ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TOUATI

Théorèmes de limite centrale fonctionnels pour les processus de Markov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 1 (1983), p. 43-55
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_1_43_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIX, n° 1, 1983, p. 43-55.

Section **B** :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorèmes de limite centrale fonctionnels pour les processus de Markov

par

A. TOUATI

École Normale Supérieure, Bizerte (Tunisie)

RÉSUMÉ. — Notre but est de généraliser les résultats de [*8*] sur les chaînes de Markov récurrentes Harris positives. Soit $X=\{\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (P_x)_{x\in E}; (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\}$ un processus de Markov récurrent Harris positif à valeurs dans un espace L. C. D. E. Soit μ sa probabilité invariante et A son générateur infinitésimal sur $L^2(\mu)$. On démontre que pour toute fonction f appartenant à l'image R_A de A la convergence en loi des suites de processus

$$A_n^{x,f} = \left\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x ; \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{tn} f(X_s)ds\right)_{t\in\mathbb{R}_+}\right\}$$

et

$$A_n^{\mu,f} = \left\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu ; \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{tn} f(X_s)ds\right)_{t\in\mathbb{R}_+}\right\}$$

vers une martingale gaussienne continue, centrée, de processus croissant associé $A(t)=C(f)t$ où $C(f)=-2\int(Ag)gd\mu=-2\int fgd\mu$; g étant un élément du domaine de A tel que $Ag=f$. On établit que R_A est dense dans $L_0^2(\mu)$ sous-espace de $L^2(\mu)$ des fonctions d'intégrale nulle et que ces deux sous-espaces coïncident quand le noyau R_1 de la résolvante de X vérifie la condition de Doeblin. On donne enfin deux cadres où $C(f)>0$.

SUMMARY. — Our aim is to extend the results of [*8*] on Harris positive recurrent chains to positive recurrent Markov processes. Let

$$X=\{\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}; (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\}$$

denote a positive Markov process with invariant probability measure μ. We show for f beloging to the range R_A of the strong infinitesimal generator A of X on $L^2(\mu)$, the convergence in law of the sequences of processes

$$A_n^{x,f} = \left\{ \Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_x ; \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{tn} f(X_s)ds \right)_{t \in \mathbb{R}_+} \right\}$$

and

$$A_n^{\mu,f} = \left\{ \Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\mu ; \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{tn} f(X_s)ds \right)_{t \in \mathbb{R}_+} \right\}$$

to gaussian centred martingales with variance processes of the form $A(t) = C(f)t$ $C(f)$ is a constant defined by $C(f) = -2\int (Ag)gd\mu = -2\int fgd\mu$, where g is any element of the domain of A such that $f = Ag$. The space R_A is shown to be dense in $L_0^2(\mu) = \left\{ f \in L^2(\mu) ; \int f d\mu = 0 \right\}$. And if the kernel R_1 of the resolvent of X satisfies Doeblin condition we prove that $R_A = L_0^2(\mu)$. The strict positivity of $C(f)$ is proved in two situations.

I. INTRODUCTION. NOTATIONS

Soit $X = \{ \Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} ; (\mathbb{P}_x)_{x \in E}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \}$ un processus de Markov droit à valeurs dans un espace localement compact à base dénombrable E, $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ désignant sa filtration naturelle convenablement complétée et rendue continue à droite; on note $(R_p)_{p>0}$ et $(P_t)_{t \geqslant 0}$ la résolvante et le semi-groupe correspondants.

Nous supposerons dans toute la suite que la chaîne de Markov de probabilité de transition R_1 est irréductible récurrente positive. Cela équivaut à dire d'après [*1*] et [*5*] qu'il existe une probabilité μ invariante par R_1 (donc par P_t pour tout $t \geqslant 0$) telle que pour tout borélien Γ de E chargé par μ on ait :

$$\mathbb{P}_{\cdot}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\Gamma}(X_t)dt = +\infty \right] = 1$$

(récurrence au sens de Harris, positive de X).

Cette hypothèse entraîne que les opérateurs P_t et pR_p sont de norme inférieure ou égale à 1 dans l'espace $L^2(\mu)$ des fonctions de carré intégrable sur E. A partir du théorème ergodique fort [*17*] il est facile d'établir que pour toute fonction φ continue à support compact dans E $pR_p\varphi \to \varphi$ simplement lorsque p tend vers $+\infty$, en restant dominé dans $L^2(\mu)$. Donc $pR_p\varphi \to \varphi$ dans $L^2(\mu)$, l'image de la résolvante $\mathcal{D} = \{ R_p\varphi \,;\ \varphi \in L^2(\mu) \}$ — indépendante de p par l'équation résolvante — est dense et le semi-groupe est fortement continu.

