P. BALDI

Caractérisation des groupes de Lie connexes récurrents

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 3 (1981), p. 281-308
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_3_281_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 3-1981, p. 281-308. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Caractérisation des groupes de Lie connexes récurrents

par

P. BALDI

Istituto di Matematica « L. Tonelli »,
Via Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italie

INTRODUCTION

Soit G un groupe L. C. D., V un voisinage relativement compact de l'élément neutre qui engendre G, m sa mesure de Haar. On dira que G est à croissance polynomiale d'ordre $\leq \alpha$ s'il existe $c > 0$ telle que

$$m(\mathrm{V}^n) \leq cn^\alpha \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*$$

On dit qu'il est à croissance exponentielle s'il existe $c > 0$, $\rho > 1$ tels que

$$m(\mathrm{V}^n) \geq c\rho^n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

En 1967, H. Kesten ([*12*]) proposa la conjecture suivante :

Un groupe discret à croissance exponentielle est transitoire.

Dans le but de donner une classification des groupes du point de vue de la récurrence, on a ensuite proposé la conjecture suivante plus précise :

Un groupe L. C. D. est récurrent si, et seulement si, il est à croissance polynomiale d'ordre ≤ 2.

Actuellement on sait démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 0.1. — Un groupe de Lie connexe est récurrent si, et seulement si, il est à croissance polynomiale d'ordre ≤ 2.

Dans cet article on va donner une démonstration de ce théorème. Les arguments qui suivent se trouvent déjà dans la littérature mais sous une forme très éparse, peu accessible, et qu'on a pu beaucoup simplifier. L'essentiel des résultats, à l'exception du début de la section 2 est dû à Y. Guivarc'h, M. Keane et B. Roynette.

Le paragraphe 2.1, qui contient l'étape clé de réduction du problème à l'étude des marches aléatoires symétriques et à support compact, est dû à J. Peyrière, N. Lohoué et à l'auteur de cet article.

Dans la première section, on va énoncer des théorèmes de structure qui permettront la réduction à des cas particuliers qui seront étudiés dans la deuxième section.

Une troisième section sera consacrée aux développements possibles.

1.

1. Cas général.

DÉFINITION 1.1. — Soit G un groupe de Lie, $\mathscr{G}$ son algèbre de Lie ; on dira que G est de type R si pour tout $g \in G$ les valeurs propres de l'application ad $g : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ sont de module égal à 1.

On étudiera séparément les deux cas, G de type R ou non. Dans le deuxième cas, la question est résolue depuis assez longtemps et découle des faits généraux suivants qui sont contenus dans [*9*] ou [*10*].

PROPOSITION 1.1. — Un groupe G de Lie connexe est de type R si, et seulement si, il est moyennable et unimodulaire ainsi que ses quotients.

PROPOSITION 1.2. — Un groupe L. C. D. récurrent est unimodulaire et moyennable ainsi que ses quotients.

PROPOSITION 1.3. — Un groupe de Lie connexe est soit à croissance polynomiale soit à croissance exponentielle. Il est de type R si, et seulement si, il est à croissance polynomiale.

Si G n'est pas de type R, il est donc transitoire et à croissance exponentielle.

2. Cas de type R.

Soit G un groupe de Lie connexe, R son radical, $\mathscr{G}$ son algèbre de Lie. Soit $\mathscr{G} = \mathscr{R} + \mathscr{K}$ une décomposition de Levi de $\mathscr{G}$ où $\mathscr{R}$ est l'algèbre de Lie de R et $\mathscr{K}$ une sous-algèbre de Lie semi-simple. Comme G/R est un groupe semi-simple, si G est récurrent G/R est compact, car les groupes semi-simples non compacts sont non moyennables et donc transitoires. Si K est le sous-groupe analytique correspondant à $\mathscr{K}$, il sera donc compact et G = RK.

PROPOSITION 1.4. — G a une croissance au moins aussi rapide que ses sous-groupes fermés à génération compacte et ses quotients. Si H est un sous-groupe compact distingué G et G/H ont même croissance.

Pour une démonstration voir [*9*].

Si $\mathscr{K}$ est un idéal de $\mathscr{G}$, K est distingué dans G et comme le quotient par un sous-groupe compact ne change rien ni à la croissance ni à la récurrence, on pourra supposer G résoluble. On va maintenant donner deux théorèmes de structure suivant que $\mathscr{K}$ n'est pas un idéal de $\mathscr{G}$ ou que G est résoluble.

PROPOSITION 1.5. — Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe. G possède un sous-groupe compact maximum K, connexe et central tel que G/K soit simplement connexe et sans torsion (à savoir sans sous-groupes compacts non triviaux).

Démonstration. — Si Z est le centre de G alors Z est connexe et G/Z est simplement connexe (voir la démonstration du corollaire 3.6.3 de [*19*]). Soit K le sous-groupe compact distingué maximum de G. Alors K/Z est un sous-groupe compact de G/Z qui est simplement connexe et donc ([*11*]), théorème 2.3, p. 138) réduit à l'élément neutre.

Donc $K \subset Z$ et K est connexe car Z est abélien et connexe. Soit K′ un sous-groupe compact de G. Montrons que $K' \subset K$. Si $K' \subset Z$ cela est évident ; sinon G/Z aurait un sous-groupe compact non trivial ce qui n'est pas possible car G/Z est simplement connexe ; donc $K' \subset K$ et G/K est sans torsion.

Montrons que G/K est simplement connexe par induction sur la longueur de G. Si G est de longueur 1, il est abélien et cela est évident.

Supposons que cela soit vrai pour les groupes de longueur $r - 1$. Alors Z est un groupe abélien et sans torsion et donc simplement connexe et G/Z est simplement connexe. Il s'ensuit que G lui-même est simplement connexe.

THÉORÈME 1.1. — Soit G un groupe de Lie connexe de type R tel que la partie semi-simple $\mathscr{K}$ dans une décomposition de Levi de $\mathscr{G}$ ne soit pas un idéal. Il existe alors un quotient de G qui est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R}^d \times {}_\sigma K$ où K est un groupe de rotations qui opère de façon irréductible sur $\mathbb{R}^d$ et $d \geq 3$.

Démonstration. — La preuve consiste, par des quotients successifs, à arriver à appliquer le résultat suivant ([*11*], p. 39).

LEMME 1.1. — Soit G un groupe topologique contenant l'espace vectoriel V comme sous-groupe fermé distingué. Si G/V est compact, V est un facteur semi-direct de G.

Soit N le sous-groupe fermé [G, R], N′ le sous-groupe analytique correspondant à l'idéal $[\mathcal{G}, \mathcal{R}]$; N′ aussi est nilpotent. Soit H le sous-groupe compact dont l'existence est garantie par la proposition 1.5. H est central dans G. En effet, il est distingué car toute image de H par un automorphisme intérieur de G est un sous-groupe compact de N et donc contenu dans H. Ensuite le groupe des automorphismes d'un groupe compact étant discret et G connexe, son action sur H est triviale.

De plus le groupe G/H satisfait encore aux hypothèses du théorème. Il suffit pour cela de vérifier que $[\mathcal{R}, \mathcal{K}]$ n'est pas contenu dans l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ de H. Si c'était le cas, en effet, comme $\mathcal{H}$ est central, par l'identité de Jacobi, on aurait

$$\{0\} = [\mathcal{K}, [\mathcal{K}, \mathcal{R}]] = [\mathcal{K}, \mathcal{R}] \neq \{0\}$$

On peut donc se borner à considérer G/H et supposer que N est simplement connexe, ce qui entraîne N′ = N ([*11*], p. 135) et donc le fait que l'algèbre de Lie de N soit $[\mathcal{G}, \mathcal{R}]$.

Soit K le sous-groupe compact semi-simple maximal correspondant à $\mathcal{K}$ et F la composante neutre des éléments de N qui sont invariants par l'action des automorphismes intérieurs des éléments de K. F est fermé et son algèbre de Lie $\mathcal{F}$ est caractérisée par

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{N}, [\mathcal{K}, f] = 0\}$$

D'abord $\mathcal{F} \neq \mathcal{N}$, car $[\mathcal{K}, \mathcal{R}] \subset \mathcal{N}$ et $[\mathcal{K}, [\mathcal{K}, \mathcal{R}]] = [\mathcal{K}, \mathcal{R}] \neq \{0\}$. Ensuite soit N′ = [N, N], alors FN′ ≠ N sinon le lemme suivant entraînerait $\mathcal{F} = \mathcal{N}$.

LEMME 1.2. — Soit $\mathcal{N}$ une algèbre de Lie nilpotente, alors toute sous-algèbre contenant un supplémentaire de $\mathcal{N}' = [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ coïncide avec $\mathcal{N}$.

