

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

E. LANERY

## **Solutions bayésiennes en théorie de la décision statistique**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 18, n° 1 (1982), p. 55-79

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1982\\_\\_18\\_1\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_1_55_0)

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Solutions bayésiennes en théorie de la décision statistique**

par

**E. LANERY**

Université Paris IX Dauphine, 75775 Paris Cedex 16

---

**RÉSUMÉ.** — Les résultats classiques du calcul des probabilités sur la mesurabilité, les temps d'arrêt, les martingales et la désintégration, permettent d'obtenir l'existence de solutions bayésiennes pour le modèle de décision statistique proposé par A. Wald, et ce, sans hypothèse d'absolue continuité sur les probabilités, pour des coûts non nécessairement bornés, et avec une observation éventuellement en temps continu.

**ABSTRACT.** — Classic results in probability about measurability, stopping-times, martingals and disintegration, give existence of bayesian solutions as for Wald's Statistical Decision Model on large assumptions: absolute continuity of probabilities, or bounded costs are not required, and observation period may be continuous time.

---

### **I. INTRODUCTION ET RÉSULTAT**

Étant donné un système stochastique dynamique dont la loi de probabilité est fixée mais inconnue, on se propose, après une certaine période d'observation, de prendre une décision de façon à minimiser la somme des deux coûts suivants :

— le premier, fonction de la décision prise et de la loi de probabilité effective du système,

— le second, fonction de l'observation effectuée.

Une caractéristique essentielle de ce problème d'optimisation provient du fait que le coût de la décision finale dépend aussi de la loi de probabilité fixée mais inconnue suivie par le système étudié. Il n'y a pas alors en général de solution optimale, mais des solutions admissibles. Et pour choisir entre celles-ci on est amené

- soit à raisonner en terme de jeu (solution minimax),
- soit à se donner une idée préconçue de la solution (par exemple dans le maximum de vraisemblance),
- soit encore à partir d'une idée *a priori* sur la loi de probabilité suivie par le système (solution bayésienne).

De telles situations sont très fréquentes en Statistique [5].

C'est à la fin des années quarante qu'A. Wald [17] formalisa cette théorie de la Décision Statistique, et en donna les résultats fondamentaux. Depuis, le calcul des probabilités s'est lui-même considérablement développé, et il est maintenant possible d'alléger sensiblement les hypothèses proposées par A. Wald, sans rien perdre des conclusions : c'est l'objet de ce travail ; déjà d'ailleurs, A. Irle [6] [7] a présenté une version du formalisme pour des observations en temps continu. Or parmi les résultats essentiels de la théorie, il y a l'appréhension de toute solution admissible par des solutions bayésiennes. C'est pourquoi la première partie exposée ici est consacrée à l'existence de celles-ci. Une seconde partie est en préparation sur la relaxation, pour une approche en terme de jeu, et sur le résultat indiqué ci-dessus.

Mathématiquement, on considère l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$  des réalisations du système étudié, et un sous-ensemble  $T$  de  $\overline{\mathbb{R}^+}$  contenant 0 et représentant l'espace des temps. A chaque instant  $t \in T$  est associée une sous-tribu  $\mathcal{F}_t$  de  $\mathcal{A}$  sur  $\Omega$ , correspondant à l'information qu'on peut acquérir par une observation au cours de l'intervalle  $[0, t]$  de  $T$  ; le coût de cette observation, quand le système est dans la réalisation  $\omega$ , sera noté  $a(t, \omega)$ . Soit  $(P(m))_{m \in M}$  une famille de lois de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  parmi lesquelles se trouve, pour une certaine valeur fixée mais inconnue du paramètre  $m$ , la loi de probabilité réelle du système étudié ; l'ensemble  $M$  est celui des « états de la nature ». Enfin, soit  $Z$  l'ensemble des décisions finales possibles ; on notera par  $b(m, z)$  le coût de la décision finale  $z$  quand l'état de la nature est  $m$ .

Dans ces conditions (cf. [18]), une tactique (de décision) est un couple  $(\tau, g_\tau)$  constitué par un temps d'arrêt  $\tau$  sur  $\Omega$  relatif à la famille croissante de sous-tribus  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , et par une fonction de décision  $g_\tau$  de  $\Omega$  dans  $Z$ , sup-

posée  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable, où  $\mathcal{F}_\tau$  est évidemment la tribu des événements antérieurs à  $\tau$ . Dans l'éventualité  $\omega$ , le coût de cette tactique, quand l'état de la nature est  $m$ , vaut alors :

$$a[\tau](\omega) + b(m, g_\tau(\omega)) = a(\tau(\omega), \omega) + b(m, g_\tau(\omega))$$

ce qui donne un coût moyen égal à :

$$c(m, \tau, g_\tau) = \int_{\Omega} [a[\tau](\omega) + b(m, g_\tau(\omega))] P(m)(d\omega)$$

Ainsi, une tactique  $(\sigma, f_\sigma)$  est admissible si pour toute autre tactique  $(\tau, g_\tau)$  on a dans l'espace  $\mathbb{R}^M$  de toutes les fonctions de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$c(\cdot, \tau, g_\tau) \leq c(\cdot, \sigma, f_\sigma) \Rightarrow c(\cdot, \sigma, f_\sigma) = c(\cdot, \tau, g_\tau)$$

Par ailleurs, étant donné une loi de probabilité *a priori*  $\mu$  sur les états de la nature, une solution bayésienne est une tactique  $(\hat{\sigma}^\mu, \hat{f}_{\hat{\sigma}^\mu}^\mu)$  telle que, pour n'importe quelle tactique  $(\tau, g_\tau)$ , en posant :

$$\gamma(\mu, \tau, g_\tau) = \int_M c(m, \tau, g_\tau) \mu(dm)$$

on ait :

$$\gamma(\mu, \hat{\sigma}^\mu, \hat{f}_{\hat{\sigma}^\mu}^\mu) \leq \gamma(\mu, \tau, g_\tau)$$

*Théorème d'existence des solutions bayésiennes.*

*On suppose que :*

1° l'espace des temps  $T$  muni de l'ordre induit par  $\overline{\mathbb{R}^+}$  est lui-même un treillis complet de minimum 0, de sorte que toute partie de  $T$  possède dans  $T$  une borne inférieure et une borne supérieure ;

2° la famille  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  de sous-tribus de  $\mathcal{A}$  sur l'espace  $\Omega$  des éventualités est croissante et continue à droite sur  $T$ , c'est-à-dire qu'en tout instant  $s$  de  $T$  distinct de  $\text{Max } T$ , on a :

$$s = \text{Inf}_T \{ t \in T \mid t > s \} \Rightarrow \mathcal{F}_s = \bigcap_{\substack{t > s \\ t \in T}} \mathcal{F}_t$$

3° le coût d'observation  $a$  est un processus sur  $T \times \Omega$ , à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$ , adapté à la famille de sous-tribus  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , à trajectoires croissantes et continues à gauche sur  $T$ , c'est-à-dire que pour chaque éventualité  $\omega \in \Omega$  on a en tout instant  $s$  de  $T$  strictement positif :

$$s = \text{Sup}_T \{ r \in T \mid r < s \} \Rightarrow a(s, \omega) = \text{Sup}_{\overline{\mathbb{R}^+}} \{ a(r, \omega) \mid r \in T, r < s \}$$

4° l'espace  $M$  des états de la nature est un espace topologique sous-

linien, c'est-à-dire l'image séparée d'un espace polonais par une application continue surjective [2], § 6 ;

5° l'application  $m \mapsto P(m)$  est une probabilité de transition [12], § III-2, sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  paramétrée sur l'espace  $(M, \mathcal{B}(M))$  des états de la nature muni de sa tribu borélienne ;

6° l'espace  $Z$  des décisions finales est un compact métrisable ;

7° le coût de décision finale  $b$  est une application borélienne du produit  $M \times Z$  dans la demi-droite achevée  $\overline{\mathbb{R}^+}$ , telle que toutes les fonctions partielles  $b(m, \cdot)$ , pour  $m \in M$ , sont semi-continues inférieurement sur  $Z$ .

Dans ces conditions, quelle que soit la probabilité de Bayes a priori  $\mu$  sur l'espace  $(M, \mathcal{B}(M))$  des états de la nature muni de sa tribu borélienne, il existe une stratégie de décision finale  $\hat{f}^\mu$ , c'est-à-dire un processus progressivement mesurable [11], IV.D45, défini sur  $(T \times \Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  à valeurs dans  $(Z, \mathcal{B}(Z))$ , et il existe un temps d'arrêt d'observation  $\hat{\sigma}^\mu$ , tels que pour toute tactique  $(\tau, g_\tau)$  on ait :

$$\gamma(\mu, \tau, g_\tau) \geq \gamma(\mu, \tau, \hat{f}^\mu[\tau]) \geq \gamma(\mu, \hat{\sigma}^\mu, \hat{f}^\mu[\hat{\sigma}^\mu])$$

En particulier, la tactique  $(\hat{\sigma}^\mu, \hat{f}^\mu[\hat{\sigma}^\mu])$  est une solution optimale du problème de décision pour la loi de Bayes a priori  $\mu$  sur  $M$ . En outre, la stratégie  $\hat{f}^\mu$  est indépendante du coût d'observation  $a$  ; celui-ci n'intervient que dans la détermination du temps d'arrêt optimal  $\hat{\sigma}^\mu$ .