Si $R_p\varphi = 0$ pour $\varphi \in L^2(\mu)$ et $p > 0$, alors l'équation résolvante entraîne que $R_q\varphi = 0$ pour tout $q > 0$; donc $\varphi = \lim_q qR_q\varphi = 0$. Ainsi pour tout $p > 0$, R_p est une bijection de $L^2(\mu)$ sur $\mathcal{D}$.

Le générateur infinitésimal fort A du semi-groupe (P_t) est bien défini : son domaine $D_A = \mathcal{D}$ et on a

$$(g \in D_A \text{ et } Ag = f) \Leftrightarrow (g \in L^2(\mu),\ f \in L^2(\mu)$$

et $$R_p(pg - f) = g \quad \mu\text{.p. s. pour tout } p > 0)\,.$$

Autrement dit $R_p = (pI - A)^{-1}$ sur $L^2(\mu)$ pour tout $p > 0$.

Cette définition du générateur fort est équivalente à la définition classique par la dérivation à l'origine. Elle entraîne que les opérateurs $I - R_1$ et A ont le même espace image, soit R_A. Puisque μ est invariante par R_1, on voit que $R_A \subset L_0^2(\mu) = \left\{ \varphi \in L^2(\mu) : \int \varphi d\mu = 0 \right\}$.

Si $\overline{R_A}$ est la fermeture de R_A dans $L^2(\mu)$, d'après un théorème ergodique abélien (voir par exemple [*17*], p. 215-218) on a :

$$\overline{R_A} = \{ \varphi \in L^2(\mu) : \lim_{p \downarrow 0} \| pR_p\varphi \|_2 = 0 \}\,.$$

Mais d'après le théorème ergodique fort, le dernier ensemble coïncide avec $L_0^2(\mu)$. Donc l'espace R_A est dense dans $L_0^2(\mu)$.

Dans le cas où R_1 vérifie en plus la condition de Doeblin ce qui équivaut à dire d'après [*15*] que l'opérateur R_1 est quasi compact, l'image de l'opérateur $I - R_1$ est fermée dans $L^2(\mu)$ [*17*] et donc $R_A = L_0^2(\mu)$. Ce dernier résultat est une généralisation du théorème 3-10, page 178 de [*15*] sur les chaînes Harris.

Remarques.

1) Dans [*8*], N-Maigret a démontré que si R_1 vérifie la condition de Doeblin « la » solution de Numelin l de l'équation de Poisson associée à $f \in L_0^2(\mu)$:

$$(I - R_1)l = f\mu ps$$

appartient à $L^2(\mu)$. Ce qui est une autre manière de voir que $R_A = L_0^2(\mu)$.

2) Les opérateurs $I - R_1$ et A ont le même espace nul, qui est l'espace des constantes de $L^2(\mu)$ engendré par la fonction égale à 1μ — p. s. sur E.

Dans le paragraphe suivant, on construit une famille de martingales localement de carré intégrable dont on se sert pour établir les théorèmes fonctionnels annoncés.

II. UNE FAMILLE DE MARTINGALES FONDAMENTALES

On sait que pour toute fonction universellement mesurable bornée g sur E, la fonction $h = R_p g$ appartient au domaine du générateur infinitésimal faible L du processus X et on a $Lh = ph - g$. D'où les martingales $\mathbb{F}$, adaptées suivantes :

$$(1) \qquad K_t^{p,g} = E\left[\int_0^{+\infty} e^{-ps} g(X_s) ds \mid \mathscr{F}_t\right] = e^{-pt} h(X_t) + \int_0^t e^{-ps} g(X_s) ds$$

$$(2) \qquad C_t^h = \int_0^t e^{ps} dK_s^{p,g} = h(X_t) - h(X_0) - \int_0^t Lh(X_s) ds$$

Les martingales $K^{p,g}$ sont de carré intégrable et les martingales C^h sont localement de carré intégrable par rapport à $\mathbb{P}_\nu$ pour toute loi initiale ν.