Démonstration. — Le résultat est évident si $\mathcal{N}$ est abélienne. Soit

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{(1)} \supset \ldots \supset \mathcal{N}^{(r)} \supset \mathcal{N}^{(r+1)} = \{0\}$$

la suite centrale descendante de $\mathcal{N}$ et supposons le résultat vrai pour $r - 1$. Si $\mathcal{N}$ est une algèbre de longueur r et $\mathcal{F}$ une sous-algèbre contenant un supplémentaire de $\mathcal{N}^{(2)} = \mathcal{N}'$, et $\mathcal{M} = \mathcal{N}/\mathcal{N}^{(r)}$, $\mathcal{M}$ est une algèbre de longueur $r - 1$ et l'image $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ dans le quotient est une sous-algèbre contenant un supplémentaire de $[\mathcal{M}, \mathcal{M}] = \mathcal{N}'/\mathcal{N}^{(r)}$, donc $\mathcal{F}_1 = \mathcal{M}$. $\mathcal{F}$ contient donc un supplémentaire de $\mathcal{N}^{(r)}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\mathcal{N}^{(r)} \subset \mathcal{F}$; en effet comme $\mathcal{N}^{(r)}$ est central

$$\mathcal{N}^{(r)} \subset \mathcal{N}' = [\mathcal{F} + \mathcal{N}^{(r)}, \mathcal{F} + \mathcal{N}^{(r)}] = [\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}$$

Donc FN' $\neq$ N. De plus FN' est un sous-groupe distingué de G. Vérifions pour cela que $\mathcal{F} + \mathcal{N}'$ est un idéal ; comme $\mathcal{N}'$ est un idéal il suffit de voir que

$$[\mathcal{G}, \mathcal{F}] = [\mathcal{R}, \mathcal{F}] + [\mathcal{K}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F} + \mathcal{N}'$$

or $[\mathcal{K}, \mathcal{F}] = \{0\}$ et, comme $[\mathcal{N}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{N}'$, il faut montrer que si $r \in \mathcal{R}$ et $f \in \mathcal{F}$ il existe $n \in \mathcal{N}$ tel que $[r, f] - [n, f] \in \mathcal{F}$. Or

$$[k, [r - n, f]] = - [f, [k, r - n]]$$

et on doit avoir $[k, r] = [k, n]$ pour tout $k \in \mathcal{K}$. Mais comme $\mathcal{K}$ est semi-simple et opère sur $\mathcal{N}$, il existe un supplémentaire $\mathcal{W}$ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{R}$ stable par $\mathcal{K}$ et évidemment $[\mathcal{K}, \mathcal{W}] \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Si $r \in \mathcal{R}$, on peut écrire de façon unique $r = n + w$ et $[k, r] = [k, n]$.

Vérifions que les hypothèses restent vraies pour G/FN', à savoir que $[\mathcal{K}, \mathcal{R}]$ n'est pas contenu dans $\mathcal{F} + \mathcal{N}'$.

En effet $\mathcal{F} + \mathcal{N}'$ est stable par la représentation adjointe de $\mathcal{K}$ et comme $\mathcal{K}$ est semi-simple, il existe un supplémentaire $\mathcal{V}$ non trivial de $\mathcal{F} + \mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ qui est stable par $\mathcal{K}$ et $[\mathcal{K}, \mathcal{V}] \neq \{0\}$, sinon on aurait $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}$.

On peut donc supposer que N est un espace vectoriel réel et sans points fixes par l'action de K.

Montrons maintenant que l'on peut supposer que G/N opère sur N de façon irréductible. Sinon soit N_1 un sous-espace propre de N invariant par l'action de G/N et de dimension maximale. Soit $\mathcal{N}_1$ l'algèbre de Lie de N_1 et $\mathcal{N}_2$ un supplémentaire de $\mathcal{N}_1$ dans $\mathcal{N}$ stable par l'action adjointe de $\mathcal{K}$. Alors $[\mathcal{K}, \mathcal{N}_2] = \mathcal{N}_2$ car autrement pour un supplémentaire stable $\mathcal{V}$ de $[\mathcal{K}, \mathcal{N}_2]$ dans $\mathcal{N}_2$ on aurait $[\mathcal{K}, \mathcal{V}] = \{0\}$ et donc $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}$. Ainsi G/N_1 satisfait encore les hypothèses, car sinon $[\mathcal{K}, \mathcal{R}] \subset \mathcal{N}_1$, ce qui n'est pas possible parce que $[\mathcal{K}, \mathcal{R}] \supset [\mathcal{K}, \mathcal{N}_2] = \mathcal{N}_2$. On peut donc se borner à considérer G/N_1 et supposer que G/N opère de façon irréductible sur N, puisque N_1 était de dimension maximale.

Soit A la composante neutre du groupe des éléments de R qui sont fixes par l'action de K. Évidemment $N \cap A = \{ e \}$ et de plus $R = NA$: en effet, on a déjà vu que pour tout $r \in \mathscr{R}$ il existe $n \in \mathscr{N}$ tel que $[k, r - n] = 0$ et donc $\mathscr{R} = \mathscr{N} + \mathscr{A}$. A est abélien, car $[A, A] \subset N \cap A = \{ e \}$ et de plus l'action de A sur N commute avec celle de G/N.

N étant un espace vectoriel réel on peut l'identifier à son algèbre de Lie et si $a \in A$ les valeurs propres de l'action de a sur N sont de module unitaire, car G est de type R. Comme l'action de A commute avec l'action irréductible de G/N deux cas sont possibles. Ou bien 1 est valeur propre de a et alors son action est triviale, ou bien e^{it}, $t \neq 2k\pi$, est valeur propre et il existe alors une base de N dans laquelle l'action de a est donnée par une matrice dont les éléments sont tous nuls sauf des blocs sur la diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Soit B le sous-groupe des éléments de A dont l'action sur N est triviale. B est central et A/B est soit $\{ e \}$ soit un tore T. On peut ainsi appliquer le lemme 1.1 et G est le produit semi-direct de N et du sous-groupe compact K ou $K \times T$. L'action se fait alors par rotations car K (ou $K \times T$) est compact.

Il ne reste plus qu'à voir que N a une dimension $d \geq 3$.

Si $d = 1$ comme G/N est connexe et opère par rotations son action serait triviale, contre l'hypothèse.

Si $d = 2$, l'action de G/N étant une rotation irréductible, G/N serait isomorphe à SO(2), ce qui n'est pas possible car ce dernier est résoluble.

Soient

G_d : le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$: l'ensemble des couples (x, u), $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in SO(d)$ muni de l'opération

$$(x, u) \cdot (y, v) = (x + uy, uv)$$

$\tilde{G}_2$: le revêtement universel de G_2 : l'ensemble des couples $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ avec la loi de composition

$$(z, x) \cdot (z', x') = (z + e^{ix}z', x + x').$$

H_1 : le premier groupe de Heisenberg : $\mathbb{R}^3$ avec l'opération

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y) \right)$$

Δ : le groupe « diamant » : le produit semi-direct $H_1 \times_\sigma T$ de H_1 par le tore opérant par rotations sur les coordonnées x, y. Donc

$$(x, y, z, i^{it}) \cdot (x', y', z', e^{it'}) = (x + x' \cos t - y' \sin t,\ y + x' \sin t + y' \cos t,\ z + z' + \frac{1}{2}[x(x' \sin t + y' \cos t) - y(x' \cos t - y' \sin t)],\ e^{i(t+t')})$$

Le groupe H_1 est nilpotent et à croissance polynomiale d'ordre 4. $\tilde{G}_2$ et Δ sont résolubles non nilpotents, à croissance polynomiale d'ordre 3 et 4 respectivement.

THÉORÈME 1.2. — Soit G un groupe de Lie résoluble connexe de type R dont le quotient par son sous-groupe compact distingué maximum est distinct de $\{ e \}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, G_2. Alors si G est nilpotent, il admet H_1 ou $\mathbb{R}^3$ comme quotient, sinon il admet comme quotients Δ, $\tilde{G}_2$ ou le produit semi-direct de R^d par un groupe compact abélien de rotations.

Démonstration. — Supposons d'abord G nilpotent. Quitte à remplacer G par le quotient par son sous-groupe distingué compact maximum, grâce à la proposition 1.6, on peut supposer G simplement connexe. G/G' est donc un espace vectoriel réel. Si d est sa dimension et $d \geq 3$ le résultat est prouvé. D'autre part, si $d = 1$, par le lemme 1.2, l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ de G serait engendrée par un élément, ce qui entraînerait $G = \mathbb{R}$. Si $d = 2$, le même argument prouve que la dimension de G' est 1 et donc $G \simeq H_1$.