Pour établir l'existence de la stratégie optimale de décision finale  $\hat{f}^\mu$ , l'argumentation est classique [16] : l'information acquise au cours de l'observation de l'éventualité  $\omega$  jusqu'à l'instant  $t$  transforme la loi a priori  $\mu$  sur  $M$  en une loi a posteriori  $\nu_\mu(t, \omega)$ , qui permet d'obtenir le coût minimum de la décision finale par minimisation sur  $Z$  indépendamment en chaque couple  $(t, \omega)$ . A ce stade (§ III), les difficultés sont essentiellement dues à des questions de mesurabilité. Aussi a-t-on rassemblé au paragraphe II un certain nombre d'outils mathématiques utilisés au cours de la démonstration. Il s'agit en fait d'énoncés qui ne diffèrent souvent de résultats bien connus que par quelques précisions de détail, et celles-ci peuvent être obtenues sans modifications notables des démonstrations habituelles. De toute façon, des preuves complètes ont été réunies dans [9].

Une fois déterminée la stratégie  $\hat{f}^\mu$ , l'existence du temps d'arrêt optimal  $\hat{\sigma}^\mu$  est appuyée sur l'argumentation suivante : on se propose d'arrêter l'observation de l'éventualité  $\omega$  à l'instant où le coût global correspondant n'est plus strictement supérieur au coût moyen minimum qu'on pourrait obtenir en prolongeant cette observation. Ce raisonnement fut développé par J.-L. Snell [14] puis M. Thompson [15] pour résoudre le problème

général du temps d'arrêt optimal. Cependant, pour éviter les références en cascade et plusieurs mises au point consécutives à des modifications dans les hypothèses, on en présente au paragraphe IV une version appropriée au contexte particulier étudié ici.

Généralement, l'espace des temps  $T$  est soit  $\overline{\mathbb{N}}$  soit  $\overline{\mathbb{R}^+}$ . C'est pourquoi on va alléger les démonstrations en supposant dans tout ce qui suit que cet ensemble  $T$  est uniquement la demi-droite achevée  $\overline{\mathbb{R}^+}$  tout entière, le cas discret s'établissant par les mêmes arguments simplifiés. D'ailleurs moyennant quelques modifications, le cas général d'un espace des temps treillis complet contenu dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$  peut lui aussi en être déduit sans difficultés [10].

Des hypothèses faites, la plus contraignante est sans doute la continuité à droite de la famille des sous-tribus  $\mathcal{F}_t$  pour  $t \in T$ . Malheureusement certains contre-exemples permettent de penser qu'elle est indispensable. D'ailleurs, si on se limite aux tactiques correspondant aux temps d'arrêt accessibles [11], VII.D42, il n'est pas sûr non plus qu'il existe toujours une solution bayésienne. Quant à la continuité à gauche des trajectoires du coût d'observation  $a$ , du fait qu'elles sont croissantes, cela revient à dire que ces trajectoires sont semi-continues inférieurement. Comme on aura l'occasion de le signaler au paragraphe IV, une hypothèse de continuité de ces trajectoires allégerait les démonstrations, mais on perdrait alors par exemple la possibilité de forcer à la décision avant un temps d'arrêt  $\sigma$ , en posant :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall t > \sigma(\omega) \quad a(t, \omega) = +\infty$$

Par contre, il est possible d'éviter que l'espace topologique  $M$  des états de la nature soit souslinien : mais dans ce cas, le coût de décision finale  $b$  doit être une fonction semi-continue inférieurement sur le produit  $M \times Z$ , et le théorème ne s'applique alors qu'aux probabilités de Bayes a priori  $\mu$  sur la tribu borélienne de  $M$  qui sont intérieurement régulières par rapport aux compacts (remarque au § III).

## II. RÉSULTATS MATHÉMATIQUES PRÉALABLES

### II.1. Treillis complet des classes de variables aléatoires.

Soit  $(W, \mathcal{W}, \kappa)$  un espace de probabilité. L'ensemble  $L_{\mathbb{R}}^0(W, \mathcal{W}, \kappa)$  de toutes les classes, modulo l'égalité  $\kappa$ -presque sûre, des variables aléatoires définies sur  $(W, \mathcal{W}, \kappa)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est un treillis complet [12],

prop. II-4.1, dans lequel de toute famille quelconque d'éléments  $(X_i)_{i \in I}$  on peut extraire une sous-famille finie ou dénombrable  $(X_h)_{h \in H}$  telle que :

$$\sup_{i \in I} X_i = \sup_{h \in H} X_h \quad \inf_{i \in I} X_i = \inf_{h \in H} X_h$$

En conséquence, les théorèmes de Fatou et Lebesgue relatifs à l'espérance mathématique, ou même à l'espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{W}$ , s'étendent des suites dénombrables aux familles filtrantes. Par exemple, si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille filtrante décroissante d'éléments quasi-intégrables de  $L_{\mathbb{R}}^0(W, \mathcal{W}, \kappa)$  dont l'un au moins est intégrable, on a :

$$\mathbb{E}(\inf_{i \in I} X_i | \mathcal{V}) = \inf_{i \in I} \mathbb{E}(X_i | \mathcal{V})$$

Une classe  $X$  dans  $L_{\mathbb{R}}^0(W, \mathcal{W}, \kappa)$  sera dite  $\mathcal{V}$ -mesurable si elle possède un représentant qui est une variable aléatoire  $\mathcal{V}$ -mesurable, et la classe dans  $L_{\mathbb{R}}^0(W, \mathcal{W}, \kappa)$  d'une variable aléatoire  $x$  à valeurs dans la droite achevée  $\overline{\mathbb{R}}$  sera notée  $\bar{x}$ ; enfin, pour toute partie  $A$  de  $W$ , on désignera par  $\chi_A$  sa fonction indicatrice.

## II.2. Relèvement d'une sous-martingale.

Soit  $(W, \mathcal{W}, \kappa)$  un espace de probabilité et  $(\mathcal{V}_t)_{t \in T}$  une famille croissante continue à droite de sous-tribus de  $\mathcal{W}$  indexée sur  $T = \overline{\mathbb{R}}^+$ . Un processus progressivement mesurable  $x$  sur  $(W, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$  peut être considéré comme une application mesurable  $t, w \mapsto x(t, w)$  définie sur l'espace produit  $T \times W$  muni de la tribu des parties progressivement mesurables associées à la famille croissante des sous-tribus  $\mathcal{V}_t$  pour  $t \in T$ . Étant donné alors un temps d'arrêt  $\tau$  relatif lui aussi à  $(W, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$ , on notera par  $x[\tau]$  la variable aléatoire  $\mathcal{F}_{\tau}$ -mesurable [11], IV.T49,  $w \mapsto x(\tau(w), w)$ . En particulier :

$$\forall t \in T \quad \forall w \in W \quad x(t, w) = x[t](w)$$

Un processus réel adapté [11], IV.D31, dont les trajectoires sont toutes continues à droite ou toutes continues à gauche est progressivement mesurable [11], IV.T47.

**THÉORÈME.** — Soit  $(X(t))_{t \in T}$  une sous-martingale définie sur  $(W, \mathcal{W}, \kappa, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$ , à valeurs dans l'espace  $L^1(W, \mathcal{W}, \kappa)$  et telle que l'application  $t \mapsto \mathbb{E}(X(t))$  soit continue à droite de  $T$  dans  $\mathbb{R}$ . Il existe alors un processus progressivement mesurable  $x$  défini sur  $(W, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$ , à trajectoires continues à droite (et presque sûrement réglées), tel qu'en chaque instant  $t \in T$  la variable aléatoire  $x[t]$  soit un représentant  $\mathcal{V}_t$ -mesurable de la classe  $X(t)$ . En outre, ce processus

est unique à l'indistinguabilité [4], IV.7, près et définit une sous-martingale régulière sur  $(W, \mathcal{W}, \kappa, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$ , c'est-à-dire que pour deux temps d'arrêt quelconques  $\sigma$  et  $\tau$  sur  $(W, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$ , on a :

$$\sigma \leq \tau \Rightarrow \overline{x[\sigma]} \leq \mathbb{E}(x[\tau] | \mathcal{V}_\sigma)$$

Par rapport aux énoncés classiques, on ne suppose pas que les sous-tribus  $\mathcal{V}_t$  pour  $t \in T$  sont complètes, mais par contre, le processus initial  $(X(t))_{t \in T}$  est à valeurs « classe ». La démonstration en est cependant tout à fait calquée sur celles présentées habituellement [12], cor. 2 de la prop. IV-5-4 et prop. IV-5-5.

**PROPOSITION.** — *Étant donné une suite croissante  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de processus progressivement mesurables sur  $(W, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$  à trajectoires continues à droite de  $T$  dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$ , tels que pour tout entier naturel  $n$  l'application  $t \mapsto \overline{x_n(t)}$  soit une surmartingale sur  $(W, \mathcal{W}, \kappa, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$ , il existe un processus progressivement mesurable  $y$  sur  $(W, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$ , à trajectoires continues à droite (et presque sûrement réglées), qui soit indistinguishable de l'enveloppe supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}^{+T \times W}}$  de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En outre ce processus  $y$  définit une surmartingale régulière sur  $(W, \mathcal{W}, \kappa, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$ .*

On trouve un énoncé similaire dans [11], VI. T16.