On étend les formules (1) et (2) aux fonctions de $L^2(\mu)$ grâce à un résultat de [9] améliorant la formule classique de l'énergie qui permet d'établir que :

$$E_\mu\left(\int_0^\infty e^{-ps} \varphi(X_s) ds\right)^2 \leqslant \frac{1}{p^2} \| \varphi \|_2^2$$

pour toute fonction φ de $L^2(\mu)$.

Il en résulte que le processus $M_t^{p,\varphi} = e^{-pt} R_p \varphi(X_t) + \int_0^t e^{-ps} \varphi(X_s) ds$ qui vaut $E\left[\int_0^{+\infty} e^{-ps} \varphi(X_s) ds \mid \mathscr{F}_t\right]$ est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_\nu)$ martingale de carré intégrable pour toute loi initiale ν de densité bornée par rapport à μ et une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_x)$ martingale de carré intégrable pour μ-presque tout x. Soit $M_t^\varphi = \int_0^t e^{ps} dM_s^{p,\varphi}$. Par intégration par parties on vérifie que :

$$M_t^\varphi = R_p \varphi(X_t) - R_p \varphi(X_0) + \int_0^t (\varphi - pR_p \varphi)(X_s) ds.$$

D'après ce qui précède pour tout $f \in R_A$, il existe $l \in L^2(\mu)$, telle que $(I - R_1) l = f$ μ, ps et donc le processus :

$$(3) \qquad M_t^f = R_1 l(X_t) - R_1 l(X_0) + \int_0^t f(X_s) ds$$

est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_\nu)$ martingale localement de carré intégrable pour toute loi initiale ν de densité bornée par rapport à μ et une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_x)$ martingale localement de carré intégrable pour μ-presque tout x. Le processus M^f jouit en plus des propriétés suivantes [*10*] :

— M^f est une fonctionnelle additive.

— On peut choisir une version du processus croissant $\langle M^f \rangle$ qui soit une fonctionnelle additive.

Une conséquence immédiate de la deuxième propriété est que le processus

$$e^{-2pt}(R_1 l(X_t))^2 + 2\int_0^t e^{-2ps}[R_1 l(pR_1 l + f)](X_s)ds - \int_0^t e^{-2ps} d\langle M^f \rangle s$$

est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_\nu)$ martingale pour toute loi initiale ν de densité bornée par rapport à μ et une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_x)$ martingale pour μ-presque tout x. En effet, le $2p$-potentiel de la fonctionnelle additive

$$A_t = 2\int_0^t [R_1 l(pR_1 l + f)](X_s)ds - \langle M^f \rangle_t$$

vaut $(R_1 l(.))^2$ (cf. [*9*]) d'où le résultat. En faisant tendre p vers 0 on obtient que le processus

$$M_t^{l,f} = (R_1 l(X_t))^2 + 2\int_0^t [(R_1 l) f](X_s)ds - \langle M^f \rangle_t \tag{4}$$

est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_\nu)$ martingale pour toute loi initiale ν de densité bornée par rapport à μ et une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_x)$ martingale pour μ-presque tout x.

Remarquons que si f et l sont bornées alors M^f et $M^{l,f}$ sont des $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_\nu)$ martingales pour toute loi initiale ν.

III. LES THÉORÈMES DE CONVERGENCE

III.1 **Théorèmes de limite centrale fonctionnels.**

Rappelons le résultat suivant dû à Rebolledo [*14*] $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ étant un espace de probabilité muni d'une filtration discrète $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ complète pour $\mathbb{Q}$. Soit $M = \{ M(m) ; m \in \mathbb{N} \}$ une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$ martingale telle que $M(0) = 0$ et $E(M(m)^2) < +\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On pose $\xi_m = M(m) - M(m-1)$ pour $m \geqslant 1$. Si les hypothèses suivantes sont vérifiées.

(*i*) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $t > 0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathrm{E}\{\xi_k^2 \mathbb{1}_{|\xi_k| > \sqrt{n}\varepsilon} \mid \mathscr{G}_{k-1}\} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{Q}} 0$$

($[nt]$ désigne la partie entière de nt).

(*ii*) Il existe une application $\mathrm{A} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante continue telle que $\mathrm{A}(0) = 0$ et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{n}\langle \mathrm{M} \rangle ([nt]) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{Q}} \mathrm{A}(t).$$

Alors la suite de processus $(\mathrm{M}_n : n \in \mathbb{N})$, où $\mathrm{M}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{M}([nt])$ converge en loi vers une martingale gaussienne continue, centrée, de processus croissant associé A.