Soit $G'' = [G', G']$. Quitte à considérer G/G'' on peut une fois encore supposer que G' est un espace vectoriel. Évidemment $\dim G' > 1$ car sinon G, qui est connexe et de type R, opérerait de façon triviale sur G' et serait donc nilpotent. Comme $[G', G'] = \{ e \}$ l'action de G sur G' est abélienne ; de plus il n'est pas possible que l'action de G sur G' admet 1 comme seule valeur propre, sinon G serait nilpotent. Il existe donc $g \in G$ dont l'action sur G' admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ de module 1. Comme les sous-espaces de G' invariants par l'action de G sont des sous-groupes distingués, on peut supposer par passage au quotient que $G' = \mathbb{R}^2$ et que l'action de G sur G' se fait par rotations.

Si N est la composante connexe des éléments de G qui opèrent de façon triviale sur G' et $\sigma : G/N \to \operatorname{Aut} G'$ est l'action de G/N sur G', $\ker \sigma$ est discret et central et l'image de σ est un sous-groupe connexe non trivial de SO(2), donc SO(2) tout entier. Si $\mathscr{N}$ est l'algèbre de Lie de N, $\dim \mathscr{N} = \dim \mathscr{G} - 1$, car SO(2) a la dimension 1. De plus N est un sous-groupe distingué de G car $[\mathscr{N}, \mathscr{N}] \subset \mathscr{G}'$ et $[\mathscr{N}, \mathscr{G}'] = 0$. Il est donc le nilradical puisqu'il est de dimension maximale. $\mathscr{N}$ est même abélien.

Soit en effet $[a, g'] \neq 0$ pour un a et pour tout $g' \in \mathscr{G}'$ non nul. Si $n_1, n_2 \in \mathscr{N}$ alors $[n_1, n_2] \in \mathscr{G}'$ et $[a, [n_1, n_2]] = - [n_1, [n_2, a]] - [n_2, [a, n_1]] = 0$ donc $[n_1, n_2] = 0$.

Posons alors $\mathscr{F} = \ker (\mathrm{Ad}\, a) \cap \mathscr{N}$. $\mathscr{F}$ est un idéal central de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{N}$ est la somme directe de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}'$. Ce dernier point résulte du fait que $[a, n] \in \mathscr{G}'$ et, Ad a étant inversible sur $\mathscr{G}'$, il existe $g' \in \mathscr{G}'$ tel que $[a, g'] = [a, n]$ et donc $[a, g' - n] = 0$.

Deux cas sont alors possibles : ou bien G/N n'est pas compact et on peut le supposer isomorphe à $\mathbb{R}$ et $G/F \simeq \tilde{G}_2$, ou alors il est compact et dans ce cas il est isomorphe à SO(2). Alors, si $F = \exp \mathscr{F}$, F n'est pas compact, car sinon G/G′ serait compact et par passage au quotient, éventuellement, on aurait $F \simeq R$. G est donc le produit semi-direct de SO(2) opérant par rotations sur G′ et trivialement sur F. Donc $G \simeq \Delta$.

Reste à considérer le cas où G/G′ est compact. Par la proposition 1.5, on peut supposer G′ simplement connexe. Soit encore $G'' = [G', G']$ et supposons $\dim G'/G'' > 3$. Par le lemme 1.1, G/G″ est alors le produit semi-direct du groupe compact abélien G/G′ par l'espace vectoriel G′/G″. Si $\dim G'/G'' = 2$, alors $G'' \neq \{ e \}$ sinon un quotient de G par un sous-groupe compact serait isomorphe à G_2. En appliquant à G′ les mêmes arguments qu'au début pour les groupes nilpotents, on peut ainsi supposer $G' \simeq H_1$. G est alors le produit semi-direct de G/G′ opérant par automorphismes sur H_1, donc par rotations sur $G'/G'' \simeq \mathbb{R}^2$ et trivialement sur G″ qui est central.

Donc si K_1 est le sous-groupe de K des éléments opérant trivialement sur G′ on a $K/K_1 \simeq SO(2)$ et $G/K_1 \simeq \Delta$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que si $\dim G'/G'' = 1$ par le lemme 1.2, $G' \simeq \mathbb{R}$.

THÉORÈME 1.3. — Le théorème 1 est vrai si, et seulement si, les groupes H_1, $\tilde{G}_2$, Δ et $\mathbb{R}^d x_\sigma K$, où $d \geqslant 3$ et K un sous-groupe de SO(d), sont transitoires.

Démonstration. — Si G est à croissance polynomiale d'ordre ≤ 2, il est de type R et les théorèmes 1.1 et 1.2 avec la proposition 1.6 montrent que son quotient par le sous-groupe distingué compact maximum est $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, G_2 ou $\{ e \}$ et qu'il est donc récurrent (pour la récurrence de G_2, voir [7]).

Inversement si G est récurrent et si les groupes cités sont transitoires, par les théorèmes 1.1 et 1.2 le quotient par le sous-groupe compact maximum est $\{ e \}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou G_2 et par la proposition 1.6, il est à croissance polynomiale d'ordre ≤ 2.

2.

1. Considérations générales.

Dans cette section, on va établir que $\tilde{G}_2$, H_1, Δ, $\mathbb{R}^d x_\sigma K$ sont transitoires. Les lois de probabilité considérées dans la suite seront toujours supposées adaptées, à savoir telles que le plus petit sous-groupe fermé contenant leur support est G lui-même. La marche aléatoire associée à la loi de probabilité μ sera la marche à droite et si f est une fonction on notera

$$\mu(f) = \int f d\mu$$

et $\check{\mu}$ sera l'image de μ par l'application $g \to g^{-1}$; μ^n désignera le produit de convolution $\mu * \ldots * \mu$ (n fois).

Le résultat suivant, qui se trouve dans [*4*], va nous permettre de faire des hypothèses essentielles sur la loi μ des marches aléatoires considérées.

PROPOSITION 2.1. — Un groupe topologique L. C. D. est transitoire si, et seulement si, sont transitoires les marches dont la loi est symétrique et à support compact.

La démonstration est une conséquence des trois lemmes suivants.

LEMME 2.1. — Soit H un espace de Hilbert, A et B deux opérateurs bornés inversibles sur H tels que pour tout $x \in H$

$$(Bx, x) \geq (Ax, x) > 0$$

et tels que $A = A^*$. On a alors pour tout $x \in H$

$$(A^{-1}x, x) \geq (B^{-1}x, x) > 0 .$$

Démonstration. — Si on pose $A^{-1}x = y_1$, $B^{-1}x = y_2$ en appliquant l'inégalité de Schwartz au produit scalaire $[x, y] = (x, Ay)$, on a

$$\begin{aligned}(B^{-1}x, x)^2 = (y_2, Ay_1)^2 &\leq (y_2, Ay_2)(y_1, Ay_1)\\ &\leq (y_2, By_2)(y_1, Ay_1) = (B^{-1}x, x)(A^{-1}x, x) .\end{aligned}$$

LEMME 2.2. — La marche de loi μ est transitoire si la marche de loi $\nu = \frac{1}{2}(\mu + \check{\mu})$ l'est.

Démonstration. — Si T_ν et T_μ désignent les opérateurs de convolution sur $L^2(G)$ respectivement par rapport à ν et μ, on a pour toute $f \in L^2(G)$

$$(T_\mu f, f) = (T_\nu f, f)$$

et si $0 < \lambda < 1$

$$((I - \lambda T_\mu)f, f) = ((I - \lambda T_\nu)f, f) > 0$$

comme $T_\nu^* = T_{\check{\nu}} = T_\nu$; par le lemme précédent

$$((I - \lambda T_\nu)^{-1} f, f) \geq ((I - \lambda T_\mu)^{-1} f, f) > 0 .$$

Si f est positive, bornée et à support compact

$$\Sigma_n \lambda^n \mu^n (f * \check{f}) = (\Sigma_n \lambda^n \mu^n * f, f)$$
$$= ((I - \lambda T_\mu)^{-1} f, f) \leq ((I - \lambda T)^{-1} f, f) = \Sigma_n \lambda^n \nu^n (f * \check{f}) .$$

Donc le potentiel de ν majore celui de μ sur les fonctions de la forme $f * \check{f}$ et si ν est transitoire μ l'est aussi.

LEMME 2.3. — Soit μ une loi symétrique, φ une fonction symétrique positive sur G, ≤ 1, strictement positive sur un ouvert et à support compact. Soit $\gamma = \sum_0^\infty \frac{\mu^n}{2^{n+1}}$, $\gamma_1 = \frac{1}{\gamma(\varphi)} \varphi \cdot \gamma$. Alors si γ_1 est transitoire, μ l'est également.