### II.3. Désintégration relativement à une famille croissante de sous-tribus.

**THÉORÈME.** — *Soit  $(W, \mathcal{W})$  un espace mesurable sur lequel on considère une famille croissante continue à droite  $(\mathcal{V}_t)_{t \in T}$  de sous-tribus de  $\mathcal{W}$  indexée sur  $T = \overline{\mathbb{R}^+}$ . Soit par ailleurs  $X$  un espace topologique souslinien et  $\hat{\mathcal{B}}(X)$  la tribu engendrée sur  $X$  par ses parties sousliniennes. Considérons alors sur l'espace produit  $(X \times W, \hat{\mathcal{B}}(X) \otimes \mathcal{W})$  une loi de probabilité  $\lambda$  dont on notera par  $\kappa$  l'image par la projection canonique de  $X \times W$  sur  $W$ .*

*Étant donné une sous-tribu dénombrablement engendrée  $\mathcal{X}$  de  $\hat{\mathcal{B}}(X)$ , il existe une probabilité de transition  $\xi$  sur l'espace mesurable  $(X, \mathcal{X})$ , paramétrée sur le produit  $T \times W$  muni de la tribu des parties progressivement mesurables associées à la famille croissante de sous-tribus  $(\mathcal{V}_t)_{t \in T}$ , et cette probabilité de transition possède les propriétés suivantes :*

1° *pour toute fonction réelle mesurable  $\varphi$  bornée ou positive sur  $(X, \mathcal{X})$ , le processus*

$$(t, w) \mapsto \int_X \varphi(x) \xi(t, w)(dx)$$



est progressivement mesurable sur  $(W, \mathcal{W}, \kappa, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$ , y définit une martingale régulière (et est à trajectoires  $\kappa$ -presque sûrement càdlàg) ;

2° quels que soient le temps d'arrêt  $\tau$  relatif à  $(W, (\mathcal{V}_t)_{t \in T})$  et la fonction réelle mesurable  $\psi$  bornée ou positive sur  $(X \times W, \mathcal{X} \otimes \mathcal{V}_\tau)$ , la fonction

$$w \mapsto \int_X \psi(x, w) \xi[\tau](w)(dx)$$

est  $\mathcal{V}_\tau$ -mesurable sur  $W$ , et on a :

$$\int_{X \times W} \psi(x, w) \lambda(dx, dw) = \int_W \left[ \int_X \psi(x, w) \xi[\tau](w)(dx) \right] \lambda(dw)$$

c'est-à-dire que la probabilité de transition  $w \mapsto \xi[\tau](w) = \xi(\tau(w), w)$  est une désintégration de la mesure  $\lambda$  sur l'espace  $(X \times W, \mathcal{X} \otimes \mathcal{V}_\tau)$  relativement à la projection canonique de  $X \times W$  sur  $W$  ;

3° une telle probabilité de transition  $\xi$  est unique à l'indistinguabilité près en tant que processus défini sur l'espace de probabilité  $(W, \mathcal{W}, \kappa)$ , indexé sur  $T$ , et à valeurs dans l'espace des mesures sur  $(X, \mathcal{X})$  ;

4° enfin, si  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est une famille dénombrable de fonctions réelles mesurables bornées sur  $(X, \mathcal{X})$ , on peut choisir  $\xi$  de telle sorte que tous les processus

$$(t, w) \mapsto \int_X \varphi_i(x) \xi(t, w)(dx)$$

pour  $i \in I$ , soient à trajectoires continues à droite.

Là encore, les sous-tribus  $\mathcal{V}_t$  pour  $t \in T$  ne sont pas supposées  $\kappa$ -complètes sur  $W$ . Par contre, la désintégration de la mesure  $\lambda$  n'est obtenue que sur la tribu dénombrablement engendrée  $\mathcal{X}$ . Enfin, l'espace  $X$  est supposé souslinien pour que, suivant le théorème de P. A. Meyer [4], III.69, toute probabilité sur sa tribu borélienne soit intérieurement régulière par rapport aux compacts ; il en est alors de même pour toute probabilité sur  $(X, \mathcal{B}(X))$ , en raison de la capacabilité des ensembles sousliniens [2], § 6, n° 9, th. 5.

Comparé au résultat analogue de L. Schwartz [13], le théorème ci-dessus distingue l'espace  $X$ , où se trouve la tribu  $\mathcal{X}$  sur laquelle est obtenue la désintégration, de l'espace  $W$ , où se trouve la famille croissante des tribus  $\mathcal{V}_t$  par rapport auxquelles se fait le conditionnement. Cela modifie évidemment la démonstration, mais les arguments essentiels restent les mêmes : dans l'espace produit  $(X \times W, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{W}, \lambda)$  on construit une désintégration régulière de la probabilité  $\lambda$  sur la tribu engendrée par la projection canonique de  $X \times W$  sur  $X$  muni de la tribu  $\mathcal{X}$ , relativement à la filtra-

tion  $(\mathcal{Y}_t)_{t \in T}$ , où pour tout  $t$  dans  $T$  la tribu  $\mathcal{Y}_t$  est engendrée par la projection canonique de  $X \times W$  sur  $W$  muni de la tribu  $\mathcal{V}_t$ . Et bien sûr, c'est le théorème d'Alexandrov [12], prop. I-6.2, qui permet d'obtenir des probabilités à partir de fonctions positives additives d'ensembles, comme dans le théorème de Jirina [12], prop. V-4.4 et cor.

#### II.4. Une propriété de minisup.

**PROPOSITION.** — *Soit  $X$  un espace compact et  $(\varphi_j)_{j \in J}$  une famille croissante de fonctions semi-continues inférieurement de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , indexée sur un ensemble  $J$  ordonné filtrant croissant. Alors :*

$$\text{Min}_{x \in X} \text{Sup}_{j \in J} \varphi_j(x) = \text{Sup}_{j \in J} \text{Min}_{x \in X} \varphi_j(x)$$

Le premier membre est évidemment supérieur au second. Par ailleurs, pour tout indice  $j$  dans  $J$ , soit  $y_j$  un élément de l'espace  $X$  pour lequel :

$$\text{Min}_{x \in X} \varphi_j(x) = \varphi_j(y_j)$$

Si  $y$  est un point adhérent à la famille filtrante  $(y_j)_{j \in J}$ , on a, puisque chacune des fonctions  $\varphi_i$  pour  $i \in J$  est semi-continue inférieurement :

$$\varphi_i(y) \leq \overline{\lim}_{j \in J} \varphi_i(y_j) \leq \text{Sup}_{j \geq i} \varphi_i(y_j) \leq \text{Sup}_{j \geq i} \varphi_j(y_j)$$

et par conséquent :

$$\text{Min}_{x \in X} \text{Sup}_{i \in J} \varphi_i(x) \leq \text{Sup}_{i \in J} \varphi_i(y) \leq \text{Sup}_{j \in J} \varphi_j(y_j)$$

ce qui prouve l'inégalité opposée à celle déjà remarquée, et donc l'égalité.

### III. EXISTENCE D'UNE STRATÉGIE OPTIMALE DE DÉCISION FINALE

Les hypothèses et les notations sont celles du théorème d'existence énoncé au paragraphe I avec  $T = \overline{\mathbb{R}^+}$ .

Du fait que l'espace  $Z$  des décisions finales est de type dénombrable, la tribu borélienne du produit  $M \times Z$  est aussi la tribu produit des tribus boréliennes  $\mathcal{B}(M)$  et  $\mathcal{B}(Z)$ , de sorte que le coût d'observation  $b$  est mesurable de  $(M \times Z, \mathcal{B}(M) \otimes \mathcal{B}(Z))$  dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$ .

Par ailleurs, soit  $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable dense d'éléments de l'espace  $\mathcal{C}_u(Z)$  de toutes les fonctions continues de  $Z$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la

topologie de la convergence uniforme [3], § 3, n° 3, th. 1. Quel que soit l'indice  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , l'ensemble suivant,

$$A_i = \{ (m, z) \in M \times Z \mid \psi_i(z) \geq b(m, z) \}$$

est un borélien du produit  $M \times Z$ , de sorte que sa projection canonique  $B_i$  sur  $M$  est une partie souslinienne de cet espace [2], § 6, n° 3, corol. prop. 11. Si donc on note  $\hat{\mathcal{B}}(M)$  la tribu sur  $M$  engendrée par les sousliniens, toutes les fonctions

$$m, z \mapsto b'_i(m, z) \triangleq \chi_{C_{B_i}}(m) \cdot (\psi_i(z) \vee 0)$$

pour  $i \in \mathbb{N}$ , sont mesurables de  $(M \times Z, \hat{\mathcal{B}}(M) \otimes \mathcal{B}(Z))$  dans  $\mathbb{R}^+$ , inférieures à  $b$ , et leurs applications partielles  $b'_i(m, \cdot)$ , quand  $m$  parcourt  $M$ , sont continues sur  $Z$ . Comme par hypothèse tous les éléments de la famille  $(b(m, \cdot))_{m \in M}$  sont des fonctions semi-continues inférieurement de  $Z$  dans  $\mathbb{R}^+$ , on vérifie alors que  $b$  est la borne supérieure de la suite  $(b'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans l'espace  $\overline{\mathbb{R}^{+M \times Z}}$ . Finalement, en posant :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad b_j = (\text{Sup}_{i \leq j} b'_i) \wedge j$$

il est prouvé que le coût d'observation  $b$  est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de fonctions à valeurs respectivement dans l'intervalle  $[0, j]$ , mesurables sur  $(M \times Z, \hat{\mathcal{B}}(M) \otimes \mathcal{B}(Z))$ , et telles que toutes les fonctions partielles  $b_j(m, \cdot)$ , quand  $(j, m)$  varie dans  $\mathbb{N} \times M$ , sont continues sur  $Z$ .

