ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

E. CARNAL

Description de certains processus markoviens indexés par des sous-ensembles du cercle

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 2 (1981), p. 229-248
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_2_229_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 2-1981, p. 229-248. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Description de certains processus markoviens indexés par des sous-ensembles du cercle

par

E. CARNAL

Département de Mathématiques de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne,
Avenue de Cour 61, 1007 Lausanne, Suisse

ABSTRACT. — We study processes $\{ X_t \}$ with $t \in T$ (the unit circle of $\mathbb{C}$) or $t \in A_n$ (subgroup of order 2^n of T). In the second case, we show the equivalence of the approach through covariance functions and the representation by a Grimmett potential. If X_t takes values in $\{ -1, 1 \}$, we give an explicite construction of the (uniquely determined) process with covariance ch $\theta(t - \pi)$/ch $\theta\pi$.

0. INTRODUCTION

Il existe une liste assez longue d'articles traitant les processus markoviens indexés par un graphe (voir par exemple les références de [*3*]). On aborde d'habitude les processus gaussiens par l'étude de leur covariance, alors que les processus à deux valeurs se prêtent à une représentation par un potentiel de Grimmett [*1*]. Dans le cas particulier d'un graphe induit par un sous-groupe fini du cercle, nous mettons ici en évidence l'équivalence des deux approches. Pour un processus à deux valeurs indexé par le cercle entier, nous en déduirons une étude complète des propriétés trajectorielles, résumées dans les théorèmes 2 et 3 ci-après.

DÉFINITION. — Pour un processus $\{ X_t \}_{t \in E}$ indexé par un sous-ensemble E du tore T de dimension 1, identifié à l'intervalle $[0, 2\pi[$ muni de l'addition mod 2π, nous définissons la propriété markovienne de la façon suivante : $\forall \alpha, \beta \in E$, si $I = [\alpha, \beta] \cap E$, la tribu $\sigma\{X_t, t \in I\}$ est indépendante de $\sigma\{X_t, t \in E \backslash I\}$ conditionnellement à $\sigma\{X_\alpha, X_\beta\}$. Le sous-ensemble E sera soit le sous-groupe fini $A_n = \{2k\pi/2^n, 0 \leqslant k < 2^n\}$, $n = 2, 3, \ldots$, soit l'ensemble des dyadiques $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$, soit encore T lui-même.

Dans la première partie, nous traiterons le cas gaussien, pour lequel une analyse directe permettra de déduire le caractère gibbsien, la matrice de covariance sur l'ensemble A_n étant associée à une équation aux différences. On comparera avec le résultat de Pitt [*2*], qui a décrit la covariance du processus indexé par T comme fonction de Green d'un opérateur différentiel du second ordre.

Dans la deuxième partie, nous étudierons des processus à deux valeurs équiprobables, invariants par rotation des indices. Dans le cas des indices discrets, la représentation gibbsienne est la plus simple qui soit. Celle-ci nous permettra d'étendre l'analyse aux indices dyadiques, puis par prolongement continu, au processus indexé par le cercle entier. Nous montrerons les propriétés intéressantes de celui-ci, dont les sauts se répartissent sur le cercle d'une façon similaire à ceux d'un processus de sauts markovien classique dans un intervalle fini de la droite. Nous soulignons le parallélisme avec le cas gaussien, la covariance étant la même et suffisant à décrire le processus.

Nous donnons ici sans démonstration, les résultats dont nous aurons besoin, sur la représentation gibbsienne. Ils peuvent être adaptés de [*1*] et nous avons précisé les détails dans [*3*].

Soit n fixé, $n = 4, 5, \ldots, t_i = 2\pi i/n$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, n points du tore et $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{n-1}$ un processus indexé par ces n points, à valeurs dans l'espace mesuré (E, ε, μ), où μ est σ-finie. Nous supposons que ce processus est markovien, est invariant par permutation circulaire des indices et que sa distribution est donnée par une densité positive :

$$\exists f > 0 \qquad \text{sur} \qquad \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$$

telle que

$$P\{X_{t_0} \in B_0, X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_{n-1}} \in B_{n-1}\} = \int_{B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_{n-1}} f d\nu$$

où $\nu = \mu \otimes \mu \otimes \ldots \otimes \mu$ (n fois)

$$\forall B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in \varepsilon .$$

Alors :