Démonstration. — Il est bien connu que μ et γ sont récurrentes ou transitoires en même temps et le support de γ est G tout entier car μ est adaptée. On peut écrire

$$\gamma = \varphi \cdot \gamma + (1 - \varphi) \cdot \gamma = \gamma(\varphi)\left(\frac{1}{\gamma(\varphi)} \varphi \cdot \gamma\right)$$
$$+ (1 - \gamma(\varphi))\left(\frac{1}{1 - \gamma(\varphi)}(1 - \varphi) \cdot \gamma\right) = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2$$

où

$$c_1 = \gamma(\varphi), \qquad c_2 = (1 - \gamma(\varphi)), \qquad \gamma_2 = \frac{1}{1 - \gamma(\varphi)}(1 - \varphi) \cdot \gamma$$

et évidemment $c_1 > 0$.

Pour tout $0 \leqslant \lambda < 1$ et $f \in L^2(G)$, on a

$$((I - \lambda T_\gamma)f, f) = c_1((I - \lambda T_{\gamma_1})f, f) + c_2((I - \lambda T_{\gamma_2})f, f) \geq c_1((I - \lambda T_{\gamma_1})f, f) .$$

Donc encore

$$\sum_{0}^{+\infty}{}_n \lambda^n \gamma^n(f*f) \leq \frac{1}{c_1} \sum_{0}^{+\infty}{}_n \lambda^n \gamma_1^n(f*f).$$

Remarque. — Les lemmes précédents démontrent quelque chose de plus que la proposition 2.1. Pour la démonstration de la transience il suffit par exemple de se borner à l'étude des marches dont la loi est symétrique et le support contenu dans n'importe quel compact symétrique fixé à l'avance.

L'outil essentiel pour démontrer que les quatre groupes en question sont transitoires est fourni par le lemme suivant.

LEMME 2.4. — Soit G un groupe L. C. D., μ une loi de probabilité sur G. Supposons qu'il existe sur G une fonction f continue (qu'on va appeler fonction barrière) et un compact K_0 tels que

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} f(g) < 1 & \text{pour tout } g \in G \\ \lim\limits_{g \to \partial} f(g) = 1 & \end{cases}$$

$$\text{(2)} \qquad \mu * f(g) \geq f(g) \qquad \text{pour tout } g \in K_0^C,$$

où ∂ est le point à l'infini de la compactification d'Alexandroff de G.

Alors :

1. la marche de loi μ est transitoire.

2. Si U est son potentiel, pour toute fonction h continue à support compact il existe $c > 0$ telle que en dehors d'un compact

$$\text{(3)} \qquad Uh(g) \leq c(1 - f(g)).$$

Démonstration. — Soit X_n l'état de la marche de loi μ au temps n, T_K le temps d'entrée dans le compact $K \supset K_0$. Un calcul montre que (2) entraîne

$$E_g[f(X_{n \wedge T_K})] \geq f(g)$$

soit

$$E_g[f(X_{T_K})1_{[T_K \leq n]}] + E_g[f(X_n)1_{[T_K > n]}] \geq f(g)$$

et si $\xi = \sup\limits_K f < 1$

$$f(g) \leq \xi P_g(T_K \leq n) + P_g(T_K > n) = 1 - (1 - \xi)P_g(T_K \leq n)$$

et à la limite

$$P_g(T_K < +\infty) \leq \frac{1 - f(g)}{1 - \xi}$$

où le terme à gauche est < 1 hors d'un compact grâce à (1) ; la marche est donc transitoire et si h est continue positive et à support compact par le principe du maximum

$$\mathrm{U}h(g) \leq [\sup_{\mathrm{supp}\, h \cup \mathrm{K}_0} \mathrm{U}h] \cdot \mathrm{P}_g[\mathrm{T}_{\mathrm{supp}\, h \cup \mathrm{K}_0} < +\infty] \leq c(1 - f(g)).$$

2. Le cas $G = \mathbb{R}^d \times_\sigma K$ ($d \geq 3$).

Soit $(Y_i, U_i)_i$ une famille de v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times_\sigma K$ indépendantes identiquement distribuées (i. i. d.) de loi μ, symétrique et à support compact, où Y_i est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, U_i dans K. L'état de la marche au temps n sera

$$(Z_n, V_n) = (Y_1 + U_1Y_2 + \ldots + U_1 \ldots U_{n-1}Y_n, U_1 \ldots U_n).$$

PROPOSITION 2.2. — La loi de V_n tend vers la mesure de Haar normalisée σ de K.

Démonstration. — Grâce à [*6*] ou [*17*], il suffit de vérifier que la loi de U_i n'est pas portée par une classe latérale d'un sous-groupe distingué fermé de K, ce qui n'est pas possible car elle est adaptée et symétrique.

Remarque. — Soit e l'identité de K, $g = (x, e)$. Alors

$$g(Y_1, U_1)g^{-1} = (x + Y_1 - U_1x, U_1) = (Y'_1, U'_1).$$

Il est facile de voir que l'on peut choisir g de façon telle que $E(Y'_1) = 0$. On a en effet

$$E(Y'_1) = x - E(U_1)x + E(Y_1)$$

et comme μ est adaptée la norme de $E(U_1)$, comme opérateur sur $\mathbb{R}^d$, est < 1 et donc $I - E(U_1)$ est inversible.

Comme les automorphismes ne changent pas le caractère transitoire ou récurrent d'une marche, on supposera dorénavant Y_i centrée.

PROPOSITION 2.3. — Soit pour $v \in K$

$$T_n^v = \frac{1}{\sqrt{n}} vZ_n = \frac{1}{\sqrt{n}} [vY_1 + vU_1Y_2 + \ldots + vU_1 \ldots U_{n-1}Y_n]$$

C_n^v la matrice de covariance de T_n^v ; alors pour $n \to +\infty$ $\{C_n^v\}_n$ converge vers une matrice C, inversible, et qui commute avec les éléments de K. La convergence est uniforme en v.

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}_n$ la σ-algèbre engendrée par (Y_i, U_i), $i \leq n$. On a

$$E(vU_1 \ldots U_n Y_{n+1}) = E(vU_1 \ldots U_n E(Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)) = 0$$

car Y_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$ et centrée. On a aussi

$$E[(vU_1 \ldots U_n Y_{n+1})_i \cdot (vU_1 \ldots U_{n+p} Y_{n+p+1})_j] = 0$$

pour tout $1 \leq i \leq j \leq d$ si $p > 0$. Donc

$$(4) \qquad (C_{n+1}^v)_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} E[(vU_1 \ldots U_k Y_{k+1})_i (vU_1 \ldots U_k Y_{k+1})_j].$$

Supposons pour l'instant $v = e$ et soit $\overline{C}_k$ la matrice de covariance de $U_1 \ldots U_k Y_{k+1}$.

On a

$$\overline{C}_k = \int_K u C_Y u^{-1} d\sigma_k(u)$$

où σ_k est la loi de $U_1 \ldots U_k$ et C_Y la matrice de covariance des Y_i.

Par la proposition 2.1

$$\lim_{k \to +\infty} \overline{C}_k = \int_K u C_Y u^{-1} d\sigma(u) = C$$

et donc (on pose $C_n^e = C_n$) $\lim_n C_n = C$ et, comme σ est invariante par translations, on a $w\overline{C}w^{-1} = \overline{C}$.

Montrons que C est inversible. Comme K est compact et ker C est stable par l'action de K il existe un supplémentaire W de ker C qui est stable par K. Si $y \in \ker C$

$$0 = (Cy, y) = \int_K (uC_Y u^{-1} y, y) \sigma(du) = \int_K (C_Y u^{-1} y, u^{-1} y) \sigma(du).$$

Or $(C_Y u^{-1} y, u^{-1} y) \geq 0$ et cela entraîne $(C_Y u^{-1} y, u^{-1} y) = 0$ σ-p. s. et puisqu'il s'agit d'une fonction continue en u $(C_Y u^{-1} y, u^{-1} y) = 0$ pour tout $u \in K$. En particulier $(C_Y y, y) = 0$ et C_Y étant symétrique $C_Y y = 0$. Cela signifie que le support de μ est $W \times {}_\sigma K$ qui est un sous-groupe fermé propre de G, ce qui est impossible μ étant adaptée.

Supposons maintenant v quelconque : si $\| \quad \|$ est la norme en tant qu'opérateur sur $\mathbb{R}^d$:

$$\| C_n^v - C \| = \| vC_n v^{-1} - vCv^{-1} \| \leq \| C_n - C \|$$

car v est de norme 1 et $\overline{C}$ commute avec les éléments de K.

Remarque. — Il est facile de voir que l'on peut écrire $C = A^2$ où A est symétrique positive et commute avec les éléments de K. Alors l'application

$$\Gamma_{A^{-1}} : (x, u) \to (A^{-1}x, \mu)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^d \times {}_\sigma K$ et la mesure $\Gamma_{A^{-1}}\mu$, image de μ par $\Gamma_{A^{-1}}$, est telle que la matrice C de la proposition 2.3 soit l'identité, ce qu'on supposera dorénavant pour μ.