Précisons que par convergence en loi d'une suite $(\mathrm{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus continus à droite limités à gauche (càd-làg) vers un processus Z càd-làg, on entend la convergence étroite des lois des processus (Z_n) vers la loi du processus Z au sens de la topologie de Skorokhod sur l'ensemble $\mathscr{D}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions càd-làg de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On écrit en abrégé $\mathrm{Z}_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \mathrm{Z}$.

Nous allons appliquer le théorème de Rebolledo pour $\mathbb{G} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f \in \mathrm{R}_\mathrm{A}$ et pour $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_\nu$ (où ν est une loi initiale telle que M soit une $(\mathbb{G}, \mathbb{P}_\nu)$ martingale de carré intégrale). D'où la suite de martingales

$$\mathrm{M}_n^\nu = \left\{ \Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\nu ; \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{M}^f([nt])\right)_{t\in\mathbb{R}_+} \right\}$$

qui sont manifestement adaptées aux tribus $\mathscr{F}_{[nt]}$.

Étude des martingales M_n^ν.

- Soient $\varepsilon > 0$ et $t > 0$. Pour tout réel $a > 0$, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{[nt]}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathrm{E}_\nu\{\xi_k^2 \mathbb{1}_{|\xi_k| > \sqrt{n}\varepsilon} \mid \mathscr{F}_k\} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[nt]}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathrm{E}_\nu\{\xi_k^2 \mathbb{1}_{|\xi_k| > \varepsilon a} \mid \mathscr{F}_k\}$$

Comme le processus X est récurrent, le membre de droite de cette inégalité tend vers $\mathrm{E}_\mu\{\xi_1^2 \mathbb{1}_{|\xi_1| > \varepsilon a}\}$ $\mathbb{P}_\nu$-presque sûrement. Or $\mathrm{E}_\mu(\xi_1^2)$ est fini, donc par le théorème de convergence dominée on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{[nt]}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathrm{E}_\nu\{\xi_k^2 \mathbb{1}_{|\xi_k| > \varepsilon\sqrt{n}} \mid \mathscr{F}_k\} \leqslant \lim_{a\to\infty} \mathrm{E}_\mu\{\xi_1^2 \mathbb{1}_{|\xi_1| > \varepsilon a}\} = 0 \ \mathbb{P}_\nu \text{ p. s.}$$

D'où $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \mathrm{E}_\nu\{\xi_k^2 \mathbb{1}_{|\xi_k| > \varepsilon\sqrt{n}}\} = 0 \ \mathbb{P}_\nu \text{ p. s.}$$

•• On a aussi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{[nt]} \langle M^\nu \rangle ([nt]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[nt]} \sum_{k=1}^{[nt]} E_\nu(\xi_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1})$$
$$= E_\mu(\xi_1^2) = E_\mu(\langle M^\nu \rangle (1))\mathbb{P}_\nu \text{ p. s.}$$

Or de la formule (4) on tire que

$$\text{(5)} \qquad E_\mu(\langle M^\nu \rangle (1)) = 2\int (R_1 l) f d\mu = -2\int (Ag) g d\mu$$

si $f = Ag$ et si l est une solution de l'équation de Poisson associée à f. Il est clair que les intégrales égales ci-dessus ne dépendent que de f et sont positives ou nulles on les notera $C(f)$ dans la suite. Ainsi, donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \langle M^\nu \rangle ([nt]) = C(f)t \qquad \mathbb{P}_\nu\text{-presque sûrement.}$$

D'où la

PROPOSITION 1. — Avec les notations précédentes

(*i*) $$M_n^\mu \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)}W.$$

(*ii*) Si on note M_n^x au lieu de $M_n^{\delta_x}$ (δ_x mesure de Dirac en x) on a

$$M_n^x \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)}W \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

(*iii*) $M_n^\nu \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)}W$ pour toute loi initiale ν ayant une densité bornée par rapport à μ et pour toute loi initiale ν si f et l sont bornées, où W est le mouvement brownien standard sur R.

