. Soit $(\Omega, \mathbf{A}) = (\mathbb{R}, \mathbf{B})^{I}$, $I = \mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{R}^2$. Remarquons que X n'est pas supposé gaussien dans la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* $(X_z\,;\, z \in I)$, $I = \mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{Z}^2$, *un processus qui satisfait à* (3.8) *sur* I *et tel que*

i) pour chaque couple $z^1, z^2 \in I$ *tel que* $z^1 < z^2$ *il existe* $z, z' \in I$ *tel que* $z < z^1$ *et* $z^2 < z'$ *et des mesures σ-finies* ν_J *sur* $(\mathbb{R}, \mathbf{B})^J$ *où*

$$J = \cup \{ (H_{z^i} \cup V_{z^i}) \cap \hat{c}\,[z, z'] \,;\, i = 1, 2 \} \cup \{ z, (s', t), (s, t'), z' \}$$

et $\nu_{J'}$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathbf{B})^{J'}$ *où* $J' = \{ z^1, (s^1, t^2), (s^2, t^1) \}$ *tel que* $P_{J \cup J'} = \nu_J \otimes \nu_{J'}$;

ii) $\cap \{ \sigma(X_\zeta\,;\, \zeta \in [z^1, \infty) \div [z^1, z' + (n, n)]) \,;\, n \in \mathbb{N} \}$ *est trivial pour* P. *Alors* X *est* $*$*-markovien sur* I.

Preuve. — La méthode s'inspire de [*3*]. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit

$$S^{(n)} = \{ (s^1, t' + k), (s^2, t' + k), z' + (k, k), (s' + k, t^1), (s' + k, t^2) \,;\, k \geq n, k \in \mathbb{N} \}$$

et soit

$$S = J \cup J' \cup S^{(0)}.$$

a) Démontrons d'abord que *i*) implique $P_S \ll \nu_{J'} \otimes P_{S \div J'}$. Soit $(X, \mathbf{X}) = (\mathbb{R}, \mathbf{B})^{J'}$, $(Y, \mathbf{Y}) = (\mathbb{R}, \mathbf{B})^{J}$ et $(Z, \mathbf{Z}) = (\mathbb{R}, \mathbf{B})^{S \div (J \cup J')}$. Par [*10*, p. 183] l'existence des probabilités de transition

$$P((x_\zeta\,;\,\zeta \in J), A) \quad (A \in \mathbf{X}) \text{ sur } Y \times \mathbf{X}$$

et

$$P((x_\zeta\,;\,\zeta \in S \div J'), A) \quad \text{sur } Y \times Z \times \mathbf{X}$$

est assurée et on a

$$P_{J \cup J'} = \int_{\cdot} P((x_\zeta\,;\,\zeta \in J), \cdot)\, dP_J(x_\zeta\,;\,\zeta \in J) \tag{4.1}$$

et

$$P_S = \int_{\cdot} P((x_\zeta\,;\,\zeta \in S \div J'), \cdot)\, dP_{S \div J'}(x_\zeta\,;\,\zeta \in S \div J') . \tag{4.2}$$

A cause de (3.11)

$$P((x_\zeta\,;\,\zeta \in S \div J'), \cdot) = P((x_\zeta\,;\,\zeta \in J), \cdot) \tag{4.3}$$

pour $P_{S \div J'}$ — presque tous $(x_\zeta\,;\,\zeta \in J)$. L'hypothèse *i*) et (4.1) impliquent $P((x_\zeta\,;\,\zeta \in J), \cdot) \ll \nu_{J'}$ pour P_J — presque tous $(x_\zeta\,;\,\zeta \in J)$. Donc, par (4.3), $P((x_\zeta\,;\,\zeta \in S \div J'), \cdot) \ll \nu_{J'}$ pour $P_{S \div J'}$ — presque tous $(x_\zeta\,;\,\zeta \in S \div J')$. Ceci, conjointement avec (4.2), implique que $P_S \ll \nu_{J'} \otimes P_{S \div J'}$.

b) Montrons maintenant que

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sigma(X_\zeta\,;\,\zeta \in J' \cup S^{(n)}) = \sigma(X_\zeta\,;\,\zeta \in J') \quad P_S\text{-p. s.} \tag{4.4}$$

Comme $(\mathbb{R}, \mathbf{B})^{J'}$ et $(\mathbb{R}, \mathbf{B})^{S \div J'}$ sont indépendants par rapport à $\nu_{J'} \otimes P_{S \div J'}$, il résulte de l'hypothèse *ii*) que (4.4) a lieu $\nu_{J'} \otimes P_{S \div J'}$-p. s., et aussi P_S-p. s., puisque $P_S \ll \nu_{J'} \otimes P_{S \div J'}$.

c) Quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et f, fonction mesurable et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous avons par hypothèse

$$\begin{aligned} &E\,[f(X_{z^2}) \mid \sigma(X_\zeta\,;\,\zeta \in [z^1, z' + (n, n)]^c)] \\ &\qquad = E\,[f(X_{z^2}) \mid \sigma(X_\zeta\,;\,\zeta \in J' \cup S^{(n)})] . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Par (4.4) et un théorème de convergence de martingales, le second membre de (4.5) tend vers $E\,[f(X_{z^2}) \mid \sigma(X_\zeta\,;\,\zeta \in J')]$ (P-p. s.). En conditionnant par rapport à $\mathbf{F}^*_{z^1}$ on obtient

$$E\left[f(X_{z^2}) \mid \mathbf{F}^*_{z^1}\right] = E\,[f(X_{z^2}) \mid \sigma(X_\zeta\,;\,\zeta \in J')] \quad \text{P-p. s.}$$

X est donc $*$-markovien sur I. □

RÉFÉRENCES

[1] E. CARNAL, *Processus markoviens à plusieurs paramètres*. Thèse, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (1979).

[2] S. C. CHAY, On quasi-Markov random fields. *J. Mult. Anal.*, t. **2**, 1972, p. 14-76.

[3] N. DANG-NGOC, G. ROYER, Markov property of extremal local fields. *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **70**, 1978, p. 185-188.

[4] N. DANG-NGOC, M. YOR, Champs markoviens et mesures de Gibbs sur R. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. **11**, 1978, p. 29-69.

[5] M. DOZZI, Two-parameter harnesses and the Wiener process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **56**, 1981, p. 507-514.

[6] X. GUYON, B. PRUM, Propriétés markoviennes des martingales fortes gaussiennes sur $\mathbf{R}^2$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **288**, 1979, p. 221-224.

[7] B. JAMISON, Reciprocal Processes: The stationary case. *Ann. Math. Stat.*, t. **41**, 1970, p. 1624-1630.

[8] H. KOREZLIOGLU, P. LEFORT, G. MAZZIOTTO, Une propriété markovienne et diffusions associées. In Processus Aléatoires à Deux Indices, *Lecture Notes in Mathematics*, t. **863**. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1981.

[9] H. KUENSCH, Gaussian Markov random fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math.*, t. **26**, 1979, p. 53-73.

[10] J. NEVEU, *Base mathématique du calcul des probabilités*, Masson et Cie, Paris, 1970.

[11] D. NUALART, M. SANZ, A Markov property for two parameter gaussian processes. *Stochastica*, t. **3**, 1979, p. 1-15.

(Manuscrit reçu le 4 mai 1982).