Soit $\varphi(\rho) = 1 - \dfrac{1}{\rho^{2\alpha}}$, $h(x) = \varphi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $B_\rho = \{ x \in \mathbb{R}^d, |x| < \rho \}$.

PROPOSITION 2.4. — Soit X une v. a. centrée, à support compact dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Alors si $\alpha < \dfrac{d-2}{2}$, il existe $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ tels que si $\| C_X - I \| < \varepsilon$ et $x \notin B_\rho$ on ait $E(h(x + X)) \geq h(x)$.

Démonstration. — Considérons le développement en série de Taylor de h

$$h(x + z) = h(x) + \sum_{1}^{d}{}_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) z_i + \sum_{1}^{d}{}_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x) z_i z_j + \dots$$

Par une majoration des dérivées on peut voir que pour x en dehors d'un compact le rayon de convergence croît plus vite que $|x|^{1-\beta}$ pour tout $\beta > 0$.

Supposons d'abord $C_X = I$. Il existe r assez grand pour que le support de X soit contenu dans $B_{r^{1-\beta}}$. Donc si $|x| > r$

$$h(x + X) = h(x) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) X_i + \frac{1}{2} \sum^{d} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} X_i X_j + \dots .$$

Comme X est à support compact on peut prendre l'espérance terme à terme. Puisque X est centrée et $C_X = I$

$$E(h(x + X)) = h(x) + \frac{1}{2} \Delta h(x) + \dots$$

où Δ est le laplacien. Un calcul montre que si $\alpha < \dfrac{d-2}{2}$

$$\Delta h(x) = 2\alpha \frac{d - 2(\alpha + 1)}{|x|^{2(1+\alpha)}}$$

tandis que les termes d'ordre supérieur sont de la forme

$$\frac{\varepsilon(|x|)}{|x|^{2(1+\alpha)}} \quad \text{où} \quad \lim_{r\to 0} \varepsilon(r) = 0$$

On a donc pour $|x|$ assez grand

$$E(h(x + X)) \geq h(x) + \frac{c}{|x|^{2(1+\alpha)}}$$

Si maintenant C_X est quelconque le même calcul donne

$$E(h(x + X)) = h(x) + \frac{1}{2} Lh(x) + \dots .$$

où

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} E(X_i X_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

et il est clair qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\| C_X - I \| < \varepsilon$, $Lh(x) \geq \dfrac{c}{|x|^{2(1+\alpha)}}$, ce qui permet de conclure.

PROPOSITION 2.5. — Le groupe $\mathbb{R}^d \times_\sigma K$ est transitoire ($d \geq 3$).

Démonstration. — On peut supposer μ symétrique à support compact et Y_i centrée. Par la proposition 2.3 et la remarque qui la suit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que si $(Y_1', U_1') = X_1'$ est une variable dont la loi est l'image de μ^n par l'automorphisme $(x, v) \to \left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}, v\right)$ alors $\| C_{Y_1'} - I \| < \varepsilon$.
On peut donc appliquer la proposition 2.4. Si on pose $f(g) = h(x)$ où $g = (x, u) \in \mathbb{R}^d \times_\sigma K$, on a pour $|x|$ assez grand

$$\begin{aligned} E(f(gX_1')) &= E(f((x, u)\cdot(Y_1', U_1'))) = E(f(x + uY_1', uU_1')) \\ &= E(h(x + uY_1')) = E(h(u^{-1}x + Y_1')) \geq h(u^{-1}x) = h(x) = f(g) \end{aligned}$$

donc f est une fonction barrière et la marche de pas (Y_1', U_1') est transitoire. Mais les potentiels de μ et de μ^n sont liés par la relation

$$\sum_{1}^{\infty}{}_k \, \mu^k = \left(\sum_{1}^{n-1}{}_i \, \mu^i\right) * \left(\sum_{0}^{\infty}{}_k \, (\mu^n)^k\right)$$

et μ est donc transitoire.

3. Le cas $G = H_1$.

Soit μ une loi symétrique à support compact sur H_1, (Y_1, Y_2, Y_3) une v. a. de loi μ. Alors (Y_1, Y_2, Y_3) a même loi que $(-Y_1, -Y_2, -Y_3)$ et donc $E(Y_1) = E(Y_2) = E(Y_3) = 0$.

LEMME 2.5. — Par un automorphisme de G, on peut supposer que la matrice de covariance de μ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

Démonstration. — Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \det U \end{pmatrix} = W$$

où $U \in GL(2, \mathbb{R})$ définit un automorphisme de H_1.
Si

$$U = \begin{pmatrix} a_1 \cos \vartheta & a_1 \sin \vartheta \\ -a_2 \sin \vartheta & a_2 \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

et (Y'_1, Y'_2, Y'_3) est une v. a. dont la loi est l'image de μ par W, on a

$$\begin{aligned} E(Y'_1Y'_2) = {} & a_1a_2 (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)E(Y_1Y_2) \\ & - a_1a_2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, E(Y_1^2) - a_1a_2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, E(Y_2^2) \end{aligned}$$

donc si

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2E(Y_1Y_2)}{E(Y_1^2) + E(Y_2^2)}$$

on a $E(Y'_1Y'_2) = 0$.

On peut également choisir a_1 et a_2 de façon que $E(Y_1'^2) = E(Y_2'^2) = 1$.

Si on applique ensuite à μ l'automorphisme intérieur associé à $g = (x_1, x_2, x_3) \in H_1$ on a

$$(x_1, x_2, x_3)(Y_1, Y_2, Y_3)(-x_1, -x_2, -x_3) = (Y_1, Y_2, Y_3 + x_1Y_2 - x_2Y_1)$$

et par un choix convenable de x_1 et x_2, on peut supposer

$$E(Y_1Y_3) = E(Y_2Y_3) = 0.$$

Soit L l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^3$:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Proposition 2.6. — Soit $\vartheta^2 = x_1^2 + x_2^2$ et $\rho^2 = x_1^4 + x_2^4 + (8 + \eta)x_3^2$. Il existe alors des constantes $c_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\eta > 0$ telles que si

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{1}{(x_1^4 + x_2^4 + (8 + \eta)x_3^2)}$$

alors en dehors d'un cylindre d'axe x_3, on a

$$Lu_1 > \frac{c_0 \vartheta^2 \alpha}{\rho^{2(1+\alpha)}}.$$

Démonstration. — On a

$$\frac{1}{\alpha}\rho^{2(1+\alpha)}Lu_1 =$$
$$= (8+\eta)(x_1^2 + x_2^2)\left\{8 - \frac{\eta}{2} + \alpha(8+\eta)\right\}x_3^2 - 8(8+\eta)(\alpha+1)x_1x_2(x_1^2 - x_2^2)x_3$$
$$+ \left\{\left(16 + \frac{\eta}{2}\right)(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) - 16(1+\alpha)(x_1^6 + x_2^6)\right\} = ax_3^2 + bx_3 + c$$

et

$$\Delta = \frac{b^2}{4} - ac =$$
$$= 16(8+\eta)^2 x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - x_2^2)^2(\alpha+1) - (8+\eta)\left\{8 - \frac{\eta}{2} - \alpha(8+\eta)\right\}(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\left\{\left(16 + \frac{\eta}{2}\right)(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) - 16(1+\alpha)(x_1^6 + x_2^6)\right\}$$

si on pose $x = \vartheta \cos\varphi$ $y = \vartheta \sin\varphi$ $s = \cos^2\varphi$

$$\Delta = (8+\eta)\vartheta^8 \Big\{ 16(8+\eta)(\alpha+1)s(1-s)(2s-1)^2$$
$$- \left[8 - \frac{\eta}{2} - \alpha(8+\eta)\right]\left[\left(16 + \frac{\eta}{2}\right)(s^2 + (1-s)^2) - 16(1+\alpha)(s^3 + (1-s)^3)\right]\Big\}$$

Montrons que pour $\alpha > 0$ assez petit l'expression entre parenthèses est strictement négative pour tout $s \in [0, 1]$. Il suffira de calculer pour $\alpha = 0$.

$$\frac{\Delta}{(8+\eta)^2 16\vartheta^8} = s(1-s)(2s-1)^2 - \left(\frac{12}{8+\eta} - \frac{1}{2}\right)\left\{s(1-s) + \frac{1}{32}\eta(2s^2 - 2s + 1)\right\}$$

et si on pose $t = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2$

$$\frac{\Delta}{(8+\eta)^2 16\vartheta^8} = -4t^2 + t\left[1 + \left(\frac{12}{8+\eta} - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{\eta}{16}\right)\right] - \frac{16+\eta}{64}\left(\frac{12}{8+\eta} - \frac{1}{2}\right)$$

qui est négatif dès que $\eta > 0$ car $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$.