Les théorèmes fonctionnels annoncés s'obtiennent en remarquant que :

$$\left| M^f([tn]) - \int_0^{tn} f(X_s)ds \right| \leqslant | R_1 l(X_{[tn]}) | + | R_1 l(X_0) | + \int_{[tn]}^{[tn]+1} | f(Xs) | ds$$

et en utilisant le lemme

LEMME. — Soit $\varphi \in L^2(\mu)$ alors

(*i*) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1/2} | \varphi(X_n) | = 0 \, \mathbb{P}_\mu \quad \text{p. s.}$$

(*ii*) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1/2} \int_n^{n+1} | \varphi(X_s) | ds = 0 \quad \mathbb{P}_\mu \text{ p. s.}$$

Démonstration du lemme :

(i) Pour tout réel $a > 0$ on a

$$\sum_{n>0} \mathbb{P}_\mu \{ n^{-1/2} | \varphi(X_n) | > a \} = \sum_{n>0} \mathbb{P}_\mu \{ \varphi^2(X_n) > na^2 \}$$
$$= \sum_{n>0} \mu \{ \varphi^2 > na^2 \} \leqslant \frac{1}{a^2} \int \varphi^2 d\mu .$$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1/2} | \varphi(X_n) | = 0 \quad \mathbb{P}_\mu$-p. s..

(ii) De même

$$\sum_{n>0} \mathbb{P}_\mu \left\{ n^{-1/2} \int_n^{n+1} | \varphi(X_s) | ds > a \right\} \leqslant \sum_{n>0} \mathbb{P}_\mu \left\{ \int_n^{n+1} \varphi^2(X_s) ds > na^2 \right\}$$
$$= \sum_{n>0} \mathbb{P}_\mu \left\{ \int_0^1 \varphi^2(X_s) ds > na^2 \right\} \leqslant \frac{1}{a^2} E_\mu \int_0^1 \varphi^2(X_s) ds = \frac{1}{a^2} \int \varphi^2 d\mu < +\infty .$$

Donc $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1/2} \int_n^{n+1} | \varphi(X_s) | ds = 0$ et le lemme est établi.

Le lemme précédent montre que :

$$\operatorname*{Sup}_{s\leqslant t} \left| n^{-1/2} M^f([nt]) - n^{-1/2} \int_0^{sn} f(X_s) ds \right| \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0 \quad \mathbb{P}_\mu\text{-p. s.}$$

mais si l et f sont bornées ce résultat est trivial et a lieu sous $\mathbb{P}_\nu$ pour toute loi initiale ν. En conclusion les suites de processus

$$M_n^\nu = \left\{ \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\nu ; \left(\frac{1}{\sqrt{n}} M^f([tn]) \right)_{t\geqslant 0} \right\}$$

et

$$A_n^{\nu,f} = \left\{ \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\nu ; \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{tn} f(X_s) ds \right)_{t\geqslant 0} \right\}$$

(on note M_n^x et $A_n^{x,f}$ pour $M_n^{\delta x}$ et $A_n^{\delta x,f}$ quand $\nu = \delta_x$ = masse de Dirac). sont contigues au sens de [*14*] dans les conditions suivantes :

1° ν a une densité bornée par rapport à μ et ($f \in R_A$ ou $f \in L_0^2(\mu)$ si R_1 vérifie la condition de Doeblin).

2° $\nu = \delta_x$ et ($f \in R_A$ ou $f \in L_0^2(\mu)$ si R_1 vérifie la condition Doeblin) pour μ-presque tout x.

3° ν quelconque et f et l bornées.

Elles convergent donc vers le même processus limite. D'où les théorèmes :

THÉORÈME 1. — $X = \{ \Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in E} ; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \}$ est un processus de Markov droit à valeurs dans un espace localement compact à base dénombrable E ; $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ désigne sa filtration naturelle convenablement complétée et rendue continue à droite. On suppose que le processus X est récurrent Harris positif de probabilité invariante μ. Pour toute fonction f appartenant à l'image du générateur infinitésimal sur $L^2(\mu)$ de X, et pour toute loi initiale ν soit $(A_n^{\nu,f})$ la suite des processus

$$\left\{ \Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\nu ; \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{tn} f(X_s) ds \right\}$$

alors

(*i*) Si $\nu = \delta_x$

$$A_n^{x,f} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)} W\text{-}\mu\text{-presque sûrement}$$

(*ii*) Si ν a une densité bornée par rapport à μ

$$A_n^{\nu,f} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)} W$$

où W est le mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}$ et où $C(f)$ est la constante définie dans III.1 par la formule (5).

