

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Sur le support de certaines lois indéfiniment divisibles dans un espace vectoriel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 18, n° 4 (1982), p. 395-410

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_4_395_0

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur le support de certaines lois indéfiniment divisibles dans un espace vectoriel

par

A. TORTRAT

85, rue de Paris, 92190 Meudon (France)

1. INTRODUCTION

Ce travail comporte deux parties. Dans la première nous étendons des résultats de [3] : Pour que le support S d'une loi μ soit un cône tronqué (c'est-à-dire un demi-groupe additif stable pour toutes homothéties de rapport $t > 1$), à une translation près, il n'est pas nécessaire qu'on ait une relation de semi-stabilité (d'exposant $\alpha > 1$) :

(1) $c \cdot \mu = \mu^{c\alpha} \delta(a)$, $0 < c < 1$, $c \cdot \mu$ loi de la v. a. $c\zeta$ si ζ a la loi μ .

Il suffit de :

(2) $c \cdot \mu$ divise μ^r pour $0 < r < c < 1$ (un couple (c, r)).

On pourra se borner, dans (2) à r rationnel, soit $r = l/k$, et de légères restrictions s'ajouteront à (2).

Pour $\alpha < 1$ (soit $r > c$) nous donnons d'autres énoncés, moins satisfaisants.

Dans la deuxième partie, nous reprenons le théorème 1 de [7], dont la preuve était très insuffisante. Nous la complétons pour les dimensions 2 et 3 de la mesure de Levy au voisinage de l'origine, après une analyse préparatoire relative à la position d'une direction asymptotique Δ pour $\int_{|x|>\eta} x dF$

(lorsque $\eta \rightarrow 0$), par rapport aux cônes C^n portant les restrictions de F à $|x| \leq \eta$. Que S (pour μ du type $e(F)$) soit toujours (après centrage) un demi-groupe (ce qu'affirmait le théorème 1 de [7]), est maintenant plausible mais nous ne l'affirmons pas (pour d fini > 3).

La preuve que S est un Δ -cylindre (fait qui ramène à la dimension $d-1$) n'est obtenue qu'indirectement, comme sous-produit de l'étude de S , sauf dans un seul cas, et nous n'avons pas de principe général, indépendant de la dimension, qui évite l'analyse « artisanale » que nous avons dû développer.

2. THÉORÈME 1

THÉORÈME 1. — Soit E un espace vectoriel normé séparable, et μ une loi sur sa tribu borélienne \mathcal{B} , $\tilde{\mu}$ la loi qu'induit μ dans le Banach \tilde{E} complété de E . On suppose que

i) pour un couple $0 < r < c < 1$ de nombres réels ($r = l/k$) $c \cdot \tilde{\mu}$ divise $\tilde{\mu}^r$ (cela supposant que $\tilde{\mu}^{1/k}$ existe) :

$$(2') \quad \tilde{\mu}^r = (c \cdot \tilde{\mu})\tilde{\nu},$$

ii) Le cofacteur $\tilde{\nu}$ (de $c \cdot \tilde{\mu}$) et $\tilde{\mu}$ sont des lois indéfiniment divisibles.

Pour ii) il suffit que les puissances $1/n$ de $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$, existent dans \tilde{E} , pour une infinité de n . Cela se traduit pour la mesure de Lévy \tilde{F} de $\tilde{\mu}$ par $c \cdot \tilde{F} \leq r\tilde{F}$, (une composante gaussienne peut exister, car $\alpha \leq 2$).

Alors le support S de μ est le translaté d'un cône tronqué.

Preuve. — a) Concernant l'affirmation relative à ii), notons que, suivant la preuve page 243 de [4] du théorème de Siebert, toutes les puissances m/n ($m \leq n$, n prenant les valeurs en nombre infini supposées) de $\tilde{\mu}$ sont équitendues (de façon indépendante de n). Cela assure l'existence du demi-groupe continu $\tilde{\mu}^t$ (équitendu pour $t \leq T$), dans \tilde{E} . On n'utilisera ci-après que les t multiples des r^i , et la continuité en O sur ces t . L'existence de \tilde{F} est assurée ainsi que l'expression susdite de (2') par \tilde{F} , mais cela n'intervient pas dans ce qui suit.

b) Nous suivons, en l'adaptant, par la translation ci-après, la méthode de [3]. Choisissons $t-1 = \theta > 0$ et $c^n k_n = \theta_n \rightarrow \theta$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (k_n est un entier convenable).

Alors $i_n = r^n k_n \rightarrow 0$ et dans \tilde{E} on a

$$(3) \quad \tilde{\mu}^{i_n} \rightarrow \delta(0) \quad \text{donc} \quad \tilde{\mu}_n \stackrel{\text{déf}}{=} \tilde{\mu}^{1-i_n} \rightarrow \mu \quad (4).$$

Dans toute la suite de cette preuve nous laissons tomber l'accent \sim sur les lois dans \tilde{E} (mais non sur les supports \tilde{S} de $\tilde{\mu}$ et \tilde{S}_n de $\tilde{\mu}_n$).

Une translation $-b = \frac{a}{c-r}$, avec $a \in \text{Supp } v$ permet de supposer que $0 \in \text{Supp } v$. En effet si les v . a. indépendantes ξ et η de lois μ et v vérifient $c\xi + \eta \stackrel{\text{loi}}{=} \mu^r$, on a $(+)$: 0 appartient alors aussi au support du cofacteur v_n de $c^n \cdot \mu$ pour μ^{r^n} , car si $(c^n \cdot \mu)v_n = \mu^{r^n}$, on a

$$(c^{n+1} \cdot \mu)(c \cdot v_n)v^{r^n} = (c \cdot \mu)^{r^n} v^{r^n} = \mu^{r^{n+1}},$$

soit $v_{n+1} = (c \cdot v_n)$ est cofacteur de $c^{n+1} \cdot \mu$.

Ainsi $c^n \tilde{S} \subset \text{Supp } \mu^{r^n}$ après ce centrage que nous supposons maintenant effectué.

c) Réénonçons le lemme 1.3 de [8] (3.6) de [3], de façon générale, dont la preuve n'est autre que celle de la proposition 3 de [5], formulée alors de façon inutilement restrictive en b) et plus que maladroite en a).

LEMME 1. — Soit X un groupe topologique (séparé) et μ une loi borélienne τ -régulière.