Or étant donné un sous-ensemble dénombrable  $D$  dense dans  $Z$ , on a pour toute fonction continue  $\psi$  de  $Z$  dans  $\mathbb{R}$  et pour tout nombre positif  $r$  :

$$\{ \varphi \in \mathcal{C}_u(Z) \mid \|\varphi - \psi\|_u \leq r \} = \bigcap_{z \in D} \{ \varphi \in \mathcal{C}_u(Z) \mid \varphi(z) \in [\psi(z) - r, \psi(z) + r] \}$$

autrement dit, les boules fermées de l'espace métrique  $\mathcal{C}_u(Z)$  appartiennent toutes à la tribu engendrée sur cet espace par les applications  $\varphi \mapsto \varphi(z)$  de  $\mathcal{C}_u(Z)$  dans  $\mathbb{R}$  quand  $z$  parcourt  $Z$ . Comme il s'agit d'un espace de type dénombrable, on en déduit que sa tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathcal{C}_u(Z))$  est engendrée par ces fonctions.

Par conséquent, toutes les applications  $m \mapsto b_j(m, \cdot)$  pour  $j \in \mathbb{N}$ , sont mesurables de  $(M, \hat{\mathcal{B}}(M))$  dans l'espace  $\mathcal{C}_u(Z)$  muni de sa tribu borélienne. C'est pourquoi, quels que soient l'indice  $j \in \mathbb{N}$  et l'entier positif  $h$ , il existe une partition dénombrable  $(B_k^{jh})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $M$  en éléments de  $\hat{\mathcal{B}}(M)$ , et une famille

dénombrable  $(\psi_k^{jh})_{k \in \mathbb{N}}$  de fonctions réelles continues sur  $Z$ , à valeurs dans l'intervalle  $[0, j]$ , telles que, dans l'espace des fonctions bornées de  $M \times Z$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme de la convergence uniforme, on ait :

$$\text{Sup}_{(m,z) \in M \times Z} \left| b_j(m, z) - \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{B_k^{jh}}(m) \cdot \psi_k^{jh}(z) \right| < \frac{1}{h+1}$$

Les résultats ci-dessus sont à comparer aux propriétés des intégrandes normales [1].

Considérons maintenant sur l'espace mesurable  $(M \times \Omega, \hat{\mathcal{B}}(M) \otimes \mathcal{A})$  la mesure  $\pi_\mu$  qui à toute fonction mesurable bornée  $\varphi$  de ce produit dans  $\mathbb{R}$  associe le nombre :

$$\int \varphi \pi_\mu \triangleq \int_M \left[ \int_\Omega \varphi(m, \omega) P(m)(d\omega) \right] \mu(dm)$$

On notera par  $P_\mu$  l'image de cette probabilité  $\pi_\mu$  par la projection canonique de  $M \times \Omega$  sur  $\Omega$ .

Soit  $\mathcal{M}$  la tribu engendrée sur  $M$  par la famille dénombrable des sous-ensembles  $B_k^{jh}$  pour  $(j, h, k) \in \mathbb{N}^3$ . D'après ce qui précède, toutes les fonctions partielles  $b_j(\cdot, z)$  quand  $(j, z)$  varie dans  $\mathbb{N} \times Z$ , sont  $\mathcal{M}$ -mesurables sur  $M$ . Seulement, en raison du théorème énoncé en II-3, il existe sur l'espace  $(M, \mathcal{M})$  une désintégration  $(t, \omega) \mapsto v_\mu(t, \omega)$  de la mesure  $\pi_\mu$  définie ci-dessus pour la projection canonique de  $M \times \Omega$  sur  $\Omega$ , relativement à la famille croissante continue à droite indexée sur  $T = \overline{\mathbb{R}^+}$  des sous-tribus  $\mathcal{F}_t$  de  $\mathcal{A}$ , et possédant toutes les propriétés indiquées.

En particulier tous les processus adaptés sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  :

$$(t, \omega) \mapsto v_\mu(t, \omega) [B_k^{jh}]$$

pour  $(j, h, k) \in \mathbb{N}^3$ , et

$$(t, \omega) \mapsto \int_M b_j(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm)$$

quand  $j$  parcourt  $\mathbb{N}$  et  $z$  un sous-ensemble dénombrable dense  $D$  de  $Z$ , peuvent être supposés à trajectoires continues à droite. En outre, quel que soit l'entier naturel  $j$  et le point  $z$  de  $Z$ , le processus

$$(t, \omega) \mapsto \int_M b_j(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm)$$

est progressivement mesurable sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  et  $y$  définit une

martingale. Par ailleurs, quel que soit le triplet  $(j, t, \omega)$  de  $\mathbb{N} \times T \times \Omega$ , la fonction

$$z \mapsto \int_{\mathbb{M}} b_j(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm)$$

est continue de  $Z$  dans  $\mathbb{R}$ , de sorte que son minimum sur chaque fermé  $F$  de  $Z$  y est égal à sa borne inférieure sur un sous-ensemble dénombrable dense de  $F$ .

Dans ces conditions, le coût moyen minimum de décision finale pour l'éventualité  $\omega$  à l'instant  $t$  est le nombre :

$$\beta(t, \omega) \triangleq \text{Inf}_{z \in Z} \int_{\mathbb{M}} b(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm)$$

et suivant l'argumentation exposée dans l'introduction (§ I), la stratégie optimale de décision finale  $\hat{f}^\mu$  devra vérifier :

$$\forall (t, \omega) \in T \times \Omega \quad \int_{\mathbb{M}} b(m, \hat{f}^\mu(t, \omega)) v_\mu(t, \omega)(dm) = \beta(t, \omega)$$

Tout d'abord, remarquons que d'après ce qui précède tous les processus

$$(t, \omega) \mapsto \beta_j(t, \omega) \triangleq \text{Min}_{z \in Z} \int_{\mathbb{M}} b_j(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm)$$

pour  $j \in \mathbb{N}$  sont progressivement mesurables sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ , et donc aussi leur enveloppe supérieure. Mais comme la suite  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est croissante dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{M} \times Z}$ , on déduit de la propriété de minisup énoncée en II-4 que :

$$\begin{aligned} \forall (t, \omega) \in T \times \Omega \quad \text{Sup}_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t, \omega) &= \text{Sup}_{j \in \mathbb{N}} \text{Min}_{z \in Z} \int_{\mathbb{M}} b_j(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm) \\ &= \text{Min}_{z \in Z} \text{Sup}_{j \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{M}} b_j(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm) \\ &= \text{Min}_{z \in Z} \int_{\mathbb{M}} b(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm) = \beta(t, \omega) \end{aligned}$$

si bien que le coût moyen minimum de décision finale  $\beta$  est un processus progressivement mesurable sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ .

De plus, pour chaque élément  $(t, \omega)$  de  $T \times \Omega$ , la fonction

$$z \mapsto \int_{\mathbb{M}} b(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm)$$

est semi-continue inférieurement sur  $Z$ . Aussi la correspondance

$$(t, \omega) \mapsto \Phi(t, \omega) \triangleq \left\{ z \in Z \mid \int_{\mathbf{M}} b(m, z) v_{\mu}(t, \omega)(dm) = \beta(t, \omega) \right\}$$

est à valeurs dans les fermés non vides de  $Z$ . Montrons que pour tout ouvert  $G$  de  $Z$  le sous-ensemble

$$\Phi^{-}(G) = \{ (t, \omega) \in T \times \Omega \mid \Phi(t, \omega) \cap G \neq \emptyset \}$$

de  $T \times \Omega$  appartient à la tribu  $\mathcal{L}$  des parties progressivement mesurables de ce produit, relativement à la famille croissante de sous-tribus  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ . Comme dans l'espace métrisable  $Z$  tout ouvert est la réunion d'une suite dénombrable de fermés, il suffit en fait de prouver que pour n'importe quel fermé  $F$  de  $Z$  :

$$\Phi^{-}(F) = \{ (t, \omega) \in T \times \Omega \mid \Phi(t, \omega) \cap F \neq \emptyset \} \in \mathcal{L}$$

Mais un fermé dans  $Z$  est lui-même un compact, si bien que :

$$\Phi^{-}(F) = \left\{ (t, \omega) \in T \times \Omega \mid \operatorname{Min}_{z \in F} \int_{\mathbf{M}} b(m, z) v_{\mu}(t, \omega)(dm) = \beta(t, \omega) \right\}$$

et cet ensemble  $\Phi^{-}(F)$  appartiendra effectivement à la tribu  $\mathcal{L}$  si le processus

$$(t, \omega) \mapsto \operatorname{Min}_{z \in F} \int_{\mathbf{M}} b(m, z) v_{\mu}(t, \omega)(dm)$$

est progressivement mesurable sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ . Or cela se démontre en raisonnant exactement comme on l'a déjà fait, pour établir la progressive mesurabilité du processus  $\beta$ .