PROPOSITION 1. — *i*) Le processus est entièrement décrit par une fonction $h(x, y)$ sur $E \times E$, $h > 0$ et

$$(1)\quad f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = k \cdot h(x_0, x_1)h(x_1, x_2) \ldots h(x_{n-2}, x_{n-1})h(x_{n-1}, x_0)$$

ii) Si $E = \{ +1, -1 \}$,

$$(2)\quad f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = k \cdot \alpha^{N} \cdot \beta^{M}, \qquad x_i = \pm 1, i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

où α et β sont des constantes positives et :

$$k = f(-1, -1, \ldots, -1)$$
$$M = \operatorname{Card} \{ i \mid x_i = +1, x_{i+1} = +1, i = 0, 1, \ldots, n-1 \}$$
$$N = \operatorname{Card} \{ i \mid x_i = +1, i = 0, 1, \ldots, n-1 \} - M.$$

1. CAS GAUSSIEN

Nous rappelons tout d'abord un résultat tiré de [*2*].

THÉORÈME 1 (Pitt). — Un processus gaussien, markovien, indexé par T, invariant par rotation, centré et de variance 1, et de covariance continue, ni constant ni indépendant, a pour covariance la fonction de Green d'un opérateur différentiel du second ordre sur T : $Lf = f'' + \alpha f$, $\alpha > 0$. En d'autres termes, si $\{ h_t \}_{t \in T}$ est un tel processus, $c(t) = Eh_s h_{s+t}$ peut s'écrire :

$$(3)\qquad c(t) = \operatorname{ch} \theta(t - \pi)/\operatorname{ch} \theta\pi$$

pour un $\theta > 0$.

Si h est un processus indexé par A_n, mettons :

$$h_k = h_{t_k}, \qquad t_k = 2k\pi/2^n, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$$

et

$$c_i = Eh_k h_{k+i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^n.$$

Nous allons étudier le processus $\{ h_k \}_{k=0}^{2^n-1}$ indexé par A_n, supposant qu'il est gaussien markovien, invariant par permutation circulaire des indices, centré, de variance 1, ni indépendant ni constant. Les résultats que nous obtiendrons indépendamment du théorème 1 ont ce dernier comme corollaire.

PROPOSITION 2. — La covariance du processus h est caractérisée par l'équation aux différences :

$$c_i = \beta(c_{i+1} + c_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1} \tag{4}$$

pour une certaine constante β.

Démonstration. — La propriété markovienne revient à dire par exemple : h_1 indépendant de h_k conditionnellement à $\sigma\{h_0, h_2\}$, $k = 3, 4, \ldots, 2^{n-1}+1$, ou si $\tilde{h}_1 = \mathrm{proj}_{\{h_0, h_2\}} h_1$ (dans l'espace gaussien associé) :

$$(h_1 \mid h_k) = (\tilde{h}_1 \mid h_k), \qquad k = 3, 4, \ldots, 2^{n-1} + 1. \tag{5}$$

Or $\tilde{h}_1 = \beta(h_0 + h_2)$; il en résulte immédiatement que (5) équivaut à (4), avec $\beta = c_1/(1 + c_2)$.

Nous allons maintenant résoudre l'équation aux différences (4). Une discussion est nécessaire du fait que la constante β est indéterminée et dépend de c_1 et c_2.

Pour $\theta > 0$, nous notons :

$$d_i = d_i(\theta) = (\mathrm{ch}\, \theta\pi)^{-1} \mathrm{ch}\, \theta(\pi - 2i\pi/2^n), \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{6}$$

PROPOSITION 3. — Au processus h est associée une constante $\theta > 0$ telle que la covariance c_i vérifie l'une des deux alternatives :

i) $$c_i = d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^n$$

ii) $$c_i = \begin{cases} d_i, & i = 2, 4, \ldots, 2^n \\ -d_i, & i = 1, 3, \ldots, 2^n - 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Remarquons que la restriction $\{h_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ à A_n du processus de Pitt décrit au théorème 1, indexé par le cercle entier satisfait les conditions requises. Sa covariance est du type *i*). D'autre part, le processus h'_k donné par h_k si k est pair et $-h_k$ si k est impair convient également et a pour covariance *ii*). Or l'équation aux différences (4) a des solutions qui dépendent de l'équation caractéristique

$$\beta\lambda^2 - \lambda + \beta = 0. \tag{7}$$

Les conditions imposées $c_0 = 1$ et $c_i = c_{2^n - i} \neq 0$ écartent les solutions provenant de racines doubles ou imaginaires, ce qui implique $|\beta| < \frac{1}{2}$. Les deux solutions proposées sont celles qui correspondent respectivement à $\beta > 0$ et $\beta < 0$.