On suppose que $\mu = \mu_\alpha v_\alpha$, et que, suivant un certain filtre \mathcal{F} (d'éléments F), $v_\alpha \rightarrow \delta(0)$. Alors $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ et, S_α, S désignant les supports de μ_α, μ , on a (F décrivant le filtre et le trait $-$ désignant la fermeture)

$$(5) \quad S = \bigcap_{\mathcal{F}} \left[\bigcup_{x \in F} S_x \right]^-.$$

Preuve. — Pour $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ il suffit de prouver la convergence pour f uniformément continue à valeurs dans $[0, 1]$ (alors $\lim \mu_\alpha \mathcal{O} \geq \sup_{f \leq 1_{\mathcal{O}}} \mu f$, pour tout ouvert \mathcal{O}). Or dans $\mu f = \int f(x+y) \mu_\alpha(dx) v_\alpha(dy)$ la contribution de $y \in U$, voisinage de l'unité tel que $|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout y de U , diffère de moins de ε de $v_\alpha U \cdot \mu_\alpha f$, et celle de $y \in U^c$, de moins de $v_\alpha U^c$ de $v_\alpha U^c \cdot \mu_\alpha f$. On a bien $\mu_\alpha f \rightarrow \mu f$. Sans aucune restriction, $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ implique l'inclusion $S \subset 2^\circ$ membre dans (5), la preuve étant celle de a) de [5] ⁽¹⁾.

(1) On a plus, et c'est ce que nous exprimions dans [6] sous le terme de $\lim S_x$ (et $\overline{\lim}$) au sens topologique : $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ implique que tout voisinage U d'un point de S , coupe chaque S_x pour les α d'un élément convenable F du filtre, alors que (5) exprime seulement que U coupe un S_x avec $\alpha \in F$, pour tout F du filtre, ce qui est plus faible : $\lim S_x \subset S \subset \overline{\lim} S_x$, et donc

$$S = \overline{\lim} S_x = \lim S_x \quad \text{au sens topologique.}$$

(+) $c(\xi - b) + (\eta - a) \stackrel{\text{loi}}{=} (\mu - b)^r$.

Soit inversement x tel que tout voisinage U_x de x coupe $\bigcup_{\alpha \in F} S_\alpha \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} S_F$.
 Choisisant $U \times U \subset V$ voisinage arbitraire de e , on a (pour chaque F)
 $\mu_\alpha U_x > 0$ pour un $\alpha \in F$, et pour F tel que $\mu_\alpha U \geq \frac{1}{2}$ pour tout α de F ,
 $\mu V_x \geq \mu_\alpha U_x \cdot \nu_\alpha U \geq \frac{1}{2} \mu_\alpha U_x > 0$; c'est $x \in S$.

d) Appliquons le lemme \u00e0 (3) et (4). Pour x (quelconque) de \tilde{S} , il existe $x_n \in \tilde{S}_n$, avec $|x - x_n| < \varepsilon$, pour des n arbitrairement grands (ε donn\u00e9 quelconque).

Suivant b) on a $c^n x \in \text{Supp} \cdot \mu^n$ donc $\theta_n x \in \text{Supp} \cdot \mu^{in}$ et $\theta_n x + x_n \in \tilde{S}$.
 Passant \u00e0 la limite (suivant les n susdits) on obtient que $x(1 + \theta)$ est \u00e0 distance $< \varepsilon$ de \tilde{S} , soit $t\tilde{S} \subset \tilde{S}$, pour tout $t > 1$. Pour x de S , $tx \in E \cap \tilde{S} = S$.
 Mais prenant maintenant $\theta = 1$, x de X et les x_n comme ci-dessus, et x' un autre point de S . On a de m\u00eame $\theta_n x' + x_n \in \tilde{S} \Rightarrow x' + x \in \tilde{S}$ donc \u00e0 S .

COROLLAIRE 1. — Soit (E, \mathcal{C}) localement convexe et μ une loi sur la tribu cylindrique \mathcal{C} de E .

On suppose E_0 d\u00e9signant $\{x : y(x) = 0 \text{ si la loi } \mu_y \text{ de } y(\cdot), \text{ \u00e9gale } \delta(0)\}$, et μ_0 la trace de μ sur E_0 et $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{E_0}$, que

- i) $\mu_0^* E_0 = 1$,
- ii) $c \cdot \mu_0$ divise $\mu_0^r (r = l/k)$ sur \mathcal{C}_0 , le cofacteur ν ayant un \mathcal{C} -support S_ν (bien d\u00e9fini par ν sur \mathcal{C}_0) non vide,
- iii) μ_0 et ν sont ind\u00e9finiment divisibles ($:\mu_0^{1/n}$ et $\nu^{1/n}$ existent pour tout n),
 ou ont chacune une infinit\u00e9 de telles racines n -i\u00e8mes (sur \mathcal{C}_0).

Alors le \mathcal{C} -support de μ (n\u00e9cessairement dans E_0) est le translat\u00e9 d'un c\u00f4ne tronqu\u00e9.

Preuve. — ii) vaut *a fortiori* dans les E_{0U} (quotients de E_0 par « $p_U(x) = 0$ »), norm\u00e9s par $p_U(x)$ (cf. [5]). Les projections μ_{0U} ont, suivant le th\u00e9or\u00e8me, des supports S_U qui sont des c\u00f4nes tronqu\u00e9s, si les cofacteurs ν_U ont 0 dans leurs supports, soit si $0 \in S_\nu$. Or l'hypoth\u00e8se « S_ν non vide » permet de d\u00e9finir (par $a \in S_\nu$, quelconque), comme en b) du th\u00e9or\u00e8me, une translation de μ assurant que $0 \in S_\nu$.

Pour $\alpha < 1$, soit $c < r < 1$, nous ne pouvons donner qu'un th\u00e9or\u00e8me beaucoup plus restrictif.

TH\u00c9OR\u00c8ME 2. — On suppose, au lieu de (2'), que

- i) (6) $\tilde{\mu}^r$ divise $c \cdot \tilde{\mu}$
- et (7) un $c' \cdot \tilde{\mu}$ divise $\tilde{\mu}^l$ (un l entier, $0 < c < r < 1$, $0 < c' < 1$),

et

ii) $\tilde{\mu}$ et les deux cofacteurs de (6) et (7) sont indéfiniment divisibles, alors S est un cône convexe à une translation près.