En conséquence, et conformément au théorème de K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski [8], la correspondance  $\Phi$  possède une section mesurable, c'est-à-dire qu'il existe un processus progressivement mesurable  $\hat{f}^{\mu}$  défini sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  et à valeurs dans  $(Z, \mathcal{B}(Z))$ , vérifiant pour tout couple  $(t, \omega)$  du produit  $T \times \Omega$  :

$$\int_{\mathbf{M}} b(m, \hat{f}^{\mu}(t, \omega)) v_{\mu}(t, \omega)(dm) = \beta(t, \omega)$$

Dans ces conditions, soit  $\tau$  un temps d'arrêt sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  et  $g_{\tau}$  une fonction de décision finale mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F}_{\tau})$  dans  $(Z, \mathcal{B}(Z))$ . Puisque d'après le théorème énoncé en II-3, la probabilité de transition  $v_{\mu}[\tau]$  est une désin-

tégration de la mesure  $\pi_\mu$  sur  $(M \times \Omega, \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}_\tau)$  relativement à la projection canonique de  $M \times \Omega$  sur  $\Omega$ , on a :

$$\begin{aligned} \gamma(\mu, \tau, g_\tau) &= \int_M \left[ \int_\Omega [a[\tau](\omega) + b(m, g_\tau(\omega))] P(m)(d\omega) \right] \mu(dm) \\ &= \int_\Omega a[\tau] P_\mu + \int_\Omega \left[ \int_M b(m, g_\tau(\omega)) v_\mu[\tau](\omega)(dm) \right] P_\mu(d\omega) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \gamma(\mu, \tau, g_\tau) &\geq \int_\Omega a[\tau] P_\mu + \int_\Omega \beta[\tau](\omega) P_\mu(d\omega) \\ &= \int_\Omega a[\tau] P_\mu + \int_\Omega \left[ \int_M b(m, \hat{f}^\mu[\tau](\omega)) v_\mu[\tau](\omega)(dm) \right] P_\mu(d\omega) = \gamma(\mu, \tau, \hat{f}^\mu[\tau]) \end{aligned}$$

Autrement dit, le processus  $\hat{f}^\mu$  est bien une stratégie optimale de décision finale qui ne dépend pas du coût d'observation  $a$ .

Pour terminer ce paragraphe, montrons qu'il existe un processus progressivement mesurable à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$  et à trajectoires continues à droite  $\beta'$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ , qui y définit une surmartingale et qui soit indistinguable du processus  $\beta$ , de telle sorte que pour tout temps d'arrêt  $\tau$  relatif à  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ , on aura :

$$\beta'[\tau] \stackrel{P_\mu - p.s.}{=} \beta[\tau].$$

C'est un résultat qu'on utilisera au paragraphe suivant pour obtenir le temps d'arrêt optimal d'observation  $\hat{\sigma}^\mu$ .

En tant qu'enveloppes inférieures de martingales, les processus  $\beta_j$  pour  $j \in \mathbb{N}$  définissent des surmartingales sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ . Et puisque :

$$\forall (j, t, \omega) \in \mathbb{N} \times T \times \Omega \quad \beta_j(t, \omega) = \text{Inf}_{z \in D} \int_M b_j(m, z) v_\mu(t, \omega)(dm)$$

ils sont aussi à trajectoires semi-continues supérieurement à droite. Prouvons qu'en fait ils sont tous à trajectoires continues à droite. Pour cela, étant donné un indice arbitraire  $j$  de  $\mathbb{N}$  et une éventualité quelconque  $\omega$  dans  $\Omega$  à un certain instant  $s \in T$ , il suffit d'établir que pour toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $T$  supérieurs à  $s$  et convergeant vers cet instant, on a :

$$\liminf_n \beta_j(t_n, \omega) \geq \beta_j(s, \omega)$$

Or quel que soit l'entier naturel  $n$ , il existe une décision  $z_n$  dans  $Z$  pour laquelle :

$$\beta_j(t_n, \omega) = \int_M b_j(m, z_n) v_\mu(t_n, \omega)(dm)$$

Mais on peut extraire de l'ensemble  $\mathbb{N}$  une suite strictement croissante d'entiers  $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de telle sorte, d'une part que :

$$\varliminf_n \beta_j(t_n, \omega) = \lim_p \beta_j(t_{n_p}, \omega)$$

et d'autre part que la suite  $(z_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers un certain point  $z$  de  $Z$ . Pour chaque entier naturel  $h$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \varliminf_n \beta_j(t_n, \omega) &= \lim_p \int_{\mathbf{M}} b_j(m, z_{n_p}) v_\mu(t_{n_p}, \omega)(dm) \\ &\geq \varliminf_p \int_{\mathbf{M}} \left[ \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{\mathbf{B}_k^{jh}}(m) \psi_k^{jh}(z_{n_p}) \right] v_\mu(t_{n_p}, \omega)(dm) - \frac{1}{h+1} \\ &= \varliminf_p \sup_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^l \psi_k^{jh}(z_{n_p}) v_\mu(t_{n_p}, \omega) [\mathbf{B}_k^{jh}] - \frac{1}{h+1} \\ &\geq \sup_{l \in \mathbb{N}} \varliminf_p \sum_{k=0}^l \psi_k^{jh}(z_{n_p}) v_\mu(t_{n_p}, \omega) [\mathbf{B}_k^{jh}] - \frac{1}{h+1} \\ &= \sup_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^l \psi_k^{jh}(z) v_\mu(s, \omega) [\mathbf{B}_k^{jh}] - \frac{1}{h+1} \\ &= \int_{\mathbf{M}} \left[ \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{\mathbf{B}_k^{jh}}(m) \psi_k^{jh}(z) \right] v_\mu(s, \omega)(dm) - \frac{1}{h+1} \\ &\geq \int_{\mathbf{M}} b_j(m, z) v_\mu(s, \omega)(dm) - \frac{2}{h+1} \geq \beta_j(s, \omega) - \frac{2}{h+1} \end{aligned}$$

Il est donc bien prouvé que :

$$\varliminf_n \beta_j(t_n, \omega) \geq \beta_j(s, \omega)$$

et la continuité à droite des trajectoires de tous les processus  $\beta_j$  pour  $j \in \mathbb{N}$  est établie.

Dans ces conditions, l'existence du processus  $\beta'$  est assurée par la proposition indiquée en II-2.

*Remarque au paragraphe III.* — Si le coût de décision finale  $b$  est semi-continu inférieurement sur le produit  $\mathbf{M} \times Z$ , pour toute fonction continue  $\psi$  de  $Z$  dans  $\mathbb{R}$ , le sous-ensemble de  $\mathbf{M} \times Z$ ,

$$\mathbf{A}_\psi = \{ (m, z) \in \mathbf{M} \times Z \mid \psi(z) \geq b(m, z) \}$$



est fermé dans ce produit. Comme  $Z$  est un espace compact, sa projection canonique  $B_\psi$  sur  $M$  est encore fermée, de sorte que la fonction

$$m, z \mapsto b_\psi(m, z) \triangleq \chi_{B_\psi}(m) \cdot (\psi(z) \vee 0)$$

est mesurable de  $(M \times Z, \mathcal{B}(M) \otimes \mathcal{B}(Z))$  dans  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs, dans le théorème de désintégration énoncé en II-3, il n'est pas nécessaire que l'espace  $X$  soit topologique souslinien : il suffit que l'image de la mesure  $\lambda$  par la projection canonique de  $X \times W$  sur  $X$  soit intérieurement régulière par rapport à une classe compacte [12], déf. I-6.2, contenue dans la tribu  $\mathcal{B}$  considérée sur cet ensemble  $X$ . L'existence du système de lois *a posteriori*  $(t, \omega) \mapsto \nu_\mu(t, \omega)$  est donc assurée sur toute sous-tribu dénombrablement engendrée de la tribu borélienne de  $M$  dès que la mesure de Bayes *a priori*  $\mu$  sur cette dernière est intérieurement régulière par rapport aux compacts.

En conséquence, les raisonnements qui ont permis d'aboutir à l'existence de la stratégie optimale de décision finale  $\hat{f}^\mu$  et du processus  $\beta'$  peuvent être adaptés aux modifications apportées à la fin du paragraphe I dans les hypothèses du théorème d'existence, de façon à éviter que l'espace topologique séparé  $M$  des états de la nature soit souslinien.

#### IV. EXISTENCE D'UN TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL D'OBSERVATION

Il s'agit maintenant de prouver l'existence d'un temps d'arrêt  $\hat{\sigma}^\mu$  sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  tel que pour tout autre temps d'arrêt  $\tau$ , on ait :

$$\gamma(\mu, \hat{\sigma}^\mu, \hat{f}^\mu[\hat{\sigma}^\mu]) \leq \gamma(\mu, \tau, \hat{f}^\mu[\tau])$$

Seulement, quand on a montré que  $\hat{f}^\mu$  était bien une stratégie optimale de décision finale, il a été établi que :

$$\gamma(\mu, \tau, \hat{f}^\mu[\tau]) = \int_{\Omega} (a[\tau](\omega) + \beta[\tau](\omega)) P_\mu(d\omega)$$

c'est-à-dire qu'en appelant  $y$  la somme  $a + \beta'$ , il faut que sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu)$  :

$$\mathbb{E}(y[\hat{\sigma}^\mu]) \leq \mathbb{E}(y[\tau])$$

Comme le processus  $\beta'$  définit une surmartingale sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ , dans le cas où  $\mathbb{E}(\beta' [+ \infty]) = + \infty$ , on peut prendre pour  $\hat{\sigma}^\mu$  n'importe quel temps d'arrêt. On admettra donc désormais que la variable aléatoire  $\beta' [+ \infty]$  est  $P_\mu$ -intégrable.

Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des parties  $H$  de  $\Omega$  qui sont  $P_\mu$ -négligeables, c'est-à-dire contenues dans un ensemble  $\mathcal{A}$ -mesurable de mesure  $P_\mu$  nulle. Quel que soit l'instant  $t$  de  $T$ , l'ensemble  $\mathcal{G}_t$  des parties de  $\Omega$  qui s'écrivent :

$$A \Delta H = (A \cap \mathbf{C}H) \cup (\mathbf{C}A \cap H)$$

quand  $A$  et  $H$  parcourent respectivement  $\mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{H}$ , est une tribu contenant  $\mathcal{F}_t$ ; en outre, la famille  $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$  est croissante continue à droite. On va alors établir l'existence d'un temps d'arrêt  $\hat{\sigma}$  sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  tel que pour tout autre temps d'arrêt  $\tau$  on ait :

$$\mathbb{E}(y[\hat{\sigma}]) \leq \mathbb{E}(y[\tau])$$

En effet, tout temps d'arrêt  $\tau$  sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  en est encore un relativement à  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$ ; et inversement [4], IV. 59, le temps d'arrêt  $\hat{\sigma}$  relatif à  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  est  $P_\mu$ -presque sûrement égal à un temps d'arrêt  $\hat{\sigma}^\mu$  sur  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ . Le résultat désiré découlera donc immédiatement de celui qu'on projette établir.