Remarques. — 1° Le processus h indexé par A_n induit un processus indexé par A_{n-1} vérifiant les mêmes hypothèses, ceci pour $n = 3, 4, \ldots$. Notons β_n et β_{n-1} les paramètres associés provenant de l'équation (4). Si l'on écrit cette équation (4) pour

$$i = 2k\,, \qquad 2k - 1 \qquad \text{et} \qquad 2k + 1$$

respectivement, en tenant compte du fait que c_{2k} fait partie de la matrice de covariance du processus indexé par A_{n-1}, on déduit facilement la relation

$$\beta_{n-1} = \beta_n^2(1 - 2\beta_n^2)^{-1}\,. \tag{8}$$

Cette relation montre que si h est induit sur A_n par un processus indexé par A_{n+1} ayant les mêmes propriétés, ceci impose l'alternative i). Ceci peut redémontrer le théorème 1, la continuité de la covariance permettant une approximation par les dyadiques.

2° Si Λ est la matrice de covariance de h, on a :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_1 & 1 & c_1 & c_2 & \ldots & c_4 & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & 1 & c_1 & \ldots & c_5 & c_4 & c_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \ldots & 1 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \ldots & c_1 & 1 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_2 & c_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Le calcul de la matrice inverse de la matrice de covariance Λ est grandement facilité par le fait que l'on sait que les c_i satisfont l'équation aux différences (4) : si l'on pose $b^2 = 1 - 2\beta c_1$ et

$$\Lambda' = \frac{1}{b^2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\beta \\ -\beta & 1 & -\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 & -\beta & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\beta & 1 & -\beta \\ -\beta & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix}$$

alors vérifier que $\Lambda' = \Lambda^{-1}$ (Λ donnée par (9)) revient à demander que les c_i vérifient l'équation (4). On montre alors facilement que la densité conjointe du processus h indexé par A_n est de la forme :

$$(10)\quad f(x_0, x_1, \ldots, x_{2^n-1})$$
$$= k \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2b_n^2}\left[(x_0^2+x_1^2+\ldots+x_{2^n-1}^2) - 2\beta_n(x_0x_1+x_1x_2+\ldots+x_{2^n-1}x_0)\right]\right\}$$

Un simple calcul matriciel montre encore, en tenant compte de la proposition 3 et des notations ci-dessus que la densité conditionnelle donnant la distribution de h_i sachant que $h_{i+1} = z, h_{i-1} = y$ est gaussienne de moyenne $m(y, z) = \pm (y + z)/\text{ch}\left(\frac{\theta\pi}{2^{n-1}}\right)$ (le signe étant celui de c_1) et de variance $\sigma^2 = \text{th}(\theta\pi) \cdot \text{th}\, \frac{\theta\pi}{2^{n-1}}$.

Si nous notons $f(x \mid y, z)$ cette densité conditionnelle, un calcul élémentaire montre aussi qu'elle est celle d'une loi $N(\beta_n \cdot (y + z), b_n^2)$. D'autre part, si nous posons $h(x, y) = \exp\left[-\frac{1}{2b_n^2}(x^2 - 2\beta_n xy)\right]$, on vérifie que ces $h(x, y)$ font de (10) l'équivalent de la représentation gibbsienne (1). De plus, $h(x, y) = f(x \mid y, 0)/f(0 \mid y, 0)$ montre le fait classique que cette représentation s'obtient à partir des « spécifications ponctuelles » $f(x \mid y, z)$.

2.1. **Processus à deux valeurs indexé par le sous-groupe fini A_n.**

Soit de nouveau $A_n = \{ t_k, t_k = 2k\pi/2^n, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \}$ (avec l'addition mod. 2π) et $\{ X_k \}_{k=0}^{2^n-1}$ un processus indexé par A_n, où on a posé $X_k = X_{t_k}$. Si le processus est markovien, à deux valeurs (± 1 pour simplifier les notations), de distribution invariante par permutation circulaire des indices, donnée par une densité positive f, alors celle-ci est décrite par la proposition 1 *ii*), à l'aide de deux paramètres α et β. Nous nous restreindrons au cas où $P\{ X_i = +1 \} = P\{ X_i = -1 \}$ pour lequel un seul paramètre suffit.

PROPOSITION 4. — Si $\{ X_k \}_{k=0}^{2^n-1}$ est un processus à deux valeurs ± 1 équiprobables vérifiant les conditions précisées ci-dessus, alors sa densité est donnée par :

$$(11)\quad f(x_0, x_1, \ldots, x_{2^n-1}) = a \cdot \alpha^N$$
$$\text{où}\quad N = \text{Card}\,\{ i \mid x_i = +1, x_{i+1} = -1, i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \}$$

et a est une constante.

Nous démontrerons ce résultat élémentaire après les considérations algébriques suivantes.