THÉORÈME 2. — Les hypothèses et les notations sont celles du théorème précédent ; si de plus le noyau R_1 de la résolvante de X vérifie la condition de Doeblin alors pour toute fonction $f \in L^2(\mu)$ et d'intégrale nulle

(*i*) $$A_n^{x,f} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)} W \quad \mu\text{-presque sûrement}$$

(*ii*) $$A_n^{\nu,f} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)} W$$

pour toute loi initiale ν de densité bornée par rapport à μ.

THÉORÈME 3. — Les notations et les hypothèses sont celles du théorème 1. Pour toute variable aléatoire f appartenant à l'image du générateur faible de X on a :

$$A_n^{\nu,f} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)} W \quad \text{pour toute loi initiale } \nu.$$

Mais si f est une variable aléatoire bornée d'intégrale nulle et telle que $|f|$ soit spéciale, il existe une variable aléatoire bornée l telle que $(I - R_1)l = f$ partout sur E (cf. [*11*]). On vérifie aisément à l'aide de l'équation résolvante, qu'une telle fonction appartient à l'image du générateur faible. D'où le

COROLLAIRE. — Pour toute variable aléatoire f bornée d'intégrale nulle et telle que $|f|$ soit spéciale $A_n^{\nu,f} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(f)}W$ pour toute loi initiale ν.

Quelques remarques à propos des théorèmes précédents.

1) Si E est compact et si le processus X est irréductible alors X est récurrent positif [*16*]. Si de plus μ est d'intérieur non vide alors R_1 vérifie la condition de Doeblin [*4*]. Dans ces conditions les théorèmes 1 et 2 donnent les mêmes résultats.

2) Si R_1 vérifie la condition de Doeblin alors toute fonction bornée est spéciale [*15*]; le Corollaire du théorème 3 devient donc un Corollaire du théorème 2.

3) Si le noyau R_1 est fellerien et le support de μ est d'intérieur non vide, toute fonction bornée à support compact est spéciale (cf. [*11*], [*13*], [*15*]). Le Corollaire du théorème 3 s'applique donc aux fonctions continues à support compact et d'intégrale nulle. Cette classe de fonctions est dense dans $L_0^2(\mu)$.

4) On peut donner une version multidimensionnelle du théorème 1 : supposons que $f_1, f_2, \ldots, f_q$ appartiennent à R_A, alors $\sum_{i=1}^{q} a_i f_i \in R_A$ pour tout q-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$; en appliquant le théorème 1 à $\sum_{i=1}^{q} a_i f_i$ sous $\mathbb{P}_\nu$ pour toute loi initiale ν de densité bornée par rapport à μ et sous $\mathbb{P}_x$ μ-presque sûrement, on en déduit aisément que le processus q-dimensionnel

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt} f_i(X_s)ds \; ; \; i = 1, \ldots, q\right)$$

converge en loi vers une martingale gaussienne q-dimensionnelle centrée de processus croissant associé $C\cdot t$ où C est la matrice $q \times q$ d'élément générique $C_{ij} = -\left(\int (Ag_i)g_j d\mu + \int (Ag_j)g_i d\mu\right)$ si $f_i = Ag_i$ pour $i=1, \ldots, q$.

III.2. Un théorème non fonctionnel.

THÉORÈME 4. — Sous les mêmes hypothèses que le théorème 1, pour toute fonction appartenant à l'image du générateur fort de X, $\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f(X_s)ds$ converge en loi quand t tend vers $+\infty$ vers une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $C(f)$ sous $\mathbb{P}_x$ pour μ-presque tout x et sous $\mathbb{P}_\nu$ pour toute loi initiale ν de densité bornée par rapport à μ.