*Pour commencer, supposons que le coût d'observation  $a$  est borné.*

Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble de tous les temps d'arrêt sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$ . On se propose de construire un processus progressivement mesurable  $u$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{I} \quad \overline{u[\sigma]} = \text{Inf}_{L^0} \{ \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_\sigma) \mid \tau \in \mathcal{I} \text{ et } \tau \geq \sigma \}$$

Conformément à l'argumentation indiquée dans l'introduction (§ I), le temps d'arrêt  $\hat{\sigma}$  sera alors le premier instant d'égalité des processus  $y$  et  $u$ . Cependant l'étude de ce processus  $u$  se trouve compliquée par le fait que les trajectoires du processus  $y$  ne sont pas continues à droite; c'est pourquoi cette étude de  $u$  se fera par l'intermédiaire d'un processus  $x$ , qui lui sera à trajectoires continues à droite. De même, l'absence de continuité à gauche des trajectoires des processus  $y$  et  $u$  conduit à définir  $\hat{\sigma}$  indirectement au moyen d'une suite croissante  $(\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de temps d'arrêt, ce qui permettra d'assurer la convergence d'une suite minimisante  $(\rho_l)_{l \in \mathbb{N}}$ .

Étant donné un temps d'arrêt  $\sigma$  sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$ , posons :

$$\mathcal{I}_\sigma = \{ \tau \in \mathcal{I} \mid \tau \geq \sigma \text{ et } \forall \omega \in \Omega \quad \sigma(\omega) < +\infty \Rightarrow \sigma(\omega) < \tau(\omega) \}$$

et considérons la famille des classes  $\mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_\sigma)$  quand  $\tau$  parcourt  $\mathcal{I}_\sigma$ . Si  $\tau'$  et  $\tau''$  sont deux éléments de  $\mathcal{I}_\sigma$ , soit  $g'$  et  $g''$  des représentants  $\mathcal{G}_\sigma$ -mesurables de  $\mathbb{E}(y[\tau'] | \mathcal{G}_\sigma)$  et  $\mathbb{E}(y[\tau''] | \mathcal{G}_\sigma)$  respectivement; l'application  $\tau$  de  $\Omega$  dans  $T$  définie par :

$$\tau = \tau' \chi_A + \tau'' \chi_{\mathbf{C}A} \quad \text{avec :} \quad A = \{ \omega \in \Omega \mid g'(\omega) \leq g''(\omega) \}$$

est encore un temps d'arrêt appartenant à  $\mathcal{J}_\sigma$ , et :

$$\mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_\sigma) = \mathbb{E}(y[\tau'] | \mathcal{G}_\sigma) \wedge \mathbb{E}(y[\tau''] | \mathcal{G}_\sigma)$$

de sorte que la famille de classe considérée est filtrante décroissante dans le cône positif de  $L_{\mathbb{R}}^0(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu)$ . De plus d'après les hypothèses faites sur  $a$  et  $\beta' [+ \infty]$ , il existe au moins un élément de  $\mathcal{J}_\sigma$ , à savoir  $+\infty$ , pour lequel la classe correspondante  $\mathbb{E}(y[+\infty] | \mathcal{G}_\sigma)$  est intégrable. En conséquence, et suivant le théorème de convergence monotone indiqué en II-1, pour toute sous-tribu  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{G}_\sigma$ , on a dans le treillis complet  $L_{\mathbb{R}}^0$  :

$$\mathbb{E} \left[ \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_\sigma} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_\sigma) | \mathcal{E} \right] = \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_\sigma} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{E})$$

Soit maintenant  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de temps d'arrêt sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  et  $\rho$  sa limite. Pour tout entier naturel  $n$  posons  $\sigma'_n = \sigma_n + 1/(n+1)$ . Si  $\tau'$  est un élément de  $\mathcal{J}_\rho$  pour lequel  $\mathbb{E}(\beta'[\tau']) < +\infty$ , la suite des classes  $\beta'[\tau' \vee \sigma'_n]$  pour  $n \in \mathbb{N}$  est une surmartingale uniformément intégrable [11], V. T21, relative à  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu, (\mathcal{G}_{\tau' \vee \sigma'_n})_{n \in \mathbb{N}})$ , et qui converge vers  $\beta'[\tau']$ . Par ailleurs, si  $\omega$  est une éventualité pour laquelle  $\rho(\omega)$  est fini, il existe un entier tel que pour tout indice  $n$  qui lui est supérieur on a  $\tau'(\omega) \geq \sigma'_n(\omega)$ ; par conséquent :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \lim_n a[\tau' \vee \sigma'_n](\omega) = a[\tau'](\omega)$$

C'est pourquoi, en définitive, quelle que soit la sous-tribu  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{G}_\rho$ , on a dans le treillis complet  $L_{\mathbb{R}}^0$  :

$$\begin{aligned} \lim_n \mathbb{E} \left[ \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_{\sigma_n}} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_{\sigma_n}) | \mathcal{E} \right] &= \text{Inf}_n \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_{\sigma_n}} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{E}) \\ &\leq \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_\rho} \text{Inf}_n \mathbb{E}(y[\tau \vee \sigma'_n] | \mathcal{E}) \leq \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_\rho} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{E}) \end{aligned}$$

Comme l'inégalité inverse est immédiate, il est donc prouvé que :

$$\lim_n \mathbb{E} \left[ \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_{\sigma_n}} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_{\sigma_n}) | \mathcal{E} \right] = \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_\rho} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{E})$$

Ce résultat et le précédent seront plusieurs fois utilisés dans ce qui suit.

Ainsi, en posant :

$$\forall t \in T \quad X(t) = \text{Inf}_{\tau \in \mathcal{J}_t} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_t)$$

on définit une sous-martingale sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  à valeurs dans le cône positif de  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu)$ , et la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}(X(t))$  est continue à droite. Il existe donc (§ II-2) un processus progressivement mesurable  $x$  défini sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  et à trajectoires continues à droite, tel qu'en chaque instant  $t$  la variable aléatoire  $x[t]$  soit un représentant  $\mathcal{G}_t$ -mesurable de la classe  $X(t)$ . Et quitte à remplacer  $x$  par sa partie positive et à le modifier

à l'instant  $+\infty$ , on peut supposer en plus qu'il est à valeurs positives et que les variables aléatoires  $x[+\infty]$  et  $y[+\infty]$  sont égales.

Étendons à tous les temps d'arrêt la propriété spécifique qu'on sait déjà vérifiée par le processus  $x$  pour les temps certains, en prouvant que pour tout élément  $\rho$  de  $\mathcal{I}$  :

$$\overline{x[\rho]} = \inf_{\tau \in \mathcal{I}_\rho} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_\rho)$$

Commençons par envisager le cas d'un temps d'arrêt  $\rho$  ne prenant qu'une infinité dénombrable  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de valeurs. On a alors :

$$\overline{x[\rho]} \stackrel{L_0}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} [\inf_{\tau_i \in \mathcal{I}_{r_i}} \mathbb{E}(y[\tau_i] | \mathcal{G}_{r_i})] \overline{\chi_{\{\rho=r_i\}}}$$

Seulement étant donné un temps d'arrêt  $\sigma$  appartenant à  $\mathcal{I}_\rho$ , en posant :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \sigma_i = \sigma \chi_{\{\rho=r_i\}} + (+\infty) \chi_{\{\rho \neq r_i\}}$$

on obtient pour chaque indice  $i$  un élément de  $\mathcal{I}_{r_i}$ , de sorte que :

$$\overline{x[\rho]} \stackrel{L_0}{\leq} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(y[\sigma_i] | \mathcal{G}_{r_i}) \overline{\chi_{\{\rho=r_i\}}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(y[\sigma_i] \chi_{\{\rho=r_i\}} | \mathcal{G}_\rho) = \mathbb{E}(y[\sigma] | \mathcal{G}_\rho)$$

et par conséquent :

$$\overline{x[\rho]} \leq \inf_{\tau \in \mathcal{I}_\rho} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_\rho)$$

Par ailleurs, quel que soit le nombre  $\varepsilon$  strictement positif il existe pour tout indice  $i$  dans  $\mathbb{N}$  un élément  $\sigma'_i$  de  $\mathcal{I}_{r_i}$  pour lequel :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(y[\sigma'_i] | \mathcal{G}_{r_i}) - X(r_i)] < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

Si alors on pose :

$$\sigma' = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sigma'_i \chi_{\{\rho=r_i\}}$$

on obtient un temps d'arrêt qui appartient à  $\mathcal{I}_\rho$ , et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}(y[\sigma'] | \mathcal{G}_\rho) - \overline{x[\rho]}] &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}([\mathbb{E}(y[\sigma'] | \mathcal{G}_\rho) - \overline{x[\rho]}] \overline{\chi_{\{\rho=r_i\}}}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\mathbb{E}(y[\sigma'] \chi_{\{\rho=r_i\}} | \mathcal{G}_{r_i}) - \overline{x[r_i]}] \overline{\chi_{\{\rho=r_i\}}} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}([\mathbb{E}(y[\sigma'_i] | \mathcal{G}_{r_i}) - \overline{x[r_i]}] \overline{\chi_{\{\rho=r_i\}}}) < \varepsilon \end{aligned}$$

En conséquence, et compte tenu de l'inégalité déjà acquise :

$$\inf_{\tau \in \mathcal{J}_\rho} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_\rho) = \overline{x[\rho]}$$

L'égalité annoncée est donc établie pour tous les temps d'arrêt ne prenant qu'une infinité dénombrable de valeurs.