Si le processus X a la densité f donnée par (2) et que nous notons $f(x \mid y, z) = \mathrm{P}\{ X_i = x \mid X_{i-1} = y, X_{i+1} = z \}$, $x, y, z = \pm 1$, alors

$$(12) \quad f(-1 \mid -1, -1) = \frac{1}{1+\alpha}, \qquad f(-1 \mid -1, 1) = f(-1 \mid 1, -1) = \frac{1}{1+\beta}$$

$$f(-1 \mid 1, 1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta^2}.$$

On vérifie la première par exemple en tenant compte de la propriété markovienne :

$$\begin{aligned} & f(-1 \mid -1, -1) \\ & = f(-1 \mid -1, -1, \ldots, -1) \\ & = f(-1, -1, \ldots, -1)/\{ f(1, -1, \ldots, -1) + f(-1, -1, \ldots, -1)\} \end{aligned}$$

Remarque. — On vérifie aisément que les X_i sont indépendantes si et seulement si $\alpha = \beta$.

Soit $X^{(k)}$ la restriction du processus à A_k, $k \leqslant n$, f_k, a_k, α_k, β_k la densité et les paramètres correspondants.

Une utilisation itérée de la formule des probabilités composées et de la propriété markovienne permet d'écrire pour tout choix des $x_i = \pm 1$:

$$(13) \quad f_k(x_0, x_1, \ldots, x_{2^k-1}) = f_{k-1}(x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2^k-2}) \cdot \prod_{i=0}^{2^{k-1}-1} f_k(x_{2i+1} \mid x_{2i}, x_{2i+2}).$$

Par un choix judicieux des x_i (successivement : $x_i \equiv -1$ puis $x_i = (-1)^i$ puis $x_i = +1$ si $i = 4k$, $x_1 = -1$ sinon), la formule (13) permet de déduire les relations :

$$(14) \quad \alpha_{k-1} = \left(\frac{1+\beta_k}{1+\alpha_k}\right)^2 \alpha_k, \qquad \beta_{k-1} = \frac{\alpha_k + \beta_k^2}{1+\alpha_k}, \qquad k = 3, 4, \ldots, n.$$

Démonstration de la proposition 4. — Vrai pour $n = 2$: dans ce cas, la formule (2) permet de calculer explicitement $\mathrm{P}\{ X_0 = \pm 1 \}$: il suffit de sommer les probabilités de toutes les trajectoires composant cet événement :

$$\mathrm{P}\{ X_0 = 1 \} = k\{ (\alpha + \beta^2)^2 + \alpha(1+\beta)^2 \}$$

et

$$\mathrm{P}\{ X_0 = -1 \} = k\{ (1+\alpha)^2 + \alpha(1+\beta)^2 \}.$$

L'égalité de ces deux probabilités équivaut à $\beta = 1$ et alors (2) se ramène à (11). On conclut par récurrence : si $\beta_{n-1} = 1$, alors $\beta_n = 1$ grâce à (14).

Dès maintenant, nous considérons des processus à valeurs ± 1 équiprobables et par conséquent déterminés par la densité (11).

PROPOSITION 5. — Soit X le processus indexé par A_n dont la distribution est donnée par (11), $X^{(k)}$ ses restrictions aux A_k, $2 \leqslant k \leqslant n$, α_k les paramètres correspondants. Alors :

$$\begin{array}{lll} i) & \alpha_k \leqslant 1\,, & k < n \\ ii) & \alpha_k = (2 - \alpha_{k-1} - 2\sqrt{1 - \alpha_{k-1}})/\alpha_{k-1}, & 3 \leqslant k < n \\ iii) & \alpha_n = (2 - \alpha_{n-1} \pm 2\sqrt{1 - \alpha_{n-1}})/\alpha_{n-1}\,. & \end{array}$$

Démonstration. — Découle de (14) (où les β_k valent 1) et de considérations algébriques élémentaires.

Nous utiliserons ce résultat pour construire un processus indexé par l'ensemble A des dyadiques. Auparavant, nous allons étudier la covariance du processus X indexé par A_n. Cette étude est rendue possible par les deux lemmes élémentaires suivants :

LEMME 1. — *i*) Soient U, V à valeurs ± 1, centrées. Alors

$$P\{U = u, V = v\} = \frac{1}{4}[1 + uvE(UV)]\,.$$

ii) Si U, V, W à valeurs ± 1 sont centrées et telles que

(15) $P\{U = 1, V = 1, W = 1\} = P\{U = -1, V = -1, W = -1\}$;

alors

$$P\{U = u, V = v, W = w\} = \frac{1}{8}[1 + uvE(UV) + uwE(UW) + vwE(VW)\,.$$

(La démonstration, purement algébrique, est donnée dans [*3*].)