Démonstration. — D'après la proposition on a $n^{-1/2}R_1 l(X_n) + n^{-1/2}\int_0^n f(X_s)ds$ converge en loi quand n tend vers $+\infty$ vers la loi normale $N(0, C(f))$. Mais d'après le (*ii*) du lemme $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1/2} | R_1 l(X_n) | = 0$; $\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n f(X_s)ds$ converge aussi vers $N(0, C(f))$. Remarquons maintenant que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f(X_s)ds - \frac{1}{\sqrt{[t]}}\int_0^{[t]} f(X_s)ds &= \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{[t]}^t f(X_s)ds \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{[t]}}\right)\int_0^{[t]} f(X_s)ds \\ &\leqslant \frac{1}{t}\int_{[t]}^{[t]+1} | f(X_s) | \, ds \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{\sqrt{[t]}}\int_0^{[t]} | f(X_s) | \, ds\right)\end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 quand t tend vers l'infini $\mathbb{P}_x$-presque sûrement pour tout $x \in E$. Le premier terme aussi par le *ii*) du lemme. D'où le théorème.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer des théorèmes non fonctionnels analogues aux théorèmes 2 et 3 et un théorème non fonctionnel multidimensionnel (remarque 4 de III.1).

Dans le paragraphe suivant on donne deux cas où $C(f) > 0$. On trouve dans [*8*] un exemple de chaîne où $C(f) = 0$.

III.3. **Deux cas où C(f) est strictement positif.**

PROPOSITION. — Supposons que la mesure $R_1(x, .)$ soit équivalente à μ pour tout x appartenant à E. Alors pour toute variable aléatoire f sur E bornée et d'intégrale nulle et telle qu'une solution l de l'équation de Poisson associée $(I - R_1)l = f\mu$, p. s. soit bornée on a $C(f) = 0$ entraîne que $f = 0$.

Démonstration. — Soit $h = R_1 l$. On remarque d'abord que si f n'est pas nulle sur E, la fonction h est bornée et n'est pas constante sur E. Car si h est constante sur E la fonction l sera constante et donc f sera nulle ce qui n'est pas le cas.

Supposons maintenant que $f \neq 0$ et $C(f) = 0$; alors le processus croissant $\langle M^f \rangle_t$ associé à la martingale $M_t^f = h(X_t) - h(X_0) + \int_0^t f(X_s)ds$ est nul sur $[0, +\infty[$, $\mathbb{P}_\mu$-presque sûrement, car l'application $t \mapsto \mathrm{E}_\mu(\langle \mu^f \rangle_t)$ est linéaire. Par conséquent la martingale M^f est aussi nulle $\mathbb{P}_\mu$ p. s. sur cet intervalle. Ainsi $\int_0^t f(\mathrm{X}_s)ds = h(\mathrm{X}_0) - h(\mathrm{X}_t)$ $\mathbb{P}_\mu$ p. s. pour tout $t \geqslant 0$. Mais on a aussi pour tout $p > 0$

$$\int_0^t e^{-ps}(ph + f)(\mathrm{X}_s)ds = h(\mathrm{X}_0) - e^{-pt}h(\mathrm{X}_t)$$

Ces deux relations entraînent que $h(\mathrm{X}_t) - h(\mathrm{X}_0) = 0$ $\mathbb{P}_\mu$ p. s. Comme h n'est pas constante sur E, il existe deux réels α et β avec $\alpha < \beta$ tels que si $\mathrm{A} = \{ h < \alpha \}$ et $\mathrm{B} = \{ h > \beta \}$ on ait $\mu(\mathrm{A}) > 0$ et $\mu(\mathrm{B}) > 0$. En choisissant une densité strictement positive et bimesurable de $\mathrm{R}_1(x, .)$ par rapport à μ et en utilisant la chaîne de transition R_1 associée à X (cf. [*5*]) on vérifie que $\mathbb{P}_\mu(\mathrm{X}_t \in \mathrm{B}, \mathrm{X}_0 \in \mathrm{A}) > 0$ ce qui contredit le fait que $h(\mathrm{X}_t) - h(\mathrm{X}_0) = 0$ $\mathbb{P}_\mu$ p. s. Donc si $f \neq 0$ on a $\mathrm{C}(f) > 0$ et la proposition est établie.

Donnons un cadre où la proposition précédente s'applique [*3*]. On suppose que le processus X vérifie l'hypothèse (L) et qu'il admet un état finement récurrent x_0. En prenant pour E la classe conservative contenant x_0, on sait qu'il existe une mesure positive σ-finie μ portée par E et invariante par le semi-groupe tel que le processus restreint soit Harris récurrent par rapport à cette mesure. De plus $\mathrm{R}_p(x, .)$ est équivalente à μ pour tout $p > 0$ et tout $x \in \mathrm{E}$. Donc la proposition précédente s'applique à ce cadre si l'on suppose de plus que la mesure μ est bornée.