Or étant donné un temps d'arrêt quelconque  $\rho$  sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}})$ , on sait (cf. [11], IV.D43) qu'il est la limite d'une suite décroissante  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de temps d'arrêt ne prenant chacun qu'une infinité dénombrable de valeurs. En particulier, pour tout entier naturel  $n$ , on a d'après ce qui précède :

$$0 \leq \overline{x[\rho_n]} \leq \mathbb{E}(a[+\infty] + \beta'[+\infty] | \mathcal{G}_{\rho_n})$$

de sorte qu'en raison du théorème de La Vallée-Poussin [11], II.T22, et de l'inégalité de Jensen [11], II.47P4, les variables aléatoires  $x[\rho_n]$  pour  $n \in \mathbb{N}$  sont uniformément intégrables. Comme le processus  $x$  est à trajectoires continues à droite, on déduit donc du résultat déjà acquis l'égalité :

$$\overline{x[\rho]} = \lim_n \mathbb{E} \left[ \inf_{\tau \in \mathcal{J}_{\rho_n}} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_{\rho_n}) | \mathcal{G}_\rho \right]$$

si bien que d'après une propriété de convergence établie auparavant :

$$\overline{x[\rho]} = \inf_{\tau \in \mathcal{J}_\rho} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_\rho)$$

Montrons alors que le processus  $u = x \wedge y$  définit une sous-martingale régulière sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mu, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}})$ . En effet, soit  $\rho$  et  $\sigma$  deux temps d'arrêt sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}})$  tels que  $\rho \leq \sigma$ . En appelant A l'événement  $\{\rho = \sigma\}$ , puis en posant :

$$\sigma' = \sigma \chi_{\text{C}_A} + (+\infty) \chi_A$$

on définit un temps d'arrêt  $\sigma'$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{J}_\rho$ , et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u[\sigma] | \mathcal{G}_\rho) &= \overline{u[\rho]} \overline{\chi_A} + \mathbb{E}(u[\sigma'] | \mathcal{G}_\rho) \overline{\chi_{\text{C}_A}} \\ &= \overline{u[\rho]} \overline{\chi_A} + \mathbb{E}(x[\sigma'] \wedge y[\sigma'] | \mathcal{G}_\rho) \overline{\chi_{\text{C}_A}} \end{aligned}$$

Mais le sous-ensemble B de  $\Omega$  où  $x[\sigma']$  est inférieur à  $y[\sigma']$  est un élément de la tribu  $\mathcal{G}_{\sigma'}$ ; de plus :

$$0 \leq \mathbb{E}(y[\sigma'] \chi_{\text{C}_B}) \leq \mathbb{E}(x[\sigma'] \chi_{\text{C}_B}) \leq \mathbb{E}(x[+\infty]) < +\infty$$

aussi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x[\sigma'] \wedge y[\sigma'] | \mathcal{G}_\rho) &= \mathbb{E}(x[\sigma'] \chi_B | \mathcal{G}_\rho) + \mathbb{E}(y[\sigma'] \chi_{\text{C}_B} | \mathcal{G}_\rho) \\ &= \mathbb{E} \left( \inf_{\tau \in \mathcal{J}_{\sigma'}} [\mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_{\sigma'}) \chi_B] | \mathcal{G}_\rho \right) + \mathbb{E}(y[\sigma'] \chi_{\text{C}_B} | \mathcal{G}_\rho) \\ \text{(II-1)} \quad &= \inf_{\tau \in \mathcal{J}_{\sigma'}} \mathbb{E}(y[\tau] \chi_B | \mathcal{G}_\rho) + \mathbb{E}(y[\sigma'] \chi_{\text{C}_B} | \mathcal{G}_\rho) \\ &= \inf_{\tau \in \mathcal{J}_{\sigma'}} \mathbb{E}(y[\tau] \chi_B + y[\sigma'] \chi_{\text{C}_B} | \mathcal{G}_\rho) \end{aligned}$$

Or quel que soit l'élément  $\tau$  de  $\mathcal{J}_{\sigma'}$ , l'application de  $\Omega$  dans  $T$ , égale à  $\tau$  sur  $B$  et à  $\sigma'$  sur  $\bar{C}B$  est un temps d'arrêt qui appartient à  $\mathcal{J}_{\rho}$  de sorte que :

$$\inf_{\tau \in \mathcal{J}_{\sigma'}} \mathbb{E}(y[\tau]\chi_B + y[\sigma']\chi_{\bar{C}B} | \mathcal{G}_{\rho}) \geq \inf_{\tau \in \mathcal{J}_{\rho}} \mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_{\rho}) = \overline{x[\rho]} \geq \overline{u[\rho]}$$

Finalement il est prouvé que :

$$\mathbb{E}(u[\sigma] | \mathcal{G}_{\rho}) \geq \overline{u[\rho]} \overline{\chi_A} + \overline{u[\rho]} \overline{\chi_{\bar{C}A}} = \overline{u[\rho]}$$

c'est-à-dire que le processus  $u$  définit bien une sous-martingale régulière.

Remarquons que dans ces conditions :

$$\inf_{\tau \in \mathcal{J}} \mathbb{E}(y[\tau]) \geq \inf_{\tau \in \mathcal{J}} \mathbb{E}(u[\tau]) = \mathbb{E}(u[0])$$

Par ailleurs, étant donné un nombre strictement positif  $\varepsilon$  il existe un élément  $\tau$  dans  $\mathcal{J}_0$  pour lequel :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_0) - \overline{x[0]}] < \varepsilon$$

Or si  $C$  est l'événement où  $y[0]$  est supérieur à  $x[0]$ , la fonction

$$\sigma = \tau\chi_C + 0\chi_{\bar{C}}$$

de  $\Omega$  dans  $T$  est encore un temps d'arrêt sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  et :

$$\mathbb{E}(y[\sigma] - u[0]) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y[\tau] | \mathcal{G}_0)\chi_C - x[0]\chi_C] < \varepsilon$$

si bien qu'en raison de l'inégalité notée précédemment :

$$\mathbb{E}(u[0]) = \inf_{\tau \in \mathcal{J}} \mathbb{E}(y[\tau])$$

Toutes ces propriétés établies, on peut maintenant prouver l'existence du temps d'arrêt optimal  $\hat{\sigma}$ .

Pour chaque entier naturel  $n$ , soit  $\sigma^n$  la fonction de  $\Omega$  dans  $T$  qui à l'éventualité  $\omega$  associe l'instant :

$$\sigma^n(\omega) = \inf \left\{ t \in T \mid y(t, \omega) - u(t, \omega) < \frac{1}{n+1} \right\}$$

On obtient ainsi [11], IV. T52, une suite croissante de temps d'arrêt sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$ . (C'est uniquement pour obtenir ce résultat qu'il a fallu compléter les tribus  $\mathcal{F}_t$  : si le coût d'observation  $a$  est à trajectoires continues à droite, on peut donc s'en passer [11], IV. 44a, et d'ailleurs toute la démonstration est considérablement simplifiée, car alors les processus  $u$  et  $x$  sont indistinguables). En outre, puisque :

$$\forall (t, \omega) \in T \times \Omega \quad y(t, \omega) - u(t, \omega) = x(t, \omega) \vee y(t, \omega) - x(t, \omega)$$

il résulte de la croissance des trajectoires du coût d'observation  $a$  et de la continuité à droite de celles des processus  $\beta'$  et  $x$  que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq y[\sigma^n] - u[\sigma^n] \leq \frac{1}{n+1}$$

On va montrer que la borne supérieure de la suite  $(\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un temps d'arrêt optimal. Mais pour le moment, définissons simplement  $\hat{\sigma}$  par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \hat{\sigma}(\omega) = \sup_n \sigma^n(\omega)$$

Les processus  $u$  et  $\beta'$  déterminent respectivement une sous-martingale et une sur-martingale sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mu, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathcal{J}})$ , tandis que le coût d'observation  $a$  est à trajectoires continues à gauche. Aussi :

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbb{E}(u[\sigma^n]) &\leq \mathbb{E}(u[\hat{\sigma}]) \\ &\leq \mathbb{E}(y[\hat{\sigma}]) \leq \overline{\lim}_n \mathbb{E}(y[\sigma^n]) \\ &\leq \overline{\lim}_n \mathbb{E}\left(u[\sigma^n] + \frac{1}{n+1}\right) = \sup_n \mathbb{E}(u[\sigma^n]) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$u[\hat{\sigma}] \stackrel{\text{P}\mu\text{-p.s.}}{=} y[\hat{\sigma}]$$

Quel que soit alors le temps d'arrêt  $\tau$  sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathcal{T}})$ , en notant par  $A$  l'événement  $\{\tau > \hat{\sigma}\}$  on peut écrire, puisque  $u$  définit une sous-martingale régulière :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y[\tau]) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(y[\tau \vee \hat{\sigma}] | \mathcal{G}_\tau) \chi_{A^c}] + \mathbb{E}(y[\tau] \chi_A) \\ &\geq \mathbb{E}[\mathbb{E}(u[\tau \vee \hat{\sigma}] | \mathcal{G}_\tau) \chi_{A^c}] + \mathbb{E}(y[\tau] \chi_A) \\ &\geq \mathbb{E}(u[\hat{\sigma}] \chi_A) + \mathbb{E}(y[\tau] \chi_{A^c}) = \mathbb{E}(y[\tau \wedge \hat{\sigma}]) \end{aligned}$$