Preuve. — (6) équivaut, dans \tilde{E} , à

$$(6') \quad r\tilde{F} \leq c \cdot \tilde{F}.$$

(6') assure $\int_B p_B(x) d\tilde{F} < \infty$, pour toute semi-norme p_B relative à un disque fermé B hors duquel \tilde{F} est bornée (et il en existe qui sont compacts, cf. [2], et [1] lemme 1 et théorème 2, mais on peut ici se borner à la boule unité B de \tilde{E}). En effet

$$(6') \text{ équivaut à } \frac{1}{c} \cdot \tilde{F} \leq \frac{1}{r} \tilde{F} \text{ donc } \frac{1}{c^i} \cdot \tilde{F} \leq \frac{1}{r^i} \tilde{F} \text{ (tout entier } i)$$

et on a

$$\int_B p_B d\tilde{F} \leq \sum_1^\infty c^{i-1} \tilde{F}(p_B > c^k) = \sum_1^\infty c^{i-1} \left\{ \left(\frac{1}{c^i} \cdot \tilde{F} \right) B^c \right\} \leq \sum_1^\infty \frac{c^{i-1}}{r^i} \cdot \tilde{F}(B^c).$$

Cela assure une représentation sans translation de $\tilde{\mu}$, et que \tilde{S} est le demi-groupe fermé engendré par le support S' de \tilde{F} , dans \tilde{E} (cf. [5], § 5).

De plus, (7), donnant $c' \cdot \tilde{F} \leq l\tilde{F}$, soit $\tilde{F}(dx) \geq \frac{1}{l} \tilde{F} \left(\frac{dx}{c'} \right)$, assure que $x \in \tilde{S}'$, implique $c'x \in \tilde{S}'$, donc aussi tx pour tout $t > 0$ (prendre $c'^m k_n \rightarrow t$). Alors \tilde{S} admet la même stabilité par $x \rightarrow tx$, tout $t > 0$.

Le même corollaire que pour le théorème 1, vaut, en remplaçant ii) par

$$\mu_0^r \text{ divise } c \cdot \mu_0 \quad \text{et} \quad \text{un } c' \cdot \mu \text{ divise un } \mu^l.$$

Par la même méthode on a aisément l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3 (Lahcen Omari, cf. [4]) (*). i) Dans les conditions du théorème 1 on suppose $r = c$ et μ symétrique, alors le support de μ est un sous-espace vectoriel.

ii) Dans les conditions du corollaire 1, on suppose toujours $c < r < 1$ (soit $\alpha < 1$), et en outre que $\text{Log } \hat{\mu}(y)$ s'écrive $-\frac{1}{2} Q(y) + \int (e^{iy(x)} - 1) dF$

(*) L'énoncé ii) est plus restrictif que celui du théorème 2, en ce sens que la condition « $c' \cdot \mu$ divise μ^l » (l entier au lieu de $r < 1$) suffit pour démontrer que S est un cône, tandis que l'autre condition du théorème 2 : « μ^l divise $c \cdot \mu$ » intervient seulement pour assurer l'autre hypothèse de ii) : que μ est « sans translation, au sens fort, cf. les propositions 4 et 5 de [6].

(ce qui n'implique que l'algèbre cylindrique de E_0) et que, dans les espaces quotients complétés \tilde{E}_{0U} , les \tilde{F}_U intègrent les normes dans les boules unités. Alors S est un cône convexe.

3. PRÉLIMINAIRES A L'ÉTUDE DU SUPPORT S , DE $\mu \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^d)$, EN DIMENSION FINIE d

Nous nous donnons une loi μ , du type de Poisson, donc bien définie à une translation près par sa mesure de Lévy F . Rappelons (preuves immédiates, cf. [6] et [7]) que S est toujours « invariant » par le demi-groupe fermé $\Sigma(F)$ engendré par le support S_F de F et O ($: S + \Sigma(F) \subset S$), et que si

$\int_{|x| \leq 1} |x| dF$ est fini, S égale (après un éventuel centrage) $\Sigma(F)$.

Notre problème est de prouver que S est toujours un demi-groupe contenant O (à une translation près, réserve éventuellement sous-entendue) et de préciser au mieux la nature de S suivant les cas. Il est donc loisible de supposer que, si petit que soit $\eta > 0$, la restriction F^η de F à $\{|x| \leq \eta\}$ ($|x|$ est une norme quelconque), n'est pas portée par un sous-espace de dimension $< d$, et qu'on a

$$(8) \quad \int_{|x| \leq 1} |x| dF = \infty.$$

De même on peut, et nous le faisons, supposer F portée par le « quadrant » $\{x_i \geq 0\}$ relatif à une base quelconque, et réduite à F^1 (plus tard à F^{n_0}). Nous appellerons aussi d -ièdre toute partie qui s'exprime (pour une autre base) comme le quadrant susdit.

Notons F_η la restriction de F à $\{x > \eta\}$, C^η le cône des demi-droites OP^η où P^η est un point du support de F^η (nous écrirons $P^\eta \in F^\eta$ pour abrégé),

\bar{C}^η la fermeture de ce cône, $M_\eta = \int_{\eta < |x|} x dF$, Σ^η le demi-groupe (fermé, contenant nécessairement O) $\Sigma(F^\eta)$ engendré par le support de F^η .

Enfin Γ désigne le cône des demi-droites limites en direction de suites $P_i \rightarrow 0$ ($P_i \in S_F$, $P_i \neq 0$), cône contenu dans tous les \bar{C}^η . $co(\cdot)$ et $\bar{co}(\cdot)$ désignent respectivement l'enveloppe convexe, et la fermeture de celle-ci.

LEMME 2. — i) Γ est fermé et contenu dans chaque Σ^η , donc $\bar{co}\Gamma \subset \Sigma^\eta$ (tout $\eta > 0$).

ii) Pour tout cône C (du quadrant) toute demi-droite Δ de $\bar{co}(C)$ appar-

tient à un d -ièdre T ayant ses arêtes dans \overline{C} (avec $\overline{C} = C \cup \Gamma$ si C est un C^n) : Δ est une combinaison convexe de d arêtes de \overline{C} .

Preuve de i). — Soit $\tau_n \rightarrow \tau$ avec $|\tau_n| = 1, \tau_n \in \Gamma$. Notons ρ la norme de P et choisissons des P_{ni} « dans F » tels que $\rho_{ni} \leq 1/i, P_{ni}/\rho_{ni} = \tau_{ni} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \tau_n$. Une suite $i_n \uparrow \infty$ existe telle que $\tau_{ni_n} \rightarrow \tau$, donc $P_{ni_n} \rightarrow 0$, on a bien $\tau \in \Gamma$.

Si $P_i = \rho_i(\tau + \varepsilon_i)$, avec $\varepsilon_i \rightarrow 0$ dans R^d , on a ($[]$ notant la partie entière)

$$[\rho_i^{-1}t]P_i = [\rho_i^{-1}t]\rho_i(\tau + \varepsilon_i) \rightarrow t\tau$$

donc $t\tau \in \Sigma^n$.