Donc finalement

$$\frac{1}{\alpha}\rho^{2(\alpha+1)}\mathrm{L}u = ax_3^2 + bx_3 + c = a\left[\left(x_3 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x_3 - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{a^2}\right] \geq a\left[-\frac{1}{a^2}\Delta\right] \geq \vartheta^2\left\{c_0 \frac{(8+\eta)16}{8 - \frac{\eta}{2} - \alpha(8+\eta)}\vartheta^4\right\} \geq c\vartheta^2.$$

pour (x_1, x_2, x_3) hors d'un cylindre d'axe x_3 et de base compacte si

$$\left(8 - \frac{\eta}{2} - \alpha(8+\eta)\right) > 0.$$

PROPOSITION 2.7. — Soit $\chi^2 = \mathrm{A}x_1^2 + \mathrm{A}x_2^2 + ax_3^2$ et

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{1}{\chi^{2\alpha}}$$

Il existe des constantes α, a et γ positives et un compact K tels que pour tout $g \notin \mathrm{K}$ et à l'intérieur d'un cylindre d'axe x_3 et de base compacte, on ait

$$\mathrm{L}'u_2 = \mathrm{L}u_2 + \mathrm{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \geq \frac{cx_3^2}{\gamma\chi^{2(\alpha+2)}}$$

Démonstration. — On a

$$\frac{\gamma\chi^{2(\alpha+2)}}{2\alpha\mathrm{A}}\mathrm{L}'u_2 = x_3^2\left[1 - 2\alpha a - a - \frac{a(1-2\alpha)}{4\mathrm{A}}(x_1^2 + x_2^2)\right]$$
$$+ \mathrm{A}(x_1^2 + x_2^2)\left[a - 2\alpha + \frac{a}{4\mathrm{A}}(x_1^2 + x_2^2)\right]$$

et il est clair que pour des valeurs de a et α assez petites si $x_1^2 + x_2^2$ reste borné, le coefficient de x_3^2 reste positif.

Remarque. — Le cylindre dont il est question dans la proposition 2.6 est aussi grand que l'on veut à condition de choisir a assez petit.

LEMME 2.6. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ telle que le développement de Taylor

$$u_1\left(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3 + \frac{1}{2}(x_1h_2 - x_2h_1)\right)$$
$$= u_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}h_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left[h_3 + \frac{1}{2}(x_1h_2 - x_2h_1)\right] + \dots$$

(u_1 est comme dans la proposition 2.6) soit convergent si

$$|h_1|, |h_2| \leq c\rho^{1/2-\varepsilon}, \qquad |h_3| \leq c\rho^{1-\varepsilon}.$$

Démonstration. — Il est facile de démontrer par induction que si

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$
$$\frac{\partial^s u_1}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}} \leq \frac{c_s}{\rho^{(1/2)(\alpha_1+\alpha_2)}\rho^{\alpha_3}}.$$

De façon analogue on a

LEMME 2.7. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que le développement de Taylor

$$u_2\left(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3 + \frac{1}{2}(x_1h_2 - x_2h_1)\right)$$
$$= u_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)h_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)h_2$$
$$+ \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)\left[h_3 + \frac{1}{2}(x_1h_2 - x_2h_1)\right] + \dots$$

soit convergent si $|h_1|, |h_2|, |h_3| \leq c\chi^{1-\varepsilon}$ pour tout (x_1, x_2, x_3) dans un cylindre de base compacte et d'axe x_3.

La proposition suivante montre que H_1 est transitoire grâce au lemme 2.4.

PROPOSITION 2.8. — Soit $X = (Y_1, Y_2, Y_3)$ une v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, centrée, dont la loi est à support compact, telle que Y_3 soit symétrique et que sa matrice de covariance C_X soit telle que $\| C_X - R_A \| < \varepsilon$ où

$$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

Soient encore

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{1}{\left(x_1^4 + x_2^4 + (8 + y)x_3^2\right)^{\alpha_1}}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{1}{\left(Ax_1^2 + Ax_2^2 + ax_3^2\right)^{\alpha_2}}$$

Il existe alors $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $a > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\eta > 0$ tels que si $u = u_1 \vee u_2$

$$E\left(u\left(Y_1 + x_1, Y_2 + x_2, Y_3 + x_3 + \frac{1}{2}(x, Y_2 - x_2Y_3)\right)\right) \geq u(x_1, x_2, x_3)$$

pour (x_1, x_2, x_3) hors d'un compact.

Démonstration. — Remarquons d'abord que $u_1 \geq u_2$ à l'extérieur d'un cylindre d'axe x_3 et de base compacte et $u_1 \leqslant u_2$ à l'intérieur. Par les lemmes 2.6 et 2.7 pour (x_1, x_2, x_3) en dehors d'un compact le support de μ est contenu dans les disques de convergence des développements de Taylor.

A l'extérieur du cylindre $u = u_1$ et si $C_X = R_A$, $g = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned}(5)\quad E(u_1(gX)) - u_1(g) &= \frac{1}{2} Lu_1(g) \\ &+ A\left[\frac{2\alpha(8+\eta)}{\rho^{2(\alpha+1)}} - \frac{4\alpha(\alpha+1)(8+\eta)^2x_3^2}{\rho^{2(\alpha+2)}}\right] + 4\alpha\frac{x_1E(Y_1^3) + x_2E(Y_2^3)}{\rho^{2(1+\alpha)}} \\ &+ \alpha\frac{E(Y_1^4) + E(Y_2^4)}{\rho^{2(1+\alpha)}} + \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho^{2(1+\alpha)}}\end{aligned}$$

où l'on a gardé les termes en $\dfrac{1}{\rho^{2(1+\alpha)}}$ (on rappelle que $A = E(Y_3^2)$).

Mais par la proposition 2.6 en dehors d'un cylindre d'axe x_3

$$Lu_1 \geq \frac{\alpha c_0(x_1^2 + x_2^2)}{\rho^{2(1+\alpha)}}$$

donc si on augmente le rayon du cylindre, parmi les termes à droite dans (5),

$Lu_1(g)$ croît en module plus vite (ou décroît moins vite) que les autres. En dehors d'un cylindre $\mathscr{C}_1$ assez grand donc $E(u_1(gX)) > u_1(g)$.

Par des arguments semblables et utilisant les résultats correspondants pour la fonction u_2, on obtient qu'à l'intérieur d'un cylindre $\mathscr{C}_2$ et hors d'un compact K, $E(u_2(gX)) > u_2(g)$.

Par un choix convenable de α_1 et α_2, on peut obtenir $\mathscr{C}_2 \supset \mathscr{C}_1$ et, par un choix de γ, que $u = u_1$ hors de $\mathscr{C}_2$ et $u = u_2$ à l'intérieur de $\mathscr{C}_1$. Donc

si $\qquad g \notin \mathscr{C}_2 \; E(u(gX)) > E(u_1(gX)) > u_1(g) = u(g)$

si $\qquad g \in \mathscr{C}_1 \cap K^c \; E(u(gX)) > E(u_2(gX)) \geq u_2(g) = u(g)$

si $\qquad g \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 \cap K^c$

à la fois

$$\begin{cases} E(u(gX)) \geq E(u_1(gX)) \geq u_1(g) \\ E(u(gX)) \geq E(u_2(gX)) \geq u_2(g) \end{cases}$$

donc

$$E(u(gX)) \geq u(g)\,.$$

4. Le cas G = Δ.

Soit (Y_1, Y_2, Y_3, V) une v. a. à valeurs dans Δ, où (Y_1, Y_2, Y_3) est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et V dans le tore T identifié aux nombres complexes de module unitaire. Dans Δ on a

$$(x_1, x_2, x_3, v)^{-1} = (-(x_1 \operatorname{Re} v + x_2 \operatorname{Im} v), x_1 \operatorname{Im} v - x_2 \operatorname{Re} v, -x_3, -v)\,.$$

Donc si la loi μ de (Y_1, Y_2, Y_3, V) est symétrique, on a

$$(Y_1, Y_2, Y_3, V) \simeq (-(Y_1 \operatorname{Re} V + Y_2 \operatorname{Im} V), Y_1 \operatorname{Im} V - Y_2 \operatorname{Re} V, -Y_3, -V).$$