LEMME 2. — Si X est le processus indexé par A_n, $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ et que $U = X_i$, $V = X_j$, $W = X_k$, alors U, V, W ont la propriété (15).

Démonstration. — Soit $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{2^n-1})$ une trajectoire du processus X. Alors $f(\vec{x}) = f(-\vec{x})$ par la représentation (11) et

$$\begin{aligned} P\{U = 1, V = 1, W = 1\} \\ &= \sum_{x_i = x_j = x_k = -1} f(\vec{x}) = \sum_{x_i = x_j = x_k = 1} f(-\vec{x}) = \sum_{x_i = x_j = x_k = -1} f(\vec{x}) \\ &= P\{U = -1, V = -1, W = -1\}\,. \end{aligned}$$

Si $c_i = EX_kX_{k+i}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$ est la covariance du processus X, nous pouvons montrer maintenant qu'elle est la même que celle du processus gaussien h du paragraphe 1 :

PROPOSITION 6. — Les énoncés des propositions 2 et 3 sont valables pour X à la place de h.

Démonstration. — La propriété markovienne de X entraîne par exemple (pour tout $i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$) :

$$E[X_kX_{k+i} \mid X_{k-1}, X_{k+1}] = E[X_k \mid X_{k-1}, X_{k+1}] \cdot E[X_{k+i} \mid X_{k-1}, X_{k+1}]$$

ou, en prenant l'espérance dans les deux membres :

$$\begin{aligned} EX_kX_{k+i} &= E(X_{k+i} \cdot E[X_k \mid X_{k-1}, X_{k+1}]) \\ &= \sum_{x_{k-1}, x_{k+1} = \pm 1} ([f(1 \mid x_{k-1}, x_{k+1}) - f(-1) \mid x_{k-1}, x_{k+1})] \\ &\quad \cdot [P\{X_{k-1} = x_{k-1}, X_{k+1} = x_{k+1}, X_{k+i} = 1\} \\ &\quad - P\{X_{k-1} = x_{k-1}, X_{k+1} = x_{k+1}, X_{k+i} = -1\}]) \end{aligned}$$

d'où, en utilisant (12) où $\beta = 1$ et la représentation du lemme 1 *ii*) :

$$c_i = \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}(c_{i+1} + c_{i-1})$$

ce qui est l'équation (4) avec $\beta = \dfrac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}$.

Il est clair ici que $|\beta| < \frac{1}{2}$ et on peut résoudre l'équation aux différences comme il a été procédé à la fin de la démonstration de la proposition 3.

Remarques. — 1) Les deux alternatives de la proposition 3 correspondent aux deux possibilités $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$.

2) Le cas $\alpha = 1$ qui décrit le processus indépendant est exclu ; c'est en fait un cas limite.

3) Si le processus X est lui-même induit par un processus indexé par A_{n+1}, alors sa covariance est celle de la proposition 3 *i*) : ceci résulte de la proposition 5.

2.2. Processus à deux valeurs indexé par les dyadiques.

Supposons qu'il existe un processus markovien à deux valeurs ± 1, invariant par rotations, centré, indexé par l'ensemble $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ des dyadiques du cercle. Alors sa restriction à chacun des A_k est un processus au sens du paragraphe précédent et il existe une suite $\{ \alpha_k \}$ vérifiant les relations de la proposition 5 *ii*) avec en particulier $\alpha_2 = \alpha \leqslant 1$ (< 1 si l'on excepte l'indépendance). Il est clair réciproquement que la donnée d'un paramètre α, $0 < \alpha \leqslant 1$ permet de construire récursivement par les mêmes relations une suite de paramètres α_k décrivant une suite de processus $X^{(k)}$ indexés par les A_k telle que $X^{(k)}$ est la restriction à A_k de $X^{(k+1)}$ $\forall k \geqslant 2$.

LEMME 3. — Soit α donné, $0 < \alpha \leqslant 1$. Si l'on pose $\alpha_2 = \alpha$ et

$$\alpha_{k+1} = (2 - \alpha_k - 2\sqrt{1 - \alpha_k})/\alpha_k, \qquad k \geqslant 2,$$

on définit récursivement une suite décroissante de nombres $\alpha_k \in]0, 1]$. Si $\alpha = 1$, $\alpha_k = 1 \forall k$, sinon $\alpha_k \downarrow 0$ avec $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \dfrac{1}{4}$.