Si $\{t\tau, t > 0\}$ et $\{t\tau', t' > 0\}$ sont dans $\Sigma^n, \{t\tau + t'\tau'\}$ y est donc $co\Gamma \subset \Sigma^n$.

Preuve de ii). — Supposons Δ frontière dans $\overline{co}(C)$. Δ appartient à un hyperplan d'appui Π sur \overline{C}^n . On peut vérifier (ce point intuitif n'est pas tout à fait évident mais sans doute connu) que $\overline{co}(\Pi \cap \overline{C}) = \Pi \cap \overline{co}C$. Donc $\Delta \in \overline{co}(C \cap \Pi)$. Ce cas « Δ frontière » ramène donc à la dimension $d - 1$. Si Δ n'est pas frontière, soit Δ' génératrice extrémale (dans $\overline{co}C$), de \overline{C} . Le demi-plan $\Delta'\Delta$ (de frontière Δ') coupe $\overline{co}C$ suivant Δ'' en l'hyperplan d'appui Π' , ce qui ramène au cas précédent.

Enfin pour $d = 2$ le résultat est immédiat et la preuve de *ii)* est ainsi complète.

LEMME 3. — Soit Δ une direction asymptotique (lorsque $\eta \downarrow 0$) pour

$$M_\eta^{\eta_0} = \int_{\eta < |x| \leq \eta_0} x dF, \text{ c. a. d. une direction limite pour une suite } \eta_j \downarrow 0.$$

Δ ne dépend pas de η_0 et $\in \overline{co}C^n$ pour tout η .

Preuve immédiate et connue.

PROPOSITION 1. — Pour chaque direction asymptotique Δ de $M_\eta(\eta \downarrow 0)$, on est dans l'un des trois cas suivants :

ou Δ est intérieure à une suite de d -ièdres T_j d'arêtes $\in C^n(\eta_j \downarrow 0)$,

ou Δ est frontière dans $\overline{co}C^n$, pour un η assez petit, donc tout $\eta \leq \eta_0$, ou, en enlevant une partie bornée de F , et une partie portée par un sous-espace (vrai), on est ramené au 1^{er} cas.

Preuve. — Plaçons-nous dans le sous-espace affine $E : \sum_1^d x_i = 1$, et désignons par $\delta, \delta_1 \dots$ les traces de $\Delta, \Delta_1 \dots$

Supposons que pour $\eta \leq \eta_0, \delta$ ne soit frontière dans aucun $\overline{co}C^n$ (nous gardons ici les mêmes notations pour les traces sur E des cônes), ni intérieure à un polyèdre $\delta_1, \dots, \delta_d$ de sommets $\in \overline{C}^n$. Suivant le lemme 2, $\delta \in$ une face d'un tel polyèdre que nous notons T (comme le d -ièdre dont il est la trace

sur E), soit par exemple la face $\delta_2, \dots, \delta_d$ (pour un η fixé), portée par l'hyperplan Π .

a) Si δ est intérieur à cette face, portée par π trace de Π , soit q un point de $E \cap C^n$ qui soit du côté opposé à δ_1 par rapport à π (et non dans π).

Si $q \notin$ la droite $\delta_1\delta$, il est loisible de supposer que $\delta_1\delta$ n'est dans aucune « face » $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{j-2}\delta_j \dots q$ ($j = 3, \dots, d$), alors δ est intérieure à $\delta_1\delta_2 \dots \delta_{d-1}q$, donc aussi à un polyèdre T' de sommets dans C^n (et pas seulement $\overline{C^n}$). Cela est impossible par hypothèse, c'est dire que $q \in \delta_1\delta$, que $C^n \cap E$ se réduit à une partie de $\delta_1\delta$ en ce qui concerne la partie extérieure au demi-espace défini dans E par π et δ_1 . Ainsi si on retire de F^n la partie portée par le plan $\Delta_1\Delta$, la face $\Delta_2 \dots \Delta_d$ devient frontière de tous les C^n , $\eta \leq \eta_0$.

b) Si δ est seulement intérieur à $\delta_1 \dots \delta_d$, on raisonnera de même pour prouver qu'hormis une partie bornée, F est dans le demi-espace limité par Π et contenant T, ou dans le sous-espace engendré par $\Delta_1, \dots, \Delta_{l-1}, \Delta$.

COROLLAIRE 2. — Pour chaque direction asymptotique Δ (de $M_\eta, \eta \downarrow 0$), on a l'un des trois cas suivants :

i) $\Delta \in E$, sous-espace de dimension minimale, $d' \leq d - 1$, d'appui pour les C^n (: pour tout $\eta \leq \eta_0$, $\overline{C^n}$ a d' arêtes indépendantes dans E, et E est dans l'hyperplan d'appui Π commun à tous ces C^n , E et Π ne dépendant pas de η), et $\Delta \in$ un d' -ièdre d'arêtes dans $\Gamma \cap E$.

ii) Δ est intérieure à une suite de d -ièdres T_j d'arêtes dans C^{η_j} ($\eta_j \downarrow 0$),

iii) en enlevant une partie bornée de F et une autre partie portée par un sous-espace vrai, on est ramené au 1^{er} cas (si $\int |x| dF$ demeure infini, sinon il n'y a plus de problème).

Preuve. — Supposons Δ frontière dans les $\overline{C^n}$ ($\eta \leq \eta_0$). Fixons un η . Δ appartient à un hyperplan d'appui Π pour $\overline{C^n}$, et $\overline{C^n} \cap \Pi$ engendre le sous-espace E_η contenant Δ . Lorsque $\eta \downarrow$, Π est inchangé mais la dimension de E_η peut décroître jusqu'à rester égale à d' ($0 < d' \leq d - 1$).

On choisit η_0 assez petit pour que E ne dépende plus de η . Alors $\Delta \in \overline{C^n}(E \cap \overline{C^n})$ et, suivant le lemme 2, on a, pour la suite η_j (telle que

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d'} p_{ji} \Delta_{ji} (\Delta_{ji} \in \overline{C^{\eta_j}} \cap E), \quad M_{\eta_j} \xrightarrow{\text{dir}} \Delta) \quad \text{soit} \quad \Delta = \sum_1^{d'} p_i \Delta_i (\Delta_i \in \Gamma \cap E).$$

On notera que pour $d = 2$, on est toujours dans le cas i) (alors $\Delta \in \Gamma$) ou le cas ii).

Ainsi pour prouver (par récurrence) que S est un demi-groupe, on peut se borner au cas i) où « Δ est frontière » (des $\overline{co}C^n$), car dans le cas ii) $S = \mathbb{R}^d$ suivant le théorème 1 de [7].