Si $Z_n = (Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, Y_3^{(n)}, V_n)$ est une famille de v. a. dans Δ i. i. d. l'état de la marche de pas Z_1 au temps n est

$$S_n = Z_1 \ldots Z_n = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, X_3^{(n)}, U_n)$$

où

$$X_1^{(n)} + iX_2^{(n)} = (Y_1^{(1)} + iY_2^{(1)}) + V_1(Y_1^{(2)} + iY_2^{(2)}) + \ldots + V_1 \ldots V_{n-1}(Y_1^{(n)} + iY_2^{(n)})$$

$$(6) \quad U_n = V_1 \ldots V_n$$

$$X_3^{(n)} = X_3^{(n-1)} + Y_3^{(n)} + \frac{1}{2}\{ X_1^{(n-1)}[Y_1^{(n)} \operatorname{Im} U_{n-1} + X_2^{(n)} \operatorname{Re} U_{n-1}] - X_2^{(n-1)}[Y_1^{(n)} \operatorname{Re} U_{n-1} - Y_2^{(n)} \operatorname{Im} U_{n-1}] \} = X_3^{(n-1)} + H_n\,.$$

Une fois encore, on peut trouver un automorphisme intérieur par un élément de la forme $(x_1, x_2, 0, 1)$ tel que l'image de μ vérifie :

$$E(Y_1^{(1)}) = E(Y_2^{(1)}) = 0$$

LEMME 2.8. — Si C_n est la matrice de covariance de la v. a.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} X_1^{(n)}, \frac{1}{\sqrt{n}} X_2^{(n)}, \frac{1}{n} X_3^{(n)}\right),$$

avec $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, X_3^{(n)}$ définis par (6), alors C_n converge pour $n \to \infty$ vers une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Démonstration. — Par le théorème central limite sur le groupe des déplacements du plan (voir [*8*] ou [*15*] ou [*18*]), la suite de v. a.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} X_1^{(n)}, \frac{1}{\sqrt{n}} X_2^{(n)}, U_n\right)$$

converge en loi vers une v. a. dont la loi est le produit direct de la mesure de Haar normalisée σ de T par une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^2$ invariante par rotations. Soit $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ sa matrice de covariance.

Calculons maintenant $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} E(H_n^2)$. Pour cela on va évaluer les différents termes qui y apparaissent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E[(Y_3^{(n)})^2] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E[Y_3^{(n)} \cdot X_1^{(n-1)} \operatorname{Im} U_{n-1} \cdot Y_1^{(n)}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E\left\{\frac{X_1^{(n-1)}}{\sqrt{n}} \operatorname{Im} U_{n-1}\right\} E(Y_3^{(n)} Y_1^{(n)}) = 0$$

par le théorème central limite cité et le même résultat est vrai pour les

3 autres termes du même type. Par le même argument, on a aussi les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{X}_1^{(n-1)}}{\sqrt{n}}[\mathrm{Im}\, \mathrm{U}_{n-1}\cdot \mathrm{Y}_1^{(n)} + \mathrm{Re}\, \mathrm{U}_{n-1}\cdot \mathrm{Y}_2^{(n)}]\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{b}{4}\left\{ \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_1^{(n)})^2]\int_{\mathrm{T}} (\mathrm{Im}\, t)^2 d\sigma(t) + \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_2^{(n)})^2]\int_{\mathrm{T}} (\mathrm{Re}\, t)^2 d\sigma(t)\right.$$

$$\left. + 2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1^{(n)}\mathrm{Y}_2^{(n)})\int_{\mathrm{T}} \mathrm{Im}\, t\, \mathrm{Re}\, t d\sigma(t)\right\} = \frac{b}{8}\{ \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_1^{(1)})^2] + \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_2^{(1)})^2]\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{X}_2^{(n-1)}}{\sqrt{n}}[\mathrm{Y}_1^{(n)}\, \mathrm{Re}\, \mathrm{U}_{n-1} - \mathrm{Y}_2^{(n)}\, \mathrm{Im}\, \mathrm{U}_{n-1}]\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{b}{8}\{ \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_1^{(1)})^2] + \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_2^{(1)})^2]\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left\{\frac{\mathrm{X}_1^{(n-1)}}{\sqrt{n}}\, \mathrm{Im}\, \mathrm{U}_{n-1}\mathrm{Y}_1^{(n)}\cdot\frac{\mathrm{X}_2^{(n-1)}}{\sqrt{n}}\, \mathrm{Re}\, \mathrm{U}_{n-1}\mathrm{Y}_2^{(n)}\right\} = 0\,.$$

Donc finalement $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{E}(\mathrm{H}_n^2) = \frac{b}{4}\{ \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_1^{(1)})^2] + 2[(\mathrm{Y}_2^{(1)})^2]\}$.

Pour calculer $\lim\limits_{n}\frac{1}{n^2}\mathrm{E}[(\mathrm{X}_3^{(n)})^2]$, on peut remarquer que $\mathrm{X}_3^{(n)} = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{H}_i$ et que $\mathrm{E}(\mathrm{H}_i\mathrm{H}_j) = 0$. Donc $\mathrm{E}[(\mathrm{X}_3^{(n)})^2] = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{E}(\mathrm{H}_i^2)$ et donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{E}[(\mathrm{X}_3^{(n)})^2] = \frac{b}{8}\{ \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_1^{(1)})^2] + \mathrm{E}[(\mathrm{Y}_2^{(1)})^2]\}\,.$$

Pour terminer il n'y a plus qu'à calculer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\mathrm{E}[\mathrm{X}_3^{(n)}\mathrm{X}_1^{(n)}] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\mathrm{E}[\mathrm{X}_3^{(n)}\mathrm{X}_2^{(n)}] = 0$$

ce qu'on peut faire de la même façon.

Proposition 2.9. — Le groupe Δ est transitoire.

Démonstration. — Si $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application

$$\Gamma_\lambda : (x_1, x_2, x_3, v) \to (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 x_3, v)$$

est un automorphisme de Δ. Par un automorphisme de la sorte, on peut supposer que la matrice limite du lemme 2.8 soit de la forme

$$R_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Le lemme 2.8 nous assure que pour tout $\varepsilon > 0$ la matrice de covariance C_k de la v. a. $\Gamma_{\frac{1}{\sqrt{k}}}\left(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, X_3^{(k)}\right)$ est telle que $\| C_k - R_a \| < \varepsilon$. Remarquons ensuite que si $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ est une v. a. dont la matrice de covariance vérifie $\| C_Y - R_a \| < \varepsilon$, la même chose est vraie pour la v. a.

$$Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), Y_3), \quad t \in T, \qquad \text{où} \quad Y_1(t) + iY_2(t) = t(Y_1 + iY_2).$$

Soit maintenant u la fonction construite dans la proposition 2.8 et

$$v(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, x_3)$$

v est une fonction barrière :

$$\begin{aligned} &E[v((x_1, x_2, x_3, t)(Y_1, Y_2, Y_3, V))] \\ &\quad = E\left[u\left(x_1 + Y_1(t), x_2 + Y_2(t), x_3 + Y_3 + \frac{1}{2}(x_1 Y_2(t) x_2 Y_3(t)\right)\right] \\ &\quad \geq u(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned}$$

car on peut supposer $\| C_{Y(t)} - R_a \| < \varepsilon$.

Puisque Γ_λ est un automorphisme ceci montre que la marche de pas $\left(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, X_3^{(k)}, U_k\right)$ est transitoire, à savoir que μ^k est transitoire, ce qui entraîne que μ elle-même l'est, comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 2.5.

5. **Le cas** $G = \tilde{G}_2$.

Pour $\tilde{G}_2$ il ne semble pas que la méthode des fonctions barrière puisse s'appliquer.

On va donc employer une autre technique générale qui va montrer la transience de toute une classe de groupes qui comprend, entre autres, H_1 et les produits semi-directs de $\mathbb{R}^d (d > 3)$ par des groupes abéliens de rotations qu'on a déjà traités. On va se borner ici à une description détaillée : pour les démonstrations on pourra se référer à [*10*], pages 160 et suivantes.

Soit G un groupe L. C. D., C un sous-groupe fermé distingué abélien de G. Si μ est une loi de probabilité sur G on peut la désintégrer suivant les classes modulo C :

$$\mu = \int_{G/C} \mu_{\bar{x}}\, \bar{\mu}(d\bar{x})$$

où $\mu_{\bar{x}}$ est une loi de probabilité portée par la classe $\bar{x}$ modulo C et $\bar{\mu}$ est l'image de μ dans le quotient.

On peut alors poser

$$\mu_C = \int_{G/C} \check{\mu}_{\bar{x}} * \mu_{\bar{x}}\, d\bar{\mu}(\bar{x})$$

On voit bien que μ est une loi sur C. On dira que μ est C-strictement adaptée si μ n'est pas portée par une classe latérale d'un sous-groupe propre fermé de C. Si on écrit $\mu_{\bar{x}} = \varepsilon_x * \eta_x$ où $x \in \bar{x}$ et η_x est une loi de probabilité sur C il est facile de voir que le module $|\hat{\eta}_x(\vartheta)|$ de la transformée de Fourier de η_x ne dépend pas du choix de x.