Démonstration. — Si $\alpha = 1$, il est évident que $\alpha_k = 1$ $\forall k$. Supposons donc $\alpha < 1$. Définissons

$$f(x) = (2 - x - 2\sqrt{1 - x})/x .$$

En étudiant f' et f'', nous constatons que f est monotone croissante et convexe sur $]0, 1]$.

Comme $\alpha_{k+1} = f(\alpha_k)$, ceci implique que la suite $\{ \alpha_k \}$ est décroissante. Or $\dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \dfrac{(1 + \alpha_{k+1})^2}{4}$ montre que α_{k+1} et α_k sont de même signe. Donc $\alpha_k \downarrow a \geqslant 0$ et $\dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \xrightarrow{k \to \infty} \dfrac{(1 + a)^2}{4} < 1 \Rightarrow a = 0$ et la conclusion.

Soit $\alpha < 1$ fixé, $\{ \alpha_n \}$ la suite qui lui est associée dans le lemme précédent. Chaque α_n définit un processus $X^{(n)}$ indexé par A_n dont la distribution est donnée par la formule (11).

Soit $\Omega = \{ -1, 1 \}^A$ muni de la tribu naturelle des « cylindres finis ». Pour tout ensemble fini $\{ t_1, t_2, \ldots, t_k \} \subset A$, posons :

$$\begin{aligned} P \{ \omega \mid \omega(t_1) = x_1, \omega(t_2) = x_2, \ldots, \omega(t_k) = x_k \} \\ = P \{ X^{(n)}_{t_1} = x_1, X^{(n)}_{t_2} = x_2, \ldots, X^{(n)}_{t_k} = x_n \} \end{aligned}$$

pour un n tel que $t_1, t_2, \ldots, t_k \in A_n$, $x_j = \pm 1$.

PROPOSITION 7. — Si l'on pose $X_t(\omega) = \omega(t)$ $\forall t \in A$, on a ainsi défini un processus indexé par les dyadiques du cercle, markovien, invariant par rotation, centré, dont la covariance est de la forme

$$E(X_s X_{s+t}) = \operatorname{ch} \theta(t - \pi)/\operatorname{ch} \theta\pi \qquad \text{pour un } \theta > 0 .$$

De plus celle-ci suffit à déterminer le processus.

Démonstration. — La construction entreprise est celle de Kolmogorov, car le système de probabilités donnant la mesure des cylindres finis est projectif par le paragraphe précédent. Les propriétés du processus découlent alors de celles des $X^{(n)}$. De plus, on peut donner explicitement les répartitions finies par la covariance. En effet, l'utilisation systématique de la propriété markovienne et de la formule des probabilités composées permet d'écrire, si $t_1, t_2, \ldots, t_k \in A$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ et $x_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$(16) \quad P\{X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_k} = x_k\} = \prod_{j=3,4,\ldots,k} P\{X_{t_j} = x_j, X_{t_{j-1}} = x_{j-1}, X_{t_1} = x_1\} \Big/ \prod_{j=3,4,\ldots,k-1} P\{X_{t_j} = x_j, X_{t_1} = x_1\}$$

En appliquant le lemme 1, on arrive à la conclusion.

Remarque. — Le processus est déterminé autant par le paramètre α que par le paramètre θ. En calculant

$$P\{X_{\frac{\pi}{2}} = 1 \mid X_0 = 1, X_\pi = 1\}$$

d'une part avec (12) et d'autre part directement en appliquant le lemme 1, on a la relation

$$(17) \qquad \alpha = \left(1 + \operatorname{ch} \theta\pi - 2 \operatorname{ch} \frac{\theta\pi}{\pi}\right) \Big/ \left(1 + \operatorname{ch} \theta\pi + 2 \operatorname{ch} \frac{\theta\pi}{2}\right), \ \theta \in]0, \infty[.$$

A $\theta = 0$ correspondrait $\alpha = 0$, c'est-à-dire le processus déterministe. Lorsque $\theta \to \infty$, on s'approche de $\alpha = 1$ donc de l'indépendance.

2.3. **Processus indexés par le cercle.**

La construction du paragraphe précédent se prolonge de façon naturelle au cercle entier :

THÉORÈME 2. — Pour tout $\theta > 0$, il existe un processus ${}_\theta X = X$ unique (aux versions équivalentes près) indexé par le cercle, à valeurs ± 1 équiprobables, invariant par rotations, markovien et ayant des répartitions finies strictement positives, dont la covariance est donnée par (3). Les répartitions finies sont entièrement déterminées par la covariance, grâce à la formule (16). Réciproquement, tout processus indexé par le cercle, markovien, à deux valeurs ± 1 équiprobables, ayant les propriétés d'invariance et de positivité et une covariance continue est du type ${}_\theta\mathrm{X}$.