Nous allons maintenant nous limiter au cas $d' = d - 1$ (qui suffira pour $d = 3$), lorsque $\Delta \notin \Gamma$.

Si Δ est intérieure au quadrant initial, il existe un nouveau quadrant contenant F (et remplaçant le premier), ayant d' arêtes dans Π , soit (ox_2, \dots, ox_d) définissant le d' -ièdre T_0 dans Π , et oz (du côté de F p. r. à Π). Suivant Π et oz nous noterons

$$M_\eta = m_\eta \times \zeta_\eta, \quad p_\eta \times z_\eta = P_\eta,$$

les représentations de M_η et d'un point P du support de F_η .

Si Δ est frontière dans le quadrant initial, on se borne à une permutation des coordonnées.

Si $A = a \times z \in S$, nous désignons par $f(a)$ le minimum des cotes z de ces points A (a fixé).

Posant $a_\eta = a + m_\eta$, on vérifie aisément qu'on a

$$(9) \quad f(a) = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \inf f_{\eta, \delta}(a),$$

avec

$$(9') \quad f_{\eta, \delta}(a) = \inf_{|\sum p_{\eta i} - a_\eta| < \delta} \{ \sum z_{\eta i} - \zeta_\eta \}.$$

Dans (9') comme dans toute la suite, il faut entendre que η est un des η_j d'une suite fixée une fois pour toutes (pour laquelle $M_\eta \xrightarrow{\text{dir.}} \Delta$), δ est par contre arbitraire. Cette lim est d'ailleurs aussi une limite suivant la note (1¹).

LEMME 4. — On suppose que Δ (qui suivant le corollaire 2 \in un d' -ièdre T_1 d'arêtes $\in \Gamma \cap \Pi$) est *intérieure* à un tel T_1 ($T_1 \subset T_0$).

Si le point c de Δ est tel qu'il existe des sommes $\sum_1 p_{\eta i} = c_1^\eta \in c + T_1$, extraites de sommes Σ de (9') dont les cotes (: les $\sum z_{\eta i} - \zeta_\eta$) $\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} f(a)$, telles que $c_1^\eta - c$ soit borné lorsque $\eta \rightarrow 0$, alors $f(a - c) \leq f(a)$, donc $f(a - c) = f(a)$.

Preuve. — On peut approcher $c_1^\eta = \sum_1^d p_{\eta i}$, qui est intérieur à T_1 , par $\Sigma'_1 = \sum_2^d n_i p_{\eta i}'$, où les $P_{\eta i}' \in S_{F_\eta}$ et ont des directions qui $\xrightarrow{\eta \rightarrow 0}$ vers celles de

la base de T_1 , et où $\sup |p_{\eta i}'| = \eta'(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Nous avons supposé c_1^η borné pour être assuré que la cote $z(c_1^\eta)$ tend vers 0 avec η , donc que lorsqu'on remplace Σ_1 par Σ'_1 , dans Σ , obtenant Σ' , on n'augmente pas (: on ne peut

que diminuer) à la limite la cote : $z(\Sigma'P_{\eta_i})$ tend vers $f(a)$ comme $z(\Sigma)$ (*puisque $f(a)$ est minimale*). De la somme Σ'_1 , donc aussi de Σ_1 , on peut alors enlever une partie qui $\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} c$, il reste $\Sigma''P_{\eta_i}$ de cote $\leq z(\Sigma')$, qui tend en projection vers $a - c$, d'où $f(a - c) \leq f(a)$. Puisque S est invariant par Δ ($\Delta \in \text{co}\Gamma \subset \Sigma^n$ et Σ^n invarie S), on a $f(a' + c) \leq f(a')$ d'où la constance de f sur les droites parallèles à Δ .

LEMME 5. — Pour $d = 3$, l'hypothèse du lemme 4 concernant un point c de Δ , est vérifiée (pour tout c).

Preuve. — Partageons Σ en $\Sigma' + \Sigma''$, suivant que les p_{η_i} de Σ appartiennent à l'angle $[x_2Oa_\eta]$ ou $]a_\eta O x_3]$.

a) Si $|\Sigma'|$ est bornée lorsque $\eta \rightarrow 0$ (pour une sous-suite de η_j), on a $|\Sigma''|/|a_\eta| \rightarrow 1$ et l'angle $\theta(\eta)$ (mesuré par la pente $\Sigma''_{x_3}/|a_\eta|$) de Σ'' et $a_\eta \rightarrow 0$. Les termes p_{η_i} (de Σ'') d'angle avec a_η (mesuré de même) $\leq 2\theta(\eta)$ ont donc une « abscisse totale suivant Δ » $\geq |a_\eta|/2$. On peut donc réaliser avec une partie des termes de Σ'' , une somme Σ_1 qui, lorsque $n \rightarrow 0$, oscille par exemple entre $2c$ et $3c$.

b) Sinon, choisissons les p_η les plus grands de Σ' (de toutes façons $|P_\eta| \leq \eta_0$), et notons p_η^1, p_η^2 leurs coordonnées p. r. à $\Delta_1\Delta_2$ formant l'angle T_1 (qu'on peut prendre ici maximum (c'est $(\overline{cO}\Gamma) \cap \Pi$), avec $\Delta_1 \subset [x_2O\Delta]$. c^1 et c^2 sont les coordonnées de c . Nous ajoutons de tels p_η jusqu'à ce que $c_1^1 = \Sigma'_1 p_{\eta_i}^1$ (termes tous ≥ 0) $\in [c^1 + \eta_1, c^1 + 2\eta_1]$ ($\eta_1 = \sup p_\eta^1$ pour $P_\eta \in S(F_{\eta_0})$). c_1^2 est borné (lorsque $\eta \rightarrow 0$) car les $|p_{\eta_i}^2|/|p_{\eta_i}^1|$ le sont. Si c_1^2 n'est pas ≥ 0 , on peut ajouter un terme np_η , avec $p_\eta \xrightarrow[\eta \rightarrow 0]{\text{dir}} \Delta_2$, obtenant \tilde{c}_1 tel que \tilde{c}_1^1 reste $> c^1$ et que \tilde{c}_1^2 soit ≥ 0 (et $\leq p_\eta^2$); la cote de $\tilde{\Sigma}'$ ainsi modifiée (contenant $\tilde{\Sigma}_1$) n'en est pas, à la limite, augmentée (tend toujours vers $f(a)$), ce qui prouve le lemme.