Si donc  $(\rho_l)_{l \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{J}$  tels que :

$$\lim_l \mathbb{E}(y[\rho_l]) = \inf_{\tau \in \mathcal{J}} \mathbb{E}(y[\tau]) = \mathbb{E}(u[0])$$

on peut supposer que pour tout indice  $l$  le temps d'arrêt  $\rho_l$  est inférieur à  $\hat{\sigma}$ , et aussi, quitte à en extraire une suite partielle, que :

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(y[\rho_l]) - \mathbb{E}(u[0]) < \frac{1}{2^l}$$

Dans ces conditions, pour chacun des éléments de la suite double  $(A_l^n)_{(l,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  d'événements définis par :

$$\forall (l, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad A_l^n = \left\{ \omega \in \Omega \mid y[\rho_l](\omega) - u[\rho_l](\omega) \geq \frac{1}{n+1} \right\}$$

on a, puisque le processus  $u$  détermine une sous-martingale régulière :

$$P_\mu[A_l^n] \leq \frac{n+1}{2^l}$$

de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \bigcap_k \bigcup_{l \geq k} A_l^n \stackrel{P_\mu\text{-p.s.}}{=} \emptyset$$

Autrement dit, quel que soit l'entier naturel  $n$  et pour  $P_\mu$ -presque toute éventualité  $\omega$ , il existe un indice  $k_{n,\omega}$  dans  $\mathbb{N}$  pour lequel :

$$l \geq k_{n,\omega} \Rightarrow y[\rho_l](\omega) - u[\rho_l](\omega) < \frac{1}{n+1} \Rightarrow \rho_l(\omega) \geq \sigma^n(\omega)$$

ce qui implique la convergence presque sûre de la suite  $(\rho_l)_{l \in \mathbb{N}}$  vers le temps d'arrêt  $\hat{\sigma}$ . Mais le processus  $\beta'$  définit une sur-martingale relativement à  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}})$ , tandis que le coût d'observation  $a$  est à trajectoires continues à gauche ; des inégalités

$$\hat{\sigma} \stackrel{\text{p.s.}}{\leq} \liminf_t \rho_t \leq \text{Sup}_t \rho_t \leq \hat{\sigma}$$

on peut donc déduire que :

$$\begin{aligned} \inf_{\tau \in \mathcal{F}} \mathbb{E}(y[\tau]) &\leq \mathbb{E}(a[\hat{\sigma}]) + \mathbb{E}(\beta'[\hat{\sigma}]) \\ &\leq \liminf_t \mathbb{E}(a[\rho_t]) + \liminf_t \mathbb{E}(\beta'[\rho_t]) \\ &\leq \liminf_t \mathbb{E}(y[\rho_t]) = \inf_{\tau \in \mathcal{F}} \mathbb{E}(y[\tau]) \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que  $\hat{\sigma}$  est un temps d'arrêt optimal sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}})$ .

Passons maintenant au cas où le coût d'observation  $a$  n'est plus nécessairement borné. Si quel que soit l'entier naturel  $j$  on pose  $a_j = a \wedge j$ , le coût  $a$  apparaît comme l'enveloppe supérieure d'une suite croissante  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de coûts d'observation pour lesquels la démonstration précédente est licite. Dans ces conditions, pour chaque indice  $j$  dans  $\mathbb{N}$ , appelons  $y_j$  la somme  $a_j + \beta'$  et introduisons :

$$\forall t \in \mathbb{T} \quad X_j(t) = \inf_{\tau \in \mathcal{F}_t} \mathbb{E}(y_j[\tau] | \mathcal{G}_t)$$

Du fait que les différences  $\alpha_{j+1} = a_{j+1} - a_j$  pour  $j \in \mathbb{N}$  sont des processus à trajectoires croissantes, on a :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad X_{j+1}(t) \geq X_j(t) + \overline{\alpha_{j+1}[t]}$$

Si donc pour tout entier naturel  $j$ , on considère un processus progressivement mesurable  $x_j$  sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}})$  à trajectoires continues à droite, positif,



tel qu'en chaque instant  $t \in T$  la variable aléatoire  $x_j[t]$  soit un représentant  $\mathcal{G}_t$ -mesurable de la classe  $X_j(t)$ , et que  $x_j[+\infty] = y_j[+\infty]$ , on peut supposer en plus que  $x_{j+1}$  est supérieur à  $x_j + \alpha_{j+1}$  dans  $\mathbb{R}^{+T \times \Omega}$ , de sorte qu'en posant  $u_j = x_j \wedge y_j$  on a :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad y_{j+1} - u_{j+1} \leq y_j - u_j$$

En conséquence les temps d'arrêt  $\sigma_j^n$  définis pour chaque couple  $(j, n)$  d'éléments de  $\mathbb{N}$  par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \sigma_j^n(\omega) = \text{Inf} \left\{ t \in T \mid y_j(t, \omega) - u_j(t, \omega) < \frac{1}{n+1} \right\}$$

vérifient :

$$\forall (n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \sigma_{j+1}^n \leq \sigma_j^n$$

si bien que :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \hat{\sigma}_{j+1} \triangleq \bigvee_n \sigma_{j+1}^n \leq \bigvee_n \sigma_j^n \triangleq \hat{\sigma}_j$$

Soit alors  $\hat{\sigma}$  l'enveloppe inférieure dans  $T^\Omega$  de la suite  $(\hat{\sigma}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ . Pour n'importe quel temps d'arrêt  $\tau$  sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  il vient, en raison de la démonstration antérieure relative au cas d'un coût d'observation borné :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y[\tau]) &= \lim_j \mathbb{E}(y_j[\tau]) \geq \lim_j \mathbb{E}(y_j[\hat{\sigma}_j]) \\ &= \lim_j [\mathbb{E}(a_j[\hat{\sigma}_j]) + \mathbb{E}(\beta'[\hat{\sigma}_j])] \\ &\geq \lim_j [\mathbb{E}(a_j[\hat{\sigma}]) + \mathbb{E}(\beta'[\hat{\sigma}_j])] \\ &\geq \mathbb{E}[\lim_j (a_j[\hat{\sigma}] + \beta'[\hat{\sigma}_j])] \\ &= \mathbb{E}(a[\hat{\sigma}] + \beta'[\hat{\sigma}]) = \mathbb{E}(y[\hat{\sigma}]) \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\hat{\sigma}$  est un temps d'arrêt optimal sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$  pour le coût d'observation  $a$ . Comme on l'a déjà remarqué au début de ce paragraphe, on obtient alors un temps d'arrêt optimal d'observation  $\hat{\sigma}^\mu$  pour le problème de décision bayésienne étudié, en considérant simplement un temps d'arrêt relatif à  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  qui soit  $P_\mu$ -presque sûrement égal à  $\hat{\sigma}$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] H. BERLIOCCI et J. M. LASRY, Intégrales normales et mesures paramétrées en calcul des variations, *Bull. Soc. math. France*, t. 101, 1973, p. 129-184.  
 [2] N. BOURBAKI, *Topologie générale, chapitre 9*, 2<sup>e</sup> édition, Hermann, Paris, 1958 (\*).

(\*) Il est maintenant bien connu que les résultats essentiels relatifs aux espaces sous-liniens établis dans cette référence n'exigent pas l'hypothèse de métrisabilité qui y est faite, et ce, sans autre modification des démonstrations.

- [3] N. BOURBAKI, *Topologie générale. chapitre 10*, 2<sup>e</sup> édition, Hermann, Paris, 1961.
- [4] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel, chapitre 1 à 4*, édition entièrement refondue, Hermann, Paris, 1975.
- [5] C. FOURGEAUD et A. FUCHS, *Statistique*, Dunod, Paris, 1967.
- [6] A. IRLE, Decision theory for continuous observations: minimax solutions, *Metrika*, t. **24**, n° 3, 1977, p. 163-168.
- [7] A. IRLE and N. SCHMITZ, *Decision theory for continuous observations I, Bayes solutions*, Trans. Seventh Prague Conf. on Information Theory, Statis. Decision Functions, Random Processes and Eighth European Meeting of Statisticians, Tech. Univ. Prague, 1974, vol. B.
- [8] K. KURATOWSKI and C. RYLL-NARDZEWSKI, A general theorem on selectors, *Bull. Acad. Sci. polon.*, t. **13**, 1965, p. 397-403.
- [9] E. LANERY, *Résultats mathématiques pour la théorie de la décision statistique*, Université Paris IX Dauphine (multigraphié), 1979.
- [10] E. LANERY, *Solutions bayésiennes en théorie de la décision statistique*, Université Paris IX Dauphine (multigraphié), 1980.
- [11] P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, 1966.
- [12] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1964.
- [13] L. SCHWARTZ, Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure, *J. Anal. Math.*, t. **26**, 1973, p. 1-168.
- [14] J. L. SNELL, Applications of martingale system theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **73**, 1952, p. 293-312.
- [15] M. THOMPSON, Continuous parameter optimal stopping problems, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, t. **19**, 1971, p. 302-318.
- [16] J. ULMO, La décision statistique dans le cadre bayésien, *Rev. Stat. Appl.*, t. **19**, n° 3, 1971, p. 27-66.
- [17] A. WALD, *Statistical Decision Functions*, J. Wiley, New York, 1950 (reprint: Chelsea Publishing Co., Bronx N. Y., 1971).
- [18] A. WALD and J. WOLFOWITZ, Bayes Solution of Sequential Decision Problems, *Ann. Math. Stat.*, t. **21**, 1950.