Si le semi-groupe P_t est symétrique, sur $\mathrm{L}^2(\mu)$, c'est-à-dire :

$$\int (\mathrm{P}_t\varphi)\psi d\mu = \int \varphi(\mathrm{P}_t\psi)d\mu \qquad \varphi, \psi \in \mathrm{L}^2(\mu)$$

En introduisant le semi-groupe (Q_t) définie par :

$$\mathrm{Q}_t = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}_s m_t(ds)$$

où $m_t(ds) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2/4s)s^{-3/2}ds$: $m_t(ds)$ forment un semi-groupe de convolution stable d'ordre 1/2.

On démontre (cf. [*9*]) que si $g \in \mathrm{D_A}$ alors g appartient au domaine $\mathrm{D_B}$ du générateur fort sur $\mathrm{L}^2(\mu)$ de Q_t et on a $\mathrm{B}^2 g = -\mathrm{A}g$ et que

$$\int -(\mathrm{A}g)g d\mu = \|\mathrm{B}g\|^2 = 1/2\mathrm{C}(\mathrm{A}g).$$

Donc $\mathrm{C}(\mathrm{A}g) > 0$ si $g \neq 0$.

Dans le cas où E = $\mathbf{R}^n$, on peut donner comme exemple de semi-groupes symétriques, les semi-groupes de convolution symétriques autour de l'origine. Dans ce cas X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires nul en 0 ; et la chaîne de transition R_1 qui lui est associée est une marche aléatoire [*5*]. Les marches aléatoires récurrentes au sens de Harris sont étudiées dans [*15*]. Un autre exemple de processus à semi-groupes symétriques est fourni par les processus de sauts symétriques construits à partir de noyaux markoviens symétriques. Mais si X est un processus de sauts construit à partir d'un noyau Π on sait [cf. [*12*]] que X est Harris récurrent si et seulement si la chaîne canonique de transition Π associée à X est Harris récurrente.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. Azema, M. Duflo, D. Revuz, Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov, *Z. Wahrscheinlichkeits-theorie*, t. **8**, 1967, p. 157-181.

[*2*] J. Azema, M. Duflo, D. Revuz, *Mesure invariante des processus de Markov recurrents*, Séminaire de probabilités, 3, Université de Strasbourg, 1967, Springer Verlag (*Lecture Notes in Mathematics*, 88).

[*3*] J. Azema, M. Duflo, D. Revuz, *Classes récurrentes d'un processus de Markov*, *Séminaire de probabilités*, 2, Université de Strasbourg, 1966, Springer Verlag.

[*4*] R. Cogburn, A uniform theory for sums of Markov chain transition probabilities, *Ann. Prob.*, vol. **3**, n° 2, 1979, p. 191-194.

[*5*] M. Duflo, *Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov irréductibles*, Société mathématique de France, 1970, p. 124-164.

[*6*] M. Duflo, D. Revuz, Propriétés asymptotiques des probabilités de transition des processus de Markov récurrents. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Série 2, t. **5**, 1969, p. 233-244.

[*7*] J. F. C. Kingman, Recurrence properties of processes with stationary independent increments. *J. Austral. Math. Soc.*, t. **4**, 1964, p. 223-228.

[*8*] N. Maigret, Théorèmes de limite centrale pour une chaîne de Markov récurrente Harris positive. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1979.

[*9*] P. A. Meyer, *Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley*, Séminaire de probabilités 10, Université de Strasbourg, 1976, p. 142-163.

[*10*] P. A. Meyer, *Martingales locales fonctionnelles additives*. Séminaire de probabilités 12, Université de Strasbourg, 1977, p. 775-785.

[*11*] J. Neveu, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *Ann. Inst. Fourier*, t. **212**, p. 85-130.

[*12*] J. neveu, Cours sur les Files d'Attente, *Fac. Sci.* Paris, 1977, 1978.

[*13*] Numelin, *On the Poisson equation for recurrent Markov chains.*

[*14*] R. Rebolledo, La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi des processus. *Bull. Soc. math. France*, Mémoire, t. **62**, 1979.

[*15*] D. Revuz, *Markov chains*, North-Holland.

[*16*] Tuominen-Tweedie, *Markov chains with continuous components.*

[*17*] K. Yosida, *Functionnel analysis (5^e édition)*, Springer Verlag, 1978.

(Manuscrit reçu le 25 novembre 1979)