4. LE SUPPORT S EN DIMENSION 2 OU 3

Les lemmes 4 et 5 nous donnent le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — Pour $d = 3$ et $\Delta \in \text{co}(\Gamma) - \Gamma$, $f(a)$ est une constante q et S égale R^3 ou le demi-espace $\{z \geq q\}$ suivant que q égale $-\infty$, ou est fini.

Preuve. — Soit $A \in S$. On a $A + T_1 \subset S$ (T_1 est l'angle maximal $\Delta_1O\Delta_2$ dit ci-dessus).

Fixons a (projection de A) et soit A minimal : $A = a \times f(a)$ et $A' = A - c$, c décrivant Δ . Lorsque $c \rightarrow \infty$, tout point $B = b \times f(a)$ appartient à

$A' + T_1$ donc à S , car $A' \in S$ suivant le lemme 4 et T_1 est dans Σ^{n_0} invariant S . On a donc $f(b) \leq f(a)$ et par symétrie $f(a) \leq f(b) : f(\cdot) = q$. Puisque le réseau de sommet A' construit sur la maille arbitrairement petite, de base les P'_η (où P^2_η, P^3_η sont ceux de la preuve du lemme 4, de pente arbitrairement petite — avec η — p. r. à Π , et P^1_η un point de S_F de cote > 0) est dans S , faisant $c \rightarrow \infty$ et parce que Δ est intérieure à $\Delta_1 O \Delta_2$ (donc à tous les $P^2_\eta O P^3_\eta$ pour η assez petit), on a bien $S = \{z \geq q\}$.

Cette preuve couvre évidemment le cas où $\Delta \in \Gamma$ tout en étant intérieure à $\Delta_1 O \Delta_2$. Sinon on est dans la situation de la proposition 3 ou dans celle du lemme 6 ci-après.

PROPOSITION 3. — On suppose que $(d = 3)\Delta \in \Gamma$ et que Π , hyperplan d'appui, en Δ , des cônes $\overline{co}C^n$, est tangent à tous ces cônes (donc aux $\overline{C^n}$). Alors on a encore $f(a) = f(a - c)$, $f(\cdot) = q$ constante et $S = \{z \geq q\}$.

Preuve. — a) L'hypothèse signifie que pour chaque η il existe des P de F_η , de cote arbitrairement petite p. r. à leur « distance » au plan $\Delta O z$, mesurée suivant un axe oy de Π , dirigé du côté de Δ_1 (p. r. à $ox = \Delta$), et cela des deux côtés de Δ (pour les projections p sur Π). Il existe donc des P_η, P'_η de F_η , tendant vers O avec η et tels que leurs cotes z_η, z'_η soient $\leq \varepsilon(\eta)y_\eta$ et $\varepsilon(\eta)y'_\eta$ (dans $\Pi, p_\eta = (x_\eta, y_\eta)$ et de même pour p'_η). La pente de Σ (de (8')), p. r. à Π , suivant oz , équivalente à $f_{\eta,\delta}(a)/a_\eta$ tend vers O avec η : il existe donc une combinaison entière des P_η, P'_η ci-dessus, approchant en projection sur Π a_η à $|p_\eta| + |p'_\eta|$ près, et de pente $\leq 2\alpha_0(\eta)$ (avec

$$\alpha_0(\eta) = \sup \left(\frac{z_\eta}{|p_\eta|}, \frac{z'_\eta}{|p'_\eta|} \right),$$

donc la pente de Σ est elle aussi (lorsque $\eta \rightarrow 0$) $\leq 2\alpha_0(\eta)$. Nous pouvons supposer que les P_η de F_η , s'il en existe dans Π et qui $\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, sont seulement dans l'angle $[x_2 O \Delta]$, car s'il y en avait aussi (soit $P'_\eta \rightarrow 0$) dans $]\Delta O x_3]$, a_η serait approché par une combinaison entière de ces P_η, P'_η de cote nulle et on aurait trivialement $f(a) = - \int zdF (= \lim - \zeta_\eta)$. Prenant η_0 assez petit (F dans $|\cdot| \leq \eta_0$) on peut supposer que tous les P_η de F_η , de projection $p_\eta \in]\Delta O x_3]$ (soit $y(p_\eta) < 0$) sont de cote > 0 .

b) Décomposons Σ comme au lemme 5.

Si $|\Sigma'' p_{\eta i}| \geq |a_\eta|/K$ (un entier K , lorsque $\eta \rightarrow 0$, c'est-à-dire pour une sous-suite de η_j), on prouve aisément que la pente de Σ'' est $\leq 2(K + 2)\alpha_0(\eta)$. Σ'' contient donc une partie Σ''_1 de norme $\geq |a_\eta|/2K$ dont tous les termes sont de pente $\leq 4(K + 2)\alpha_0(\eta) = \alpha_1(\eta)$. La pente minimale des P_η dont

les $p_\eta \in [\Delta + \theta_\eta, \text{ox}_3]$ (θ_η pris > 0 signifiant que cet angle est dans $]\Delta \text{Ox}_3]$), et de $|p_\eta| \geq \eta'$ est $\alpha_2(\theta_\eta, \eta') \underset{\eta' \downarrow 0}{\downarrow} \alpha_2(\theta_\eta) > 0$ mais petite p. r. à θ_η .

Les $|p_\eta|$ de Σ'_1 sont donc $< \eta'$ si $\alpha_1 < \alpha_2(\theta, \eta')$, ou font avec Δ un angle $\leq \theta_\eta$ (où $\theta_\eta \downarrow 0$ et $(a_\eta, \Delta) \leq \theta_\eta$). Puisque *un de ces derniers* peut être remplacé par d'autres $p_\eta \notin \Sigma''$ mais de normes arbitrairement petites et n'augmentant les cotes ou les angles avec Δ qu'arbitrairement peu, pour extraire de Σ'_1 ($= \Sigma'$ ainsi modifiée) une somme qui $\rightarrow c$, on a bien $f(a-c) \leq f(a)$.

c) Si au contraire $|\Sigma'' p_{\eta_i}|/|a_\eta|$ tend vers 0 avec η , on a (suivant l'axe $oy = \text{ox}_2$ et la direction de a_η), lorsque $\eta \rightarrow 0$:

$$|\Sigma' p_{\eta_i}|/|a_\eta| \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad (\Sigma' p_{\eta_i})_y/|a_\eta| = \alpha_1(\eta) \rightarrow 0.$$

Σ' contient donc des termes de pente (suivant oy et p. r. à a_η) $\leq 2\alpha_1(\eta)$, et de norme $\sim |a_\eta|/2$. On en tire $f(a-c) \leq f(a)$ comme en b).

d) Ainsi, dans les deux cas, f est constante *des droites* parallèles à Δ (raisonner comme pour la proposition 2, avec $c \rightarrow \infty$ et T_1 réduit à Δ).

