ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. NEVEU

Courte démonstration du théorème ergodique sur-additif

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 1 (1983), p. 87-90
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_1_87_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIX, n° 1, 1983, p. 87-90.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Courte démonstration du théorème ergodique sur-additif

par

J. NEVEU

Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05
Laboratoire Associé C.N.R.S., n° 224

RÉSUMÉ. — Cette note donne la n[ieme] démonstration du théorème ergodique sur-additif de J. Kingman. Il s'agit d'une démonstration fort courte et d'ailleurs très proche de la démonstration de F. Riesz du théorème de Birkhoff.

SUMMARY. — The n[th] proof of Kingman's super-additive theorem of ergodic theory, very short and close to F. Riesz's proof of Birkhoff's theorem.

Il s'agit de démontrer le résultat suivant que nous nous contenterons d'énoncer dans le cas ergodique, le cas général ne nécessitant que le remplacement dans ce qui suit de l'espérance par l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu des invariants.

THÉORÈME. — *Étant donné une transformation mesurable θ de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ qui préserve* P *et est ergodique, pour toute suite $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$ sur-additive au sens où $f_m + f_n \,.\, \theta^m \leq f_{m+n} (m, n \in \mathbb{N}^*)$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n = \gamma \text{ p. p.}$$

si
$$\gamma = \sup_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \int f_n \leq +\infty.$$

Commençons par un lemme, dû pour l'essentiel à F. Riesz.

LEMME. — *Quels que soient les* $n(n \geq 1)$ *réels* $u_1, \ldots, u_n$
$$\sum_0^{n-1} u_{j+1} 1_{\{v_j > 0\}} \geq 0$$
si $v_j = \max(0, u_{j+1}, u_{j+1} + u_{j+2}, \ldots, u_{j+1} + \ldots + u_n)$ *pour* $j \in [0, n[$.

En effet si l'on convient que $v_n = 0$, les v_j vérifient l'équation de récurrence $v_j = (v_{j+1} + u_{j+1})^+$ $(0 \leq j < n)$ et par conséquent
$$v_j \leq v_{j+1} + u_{j+1} 1_{\{v_j > 0\}} \qquad (0 \leq j < n).$$

En sommant ces deux membres, on voit que la somme du lemme est minorée par v_0 et donc positive.

L'étape essentielle de la démonstration consiste alors à établir l'inégalité maximale.

Inégalité maximale. — Pour toute transformation mesurable θ *préservant la mesure de* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *et pour toute suite positive et sur-additive* $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$ *dans* L^1, *on a*
$$\int_{\{v>0\}} g d\mathrm{P} \leq \sup_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \int f_n d\mathrm{P},$$
si $v = \sup_{\mathbb{N}} \left(f_n - \sum_0^{n-1} g\theta^j \right)$, *quelle que soit la fonction positive* $g \in \mathrm{L}^1$ (par convention $f_n = 0 = \sum_0^{n-1} g\theta^j$ pour $n = 0$).

En effet pour toute suite $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$ dans L^1 et tout $g \in \mathrm{L}^1$ le lemme de Riesz appliqué à la suite $(u_j = f_j - f_{j-1} - g\theta^{j-1}, j \in \mathrm{N}^*)$ arrêtée à n et prise en un point quelconque de Ω, montre que
$$\sum_0^{n-1} (f_{j+1} - f_j - g\theta^j) 1_{\{v_j^n > 0\}} \geq 0 \qquad (n \in \mathrm{N}^*)$$
à condition de poser $v_j^n = \max_{l \in [j,n]} \left(f_l - f_j - \sum_j^{l-1} g\theta^i \right)$ pour $0 \leq j < n$.

Si la suite $(f_n, n \in \mathrm{N})$ est croissante, il s'en suit *a fortiori* que

$$f_n \geq \sum_{0}^{n-1} g\theta^j 1_{\{v_j^n > 0\}}.$$

Si la suite $(f_n, n \in \mathrm{N}^*)$ est positive et sur-additive, elle est croissante et de plus comme $f_l - f_j \geq f_{l-j} \circ \theta^j$ si $l \geq j$, on a $v_j^n \geq v_0^{n-j} \circ \theta^j$ de sorte que

$$f_n \geq \sum_{0}^{n-1} [g 1_{\{v_0^{n-j} > 0\}}] \circ \theta^j.$$

En intégrant les deux membres, il vient

$$\int f_n d\mathrm{P} \geq \sum_{1}^{n} \int g 1_{\{v_0^k > 0\}} d\mathrm{P}$$

et comme les ensembles $\{ v_0^k > 0 \}$ croissent vers l'ensemble $\{ v > 0 \}$ de l'inégalité maximale lorsque $k \uparrow \infty$, celle-ci se trouve démontrée.

Sous l'hypothèse d'ergodicité de θ, toute suite positive et sur-additive $(f_n, n \in \mathrm{N}^*)$ dans L^1 vérifie l'inégalité.

$$(*) \qquad \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} f_n \leq \gamma \qquad \text{où} \qquad \gamma = \sup_{\mathrm{N}^*} \frac{1}{n} \int f_n d\mathrm{P},$$

grâce à l'inégalité maximale. En effet la fonction $\bar{f} = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} f_n$ est p. s. constante car $\bar{f} \geq \bar{f} \circ \theta$ par la sur-additivité des f_n ; or pour toute fonction constante g strictement inférieure à $\bar{f}$, la fonction v de l'inégalité maximale est strictement positive p. s. et par conséquent $g \leq \gamma$. A la limite $\bar{f} \leq \gamma$ p. s.

Pour démontrer le théorème de Kingman dans le cas d'une suite positive et sur-additive, il reste à établir que

$$(**) \qquad \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} f_n \geq \gamma \text{ p. s.}$$

Or si la suite est additive, c'est-à-dire si $f_n = \sum_{0}^{n-1} f\theta^j$ pour un $f \in \mathrm{L}_+^1$, en minorant f par $f \wedge a = a - (a - f)^+$ et en appliquant l'inégalité $(*)$ ci-dessus à $(a - f)^+$, il vient

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f \circ \theta^j \geq a - \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} (a - f)^+ \circ \theta^j$$
$$\geq \int (a - f)^+ d\mathrm{P} = \int f \wedge a d\mathrm{P}$$

En faisant tendre $a \uparrow \infty$, on obtient $(**)$ dans le cas additif. Ensuite dans le cas général, on remarque que

$$\sum_{j=0}^{n-1} f_k \circ \theta^j \leq \sum_{j=0}^{n-1} (f_{k+j} - f_j) \leq k f_{n+k-1} \qquad (k, n \in \mathrm{N}^*)$$

ce qui entraîne que pour tout $k \in \mathrm{N}^*$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n \geq \frac{1}{k} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f_k \circ \theta^j \geq \frac{1}{k} \int f_k d\mathrm{P}.$$

L'inégalité $(**)$ est ainsi établie.

Enfin le cas d'une suite sur-additive de signe quelconque se réduit au cas positif en utilisant les inégalités $f_n \geq \sum_0^{n-1} f_1 \circ \theta^j$ $(n \in \mathrm{N}^*)$.

BIBLIOGRAPHIE

M. A. Ackoglu-U. Krengel, *Ergodic theorems for superadditive Processes*. A paraître.

Y. Derriennic, Sur le théorème ergodique sous-additif. *CRAS*, t. **281**, Série A, 1975, p. 985-988.

J. F. Kingman, The ergodic theory of subadditive stochastic process. *J. Royal Stat. Soc.* **B 30**, 1968, p. 499-510.

(Manuscrit reçu le 1 février 1982)