Démonstration. — Les vérifications à faire pour montrer que l'on a bien construit un processus ayant les propriétés voulues ne portent que sur les répartitions finies qui sont données par la formule (16). Les propriétés du processus indexé par les dyadiques se transmettent alors par continuité. Pour la réciproque, il suffit de voir que la restriction du processus aux dyadiques a les mêmes propriétés, donc est de la forme construite au paragraphe précédent et en particulier, a une covariance donnée par (3) sur les dyadiques. On conclut par continuité.

A partir de maintenant, nous allons étudier les propriétés des trajectoires du processus $\mathrm{X} = {}_\theta\mathrm{X}$, pour un θ fixé.

Nous commençons par montrer que le processus a presque sûrement un nombre fini de sauts. Pour cela, nous rappelons un résultat connu, que nous trouvons par exemple dans Varadhan [*4*], p. 39.

PROPOSITION 8. — Soit $\{ \mathrm{X}_t \}_{t \in [0,1]}$ un processus stochastiquement continu tel que $\exists p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $r > 0$ et :

$$\mathrm{E}[\, | \mathrm{X}_{t_1} - \mathrm{X}_{t_2} |^p \, | \mathrm{X}_{t_2} - \mathrm{X}_{t_3} |^q \subseteq \leqslant c \, | t_1 - t_3 |^{1+r} \tag{18}$$

dès que $t_1 < t_2 < t_3$, alors le processus peut être réalisé dans l'espace $\mathrm{D}[0, 1]$.

PROPOSITION 9. — Le processus $\mathrm{X} = {}_\theta\mathrm{X}$ est stochastiquement continu et vérifie (18) pour $t_1, t_2, t_3 \in \mathrm{T}$, $t_1 < t_2 < t_3$.

Démonstration. — Le processus est stochastiquement continu par continuité de la covariance et le lemme 1. Ce même lemme montre que l'événement $| \mathrm{X}_{t_3} - \mathrm{X}_{t_2} |^p \cdot | \mathrm{X}_{t_2} - \mathrm{X}_{t_1} |^q = 2^{p+q}$ a la probabilité

$$\frac{1}{4} [1 - \mathrm{Cov} \, | t_3 - t_2 | - \mathrm{Cov} \, | t_2 - t_1 | + \mathrm{Cov} \, | t_3 - t_1 | \,]$$

qui donne aussi l'espérance dans (18) (au facteur 2^{p+q} près), car l'expression entre crochet vaut 0 quand elle ne vaut pas 2^{p+q}. En remplaçant la covariance par sa valeur (3), on obtient facilement la conclusion par le développement de Taylor de ch x.

Nous savons donc maintenant que le processus $X = {}_\theta X$ a presque sûrement un nombre fini de sauts. Pour décrire la répartition de ceux-ci, nous introduisons les événements et les probabilités suivants :

$$E^m = \{ X_t \text{ a exactement } 2m \text{ sauts} \} \text{ pour } m = 0, 1, 2, \dots$$

Pour $2^n \geqslant 2m$, $m = 0, 1, 2, \dots, n \in \{ 2, 3, 4, \dots \}$:

$$E^{n,m} = \{ X_t^{(n)} \text{ a exactement } 2m \text{ sauts} \}.$$

$$q_m = P(E^m)$$

$$q_m^n = P(E^{n,m}).$$

Pour $\vec{M} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $\sum_{i=1}^{n} m_i = 2m$:

$$q(\vec{M}) = P \left\{ X_t \text{ a exactement } m_i \text{ sauts dans l'intervalle } \left[\frac{(i-1)2\pi}{n}, \frac{i \cdot 2\pi}{n} \right[, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Si $\left[\frac{2^r}{n} \right] - 1 \geqslant \max_i \{ m_i \}$:

$$q^r(\vec{M}) = P \left\{ X_t^r \text{ a exactement } m_i \text{ sauts dans l'intervalle } \left[\frac{(i-1) \cdot 2\pi}{n}, \frac{i \cdot 2\pi}{n} \right[, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Pour $r = 0, 1, 2, \dots, s \in [0, 1]$:

$$q_r(s) = P \{ X_t \text{ a exactement } r \text{ sauts dans l'intervalle } [0, s \cdot 2\pi] \}$$

Pour $m = 0, 1, 2, \dots, r \leqslant 2m$, $s \in [0, 1]$:

$$q_r^m(s) = P \{ X_t \text{ a exactement } r \text{ sauts dans l'intervalle } [0, s \cdot 2\pi] \mid X_t \text{ a exactement } 2m \text{ sauts} \}.$$

LEMME 4. — *i)* $$q_m^n = 2a_n \alpha_n^m \binom{2^n}{2m}$$

ii) $$q_m^n \xrightarrow{n \to \infty} q_m$$

Démonstration. — *i)* Découle de la définition de $X^{(n)}$ et de sa loi (11).

ii) Par régularité des trajectoires, on peut affirmer qu'à un ensemble négligeable près :

$$E^m = \liminf_n E^{n,m} = \limsup_n E^{n,m},$$

d'où la conclusion.