Mais la fin de la preuve cette proposition vaut encore, identique, car on dispose du même réseau $P_\eta P'_\eta$ de pente arbitrairement petite p. r. à Π pour affirmer que $f(\cdot) = q$, puis du réseau de dimension 3 pour assurer $S = \{z \geq q\}$.

LEMME 6. — Soit $d = 3$, $\Delta \in \Gamma$ arête du dièdre vrai $\Pi\Pi'$ (Π et Π' étant deux demi-plans) contenant les C^η (pour η assez petit, soit $\eta \leq \eta_0$, F est réduite à F^{η_0}). Alors S est un Δ -cylindre.

Preuve. — Prenons oz extérieure à $\Pi\Pi'$, alors pour tout $P \in S_F$ on a (ox suivant Δ)

$$(9) \quad z(P) \leq Ky(P) \quad \text{et} \quad y(P) \geq 0.$$

Soit $A = a \times g(a)$ un point de S , et ΣP_{η_i} une somme approchant $A + M_\eta$.

θ_η étant l'angle (a_η, Δ) mesuré par sa pente $y(a_\eta)/x(a_\eta)$, Σ contient une somme Σ' dont les termes P_{η_i} ont des pentes $\leq 2\theta_\eta$, et de norme totale $\geq |a_\eta|/2$. On tire donc de Σ' une somme Σ_1 vérifiant $|\Sigma_1 p_{\eta_i} - c| \leq \eta_0$, et dont l'ordonnée, donc aussi la cote, vu (9), $\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Ainsi il existe $\tilde{\Sigma}$ obtenue à partir de Σ en modifiant Σ_1 de sorte que $\tilde{\Sigma}_1 p_{\eta_i} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} c$, et que $z(\tilde{\Sigma}) = g(a)$.

En retirant $\tilde{\Sigma}_1$ de $\tilde{\Sigma}$ on obtient une somme approchant $A - c$. Ceci prouve que S , invariant par toute translation suivant Δ , l'est aussi par toute translation suivant $-\Delta$, et prouve le lemme.

Remarque 1. — Ainsi dans tous les cas (pour $d = 3$), S est un Δ -cylindre mais nous ne l'avons prouvé, aux propositions 2 et 3 que très indirectement (dans l'expression Δ -cylindre Δ représente la droite entière de support $\Delta \in \Gamma$).

Remarque 2. — Pour la dimension $d = 2$, nous l'avons dit, seuls les cas *i*) et *ii*) du corollaire 2 sont possibles. $S = \mathbb{R}^2$ dans ce dernier cas, et pour *i*), Δ est « frontière » et la preuve précédente est valable. En fait le raisonnement de la fin de la preuve de la proposition 3 montre que S est un demi-plan, ou \mathbb{R}^2 .

LEMME 7. — Si S est un Δ -cylindre (d fini quelconque) et si la Δ -projection $\tilde{\mu}$ de μ a pour support \tilde{S} , un demi-groupe (fermé et contenant O), il en est de même de S car S admet \tilde{S} pour base.

Preuve. — Soit $\tilde{A} \in \tilde{S}$. On voit de suite qu'il existe des points $A_n \in S$ tels que $\tilde{A}_n \rightarrow \tilde{A}$.

Ainsi dans tous les cas, \tilde{S} est la fermeture de la Δ -projection de S . Si S est un Δ -cylindre il est clair que \tilde{S} est la projection de S (si non A_n peut, dans notre cadre, et sachant seulement S Δ -invariant, tendre vers l'infini asymptotiquement à la demi-droite $\tilde{A} + \Delta$).

Ainsi nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — Pour toute loi μ indéfiniment divisible dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ,
i) Le support S s'écrit $a + \Sigma$, où Σ est un demi-groupe (additif, fermé) contenant O et contenant le demi-groupe $\Sigma_F(\ni O)$ engendré par le support de la mesure de Lévy F de μ .

Σ est unique, a est défini modulo le plus grand sous-groupe contenu dans Σ .

Si μ est sans composante gaussienne, et si $\int_{|x| \leq 1} |x| dF$ est fini, $\Sigma = \Sigma_F$.

ii) Si F est portée par un « quadrant », et si $\int_{\eta < |x| \leq 1} x dF = M_\eta$ est non borné, S est un cylindre suivant toute direction asymptotique Δ de M_η (lorsque $\eta \rightarrow 0$). En particulier si M_η est asymptote à une droite (de direction Δ), Σ est le Δ -cylindre ayant pour base le demi-groupe (fermé, $\ni O$) $\Sigma(\tilde{F})$, \tilde{F} étant la mesure de Lévy de la Δ -projection $\tilde{\mu}$ de μ ($S_{\tilde{F}}$ est la fermeture de la projection de S_F).

iii) S est un Δ -cylindre pour toute direction asymptotique partielle, c. a. d. relative à la restriction de F à un « quadrant ». Nous ne récapitulons pas, de façon plus détaillée, les résultats obtenus pour $d = 3$, ajoutant seulement pour $d = 2$.

THÉORÈME 5. — Soit $d = 2$, μ du type de Poisson avec F de dimension 2 dans tout voisinage de O . Alors S égale \mathbb{R}^2 ou un demi-plan, et il en est de même si μ admet une composante gaussienne.

Preuve. — Il existe un quadrant (fermé) Q tel que $\int_{|x| \leq 1} x dF_Q$ est infini (F_Q est la restriction de F à Q), et une direction asymptotique $\Delta \in Q$.

Ou F_Q^η est de dimension 2 (tout $\eta > 0$) et une fois enlevée une partie bornée de F_Q , le support est \mathbb{R}^2 ou un demi-plan. Cela ne change pas lorsqu'on tient compte de cette partie enlevée ou de $F - F_Q$, c. a. d. compose avec un demi-groupe. D'ailleurs il suffit que $F - F_Q$ (par exemple) ait un point (de son support) du côté opposé à F_Q p. r. à la droite Δ , pour que $S = \mathbb{R}^2$.

Si F_Q n'est pas de dimension 2 c'est que (enlevée une partie bornée) elle est portée par Δ , $S(\mu_Q)$ est la droite Δ et S est un Δ -cylindre. $F - F_Q$ admet (dans son cône Γ) une autre direction Δ' (qui peut être $\pm \Delta$) limite de $P_\eta \rightarrow 0$ ($P_\eta \notin$ droite Δ), qui se projettent sur une droite $D = yoy' \neq \Delta$ en des $P_\eta \rightarrow 0$. $\tilde{\mu}$ (avec les notations du lemme 7) a pour support D , ou une « moitié de D », qui avec la droite Δ définit \mathbb{R}^2 ou un demi-plan pour S .