Soit ensuite F(G, C) l'espace des fonctions continues bornées sur G dont les restrictions aux classes modulo C sont des transformées de Fourier de mesures bornées sur $\hat{C}$. A savoir pour tout $x \in G$, $f \in F(G, C)$, il existe une mesure bornée sur $\hat{C}$ telle que

$$f_x(c) = f(xc) = \int_{\hat{C}} \langle \xi, c \rangle\, d\alpha_x(\xi)$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne la dualité entre C et $\hat{C}$.

Si on pose

$$\dot{f}_x(c) = \int_{\hat{C}} \langle \xi, c \rangle\, d\,|\,\alpha_x\,|(c)$$

on peut définir la fonction continue bornée f sur $C \times G/C$

$$\dot{f}(c, \bar{x}) = \dot{f}_x(c)$$

et cette définition ne dépend pas du choix de x dans $\bar{x}$.

On dira que G opère sur C de façon bornée si tout compact de C est contenu dans un compact qui est invariant par l'action de G sur C.

PROPOSITION 2.10. — Soit C un sous-groupe fermé, abélien à génération compacte tel que G opère sur C de façon bornée et μ une loi de probabilité C-strictement adaptée sur G. Il existe alors une probabilité ν sur $C \times G/C$ et un voisinage V de l'élément neutre de C tels que

1. ν est C-strictement adaptée dans $C \times G/C$.
2. ν a même image que μ sur G/C.

3. Pour toute $f \in F(G, C)$ dont les transformées de Fourier des restrictions aux classes modulo C sont portées par V on a

$$|\mu^n(f)| < \nu^n(\dot{f})$$

Dans le cas de $\tilde{G}_2$ on peut appliquer la proposition précédente au sous-groupe C des éléments de la forme $(z, 0)$, $z \in \mathbb{C}$. On voit alors que $\tilde{G}_2$ opère de façon bornée sur C, car les orbites sont compactes et $C \times \tilde{G}_2/C \simeq \mathbb{R}^3$. Si μ est C-strictement adaptée, la proposition 2.10 permet de majorer son potentiel calculé sur la fonction f par le potentiel de ν calculé sur $\dot{f}$, ce qui, $\mathbb{R}^3$ étant transitoire, entraînera la transience de μ. Il ne reste plus qu'à montrer que l'on peut supposer μ C-strictement adaptée.

PROPOSITION 2.11. — Soit G un groupe résoluble à génération compacte dont le dérivé G′ est abélien et dont l'action de G sur G′ soit bornée. Alors si μ^2 est absolument continue par rapport à μ et μ est adaptée, μ est G′-strictement adaptée.

Or si μ est adaptée, $\gamma = \sum_0^\infty \frac{\mu^n}{2^{n+1}}$ est adaptée, $\gamma^2 \ll \gamma$ et le sous-groupe C des éléments de la forme $(z, 0)$, $z \in \mathbb{C}$ est le dérivé de $\tilde{G}_2$. Donc γ est C-strictement adaptée et donc transitoire, ce qui entraîne que μ est transitoire.

3.

1. La démonstration du théorème 1 que l'on vient de donner est quelque peu décevante : on voit mal en effet pourquoi lier la récurrence d'un groupe à sa croissance. Pourquoi pas, par exemple, l'énoncer sous la forme suivante :

Un groupe de Lie connexe est récurrent si et seulement si, il est compact ou extension compacte de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou G_2.

En effet l'idée sous-jacente est que le comportement des puissances de convolution μ^n est lié à la croissance du groupe. Les conjectures exposées au début de cet article seraient en effet des cas particuliers de la suivante :

Si G est un groupe L. C. D. à croissance polynomiale d'ordre α et μ une loi de probabilité adaptée, alors pour tout compact $K \subset G$ il existe $c > 0$ tel que

$$\sup_{x,y \in G} \mu^n(xKy) \leq \frac{c}{n^{\alpha/2}}$$

Ce résultat, classique dans $\mathbb{R}^d$, a été généralisé aux extensions compactes de $\mathbb{R}^d$ ([*3*] [*5*] [*13*]) mais les techniques jusque-là employées (transformation de Fourier et représentations unitaires) semblent difficiles à utiliser dans d'autres cas.

2. Pour généraliser le théorème 1 aux groupes topologiques L. C. D. généraux, le cas le plus important à traiter reste celui des groupes discrets, ce qui d'ailleurs était le cadre dans lequel la conjecture avait été énoncée au départ. Il est probable cependant que la technique à employer soit très différente, d'une part parce que la théorie de Lie ne serait plus appliquable à des théorèmes de structure, de l'autre parce que la démonstration de la transience de groupes concrets s'annonce très difficile.

On ne sait pas par exemple traiter le cas du groupe dont Novikov et Adyan ([*1*]) ont prouvé l'existence qui est infini mais tel que $x^{\mathrm{N}} = e$ pour tout x, où N est un entier positif fixé.

3. Il est traditionnel d'étudier en même temps que la transience le renouvellement des marches aléatoires, à savoir les valeurs d'adhérence de $\Sigma_n \mu^n * \varepsilon_x$ pour $x \to \partial$. On imagine en effet que si la croissance est polynomiale d'ordre > 2 la seule valeur d'adhérence est 0, mais il reste encore des points obscurs.

Par la même technique que pour le cas de $\tilde{\mathrm{G}}_2$, on peut avoir ce résultat pour $\tilde{\mathrm{G}}_2$, H_1 et pour les produits semi-directs de $\mathbb{R}^d (d > 3)$ par un groupe compact abélien de rotations (donc pour tous les groupes nilpotents).

Pour Δ et G_d par contre on est obligé encore de faire des hypothèses soit d'étalement soit, par la méthode des fonctions barrière, de moments.

Évidemment ce problème serait résolu si on savait démontrer la conjecture dont il est question au point 1.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] S. I. ADYAN, Periodic groups of odd exponent dans *Lecture Notes in Math.*, n° **372**, Springer, 1974.

[*2*] R. AZENCOTT, Espaces de Poisson des groupes localement compacts. Springer, *Lecture Notes in Math.*, n° **148**, 1970.

[*3*] P. BALDI, Ph. BOUGEROL, P. CREPEL, Théorème central limite local sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **XIV**, n° **1**, 1978, p. 99.

[*4*] P. BALDI, N. LOHOUÉ, J. PEYRIÈRE, Sur la classification des groupes récurrents. C. *R. Acad. Sci.*, Paris, t. **285**, 1977, p. A-1103.

[*5*] Ph. BOUGEROL, Fonctions de concentration sur les extensions compactes de groupes abéliens. *C. R. Acad. Sci.*, t. **283**, 1976, p. A-527.

[*6*] H. S. COLLINS, Convergence of iterates of mesures. *Duke Math. J.*, 1962, p. 259.

[7] P. CREPEL, Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$. *C. R. Acad. Sci.*, t. **278**, 1974, p. A-961.

[9] L. GOROSTIZA, The central limit theorem for random motions of the d-dimensional euclidean space. *Annals of Prob.*, t. **1**, n° 4, 1973.

[9] Y. GUIVARC'H, Croissance polynomiale et période des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math.*, France, t. **101**, 1973, p. 333.

[10] Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur les groupes de Lie. Springer, *Lectures Notes in Math.*, n° 624, 1977.

[11] G. HOCHSCHILD, *The structure of Lie groups*, Holden Day, 1965.

[12] H. KESTEN, The Martin Boundary of recurrent random walks on countable groups. *Proc. 5th Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability*, t. **II**, 1967, p. 51.

[13] V. M. MAXIMOV, Distributions ponctuelles uniformes et théorèmes locaux pour des mouvements aléatoires. *Dokl. Acad. Nauk.*, t. *232*, n° 2, 1977, p. 284.

[14] B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **31**, 1974, p. 25.

[15] B. ROYNETTE, Théorème central limite pour le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **X**, n° 4, 1974, p. 391.

[16] B. ROYNETTE, M. SUEUR, Marches aléatoires sur un groupe nilpotent. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **30**, 1974, p. 129.

[17] V. V. SAZONOV, V. N. TUTUBALIN, Probability distributions on topological groups. *Theory Probability Appl.*, t. **X**, n° 1, 1966, p. 145.

[18] V. N. TUTUBALIN, The central limit theorem for random motions of an euclidean space. *Selected Translations in Math. Statistics and Probability*, t. **12**, 1973, p. 47.

[19] V. S. VARADARAJAN, *Lie groups, Lie Algebras and their representations*, Prentice Hall, 1974.

(Manuscrit reçu le 26 mars 1981)