Remarque 3. — Bill Hudson (communication écrite) a obtenu le résultat $S = a + \Sigma$, dans \mathbb{R}^2 , en supposant que O adhère à l'intérieur du support de F , hypothèse assez forte, puisque S_F dénombrable suffit à nécessiter les développements qui précèdent pour l'étude de S .

Remarque 4. — La propriété « S est un demi-groupe » ou « S égale un demi-groupe contenant O » est étroitement liée, si μ appartient à un demi-groupe continu μ^t , à la propriété $S_1 = S_t$ (S_t support de μ^t). On a en effet la propriété qui suit :

PROPOSITION 4. — Soit μ une loi borélienne et τ -régulière dans le demi-groupe topologique complètement régulier et possédant une unité e , non nécessairement abélien, X . On suppose que μ se plonge dans le demi-groupe continu μ^t . Alors *i*) Si une infinité de supports $S_{1/n}$ sont des demi-groupes contenant e , on a $S_t = S_1 : S_t$ s'étale mais ne s'agrandit pas lorsque t augmente.

ii) Si $S_1 \subset S_{1/2}$, S_1 est un demi-groupe. Si l'on sait $S_1 \ni e$, il suffit de $S_1 \subset S_{1/n}$ (un $n \geq 2$).

Preuve. — *i*) On a $S_{1/n} S_{1/n} \dots S_{1/n} = S_{1/n}$ (on prend n facteurs) et a pour fermeture S_1 .

Donc $S_{1/n} = S_1$, et de même les $S_{m/n}$ donc les S_t par continuité.

ii) On a $S_1 S_1 \subset S_{1/2} S_{1/2} \subset S_1$.

Aussi bien (si $S_1 \ni e$ et $S_1 \subset S_{1/n}$) $S_1 \subset S_1 \dots S_1 \subset S_{1/n} \dots S_{1/n} \subset S_1$ implique $S_1 S_1 \subset S_1$.

Remarque 5. — Supposons que dans R^n on puisse associer à une suite croissante (convenable) $F_n \uparrow F$, de mesures, des $F'_n \geq F_n$ (ou de supports contenant ceux des F_n) avec $F'_n \uparrow F$, telles que

$$(10) \quad 2 \int x dF_n = \int x dF'_n \quad (\text{intégrales supposées absolument convergentes})$$

En ce cas, il est aisé de voir que S_N est un demi-groupe. Il suffit d'ailleurs que F_n et F'_n non nécessairement \uparrow , mais toujours $\leq F$, tendent vers F en ce sens que $dF_n/dF \rightarrow 1$ F-p. s.

Soit alors G un groupe abélien localement compact, et $G_0 = K \times R^n$ un sous-groupe compact ouvert de G de ce type (on sait qu'il en existe toujours — K désigne un groupe-compact). Comme les caractères χ_0 de G_0 peuvent se prolonger par 0 hors de G_0 en des caractères χ de G , la fonction $g_0(x, \chi_0)$ de Parthasarathy, relative à G_0 , peut être prise pour g relative à G (nulle si $x \notin G_0$, égale à $g_0(x, \tau\chi)$ si $x \in G_0$, $\tau\chi = \chi_0$ étant l'image canonique de χ , $\chi \in \text{dual de } G$, obtenue en confondant les χ égaux sur G_0).

Il s'ensuit que S support de $\mu \in \mathcal{J}(G)$ est un demi-groupe (après translation) s'il en est ainsi pour $G_0 = K \times R^n$. Pour $n = 0$ c'est assuré. On peut donc supposer $F(K) = 0$. Si la projection de F sur R^n satisfait à la condition (10) et si on pose (avec $g_0(k \times x, l \times y) = g_1(k, l) + x \cdot y$)

$$e^{i \int g_1(k, l) dF_n} = (l, k_n) \quad \text{où } l \text{ décrit le dual de } K, k_n \in K,$$

F_n étant la « restriction du début » mais relevée dans G_0 (ce qui est loisible), les translations imposées (pour la convergence vers μ) aux $e(F_n)$, $e(F'_n)$ sont $-c_n - k_n$ et $-2c_n - k'_n$, avec $c_n = \int x dF_n$. On voit facilement que si k est une limite des $k'_n - 2k_n$ dans K , $S - k$ est un demi-groupe dans G_0 .

Ainsi l'étude de la possibilité de (10) fournit une approche peut être nettement plus simple que celle du § 3, adaptée semble-t-il à une mesure de Lévy sans atomes dans R^n (pour $n = 1$ la conclusion est assurée, pour $n > 1$ la question peut rester complexe), moins générale mais qui aurait l'avantage de valoir pour un groupe abélien localement compact quelconque (au lieu de R^n seulement — il ne paraît pas qu'on puisse déduire le résultat pour $K \times R^n$ de sa validité pour K et R^n).

Dans un espace vectoriel de dimension infinie aussi, cette approche est envisageable, utilisant le théorème 2 de Z. W., t. 60 (1982), p. 212.

RÉFÉRENCES

- [1] CHUNG, RAJPUT, TORTRAT, Semistable laws on Topological Vector Spaces, *Z. W.*, t. **60**, 1982, p. 209-218.
- [2] E. DETTWEILER, Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeitsmasse auf Badirkianschen Räumen, *Z. W.*, t. **34**, 1976, p. 285-311.
- [3] LOUIE, RAJPUT, Support and semi-norm integrability theorems for r-semistable Probability measures on L. C. T. V. S., *Lectures Notes*, 828.
- [4] Lahcen OMARI, Sur le support de certaines lois indéfiniment divisibles. *Thèse de 3^e cycle*, Paris-12^e, 1981.
- [5] E. SIEBERT, Einbettung unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsmasse auf topologischen gruppen, *Z. W.*, t. **28**, 1974, p. 227-247.
- [6] A. TORTRAT, Sur le support des lois indéfiniment divisibles dans les E. V. L. C. *Ann. Inst. Henri Poincaré XIII*, t. **1**, 1977, p. 27-43.
- [7] A. TORTRAT, Second complément sur le support des lois indéfiniment divisibles. *Ann. Inst. Henri Poincaré XIV*, T. **3**, 1978, p. 351-356.
- [8] YUAN, LIANG, *On the support and absolute continuity of infinitely divisible Probability measures. Semi-group Forum*, t. **12**, 1976, p. 34-44.

(Manuscrit reçu le 9 mars 1982)