LEMME 5. — Sachant que le processus a $2m$ sauts, ceux-ci se répartissent dans les n intervalles $\left[\frac{(i-1)2\pi}{n}, \frac{i \cdot 2\pi}{n}\right[$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ suivant la loi de Maxwell-Boltzmann.

Démonstration. — Il faut calculer $q(\vec{M})/q_m$.

Or par le lemme 4 : $q_m^r \to q_m$. Par un raisonnement identique :

$$q^r(\vec{M}) \to q(\vec{M})$$

Mais on montre facilement que :

$$q^r(\vec{M}) = 2a_r\alpha_r^{2m}\binom{r_1}{m_1}\cdot\binom{r_2}{m_2}\cdots\binom{r_n}{m_n}$$

où $r_i = \left[\frac{2^r}{n}\right]$ ou $\left[\frac{2^r}{n}\right] - 1$. Donc

$$\frac{q^r(\vec{M})}{q_m^r} = \binom{r_1}{m_1}\binom{r_2}{m_2}\cdots\binom{r_n}{m_n}\Big/\binom{2^r}{2m}.$$

Or le terme de gauche tend vers $\dfrac{q(\vec{M})}{q_m}$ comme nous l'avons vu plus haut et le terme de droite est une composante d'une loi hypergéométrique multiple qui tend lorsque $r \to \infty$ vers

$$\frac{2m\,!}{\prod_{i=1}^{n}(m_i\,!)}\,n^{-2m}$$

qui décrit la loi de Maxwell-Boltzmann.

PROPOSITION 10. — $q_r^m(s) = \dfrac{(2m)\,!}{r\,!\,(2m-r)\,!}\,s^r(1-s)^{(2m-r)}$.

Démonstration. — Par régularité des trajectoires, il suffit de vérifier la proposition pour tout s rationnel, $s \in [0, 1]$. Prenons $s = \frac{j}{n}$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

$$q_r^m\left(\frac{j}{n}\right) = \mathrm{P}\left\{ \mathrm{X}_t \text{ a exactement } r \text{ sauts dans } \left[0, \frac{j}{n}\cdot 2\pi\right] \middle| \mathrm{X}_t \text{ a exactement } 2m \text{ sauts} \right\}$$

$$= \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_j=r \\ r_{j+1}+\ldots+r_n=2m-r}} \mathrm{P}\left\{ \mathrm{X}_t \text{ a exactement } r_i \text{ sauts dans } \left[\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}, \frac{i-2\pi}{n}\right[, \; i = 1, 2, \ldots, n \,\middle|\, \mathrm{X}_t \text{ a exactement } 2m \text{ sauts} \right\}$$

$$= \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_j=r \\ r_{j+1}+\ldots+r_n=2m-r}} \frac{(2m)!}{\prod_{i=1}^{n}(r_i)!} n^{-2m} \quad \text{(par le lemme 5)}$$

$$= \sum_{r_1+\ldots+r_j=r} \frac{r!}{\prod_{i=1}^{j}(r_i)!} j^{-r} \cdot \sum_{r_{j+1}+\ldots+r_n=2m-r} \frac{(2m-r)!}{\prod_{i=j+1}^{n}(r_i)!}(n-j)^{-(2m-r)}$$

$$\cdot \frac{(2m)!}{r!(2m-r)!}\left(\frac{j}{n}\right)^r\left(\frac{n-j}{n}\right)^{(2m-r)}.$$

Or les deux sommes représentant les deux premiers termes de ce produit valent 1 et on a donc la conclusion.

Nous avons maintenant les éléments suffisants pour déterminer les principales fonctions décrivant les trajectoires du processus.

Proposition 11. — Si $f(t) = \mathrm{P}\{\mathrm{X}_s = 1 \ \forall s \in [0, t]\}$, alors f est continue sur $[0, 2\pi]$.

Démonstration. — f décroît sur $[0, 2\pi]\left(f(0) = \frac{1}{2}\right)$ et :

$$\begin{aligned} f(t) - f(t+\varepsilon) &= \mathrm{P}\{\mathrm{X}_s = 1 \ \forall s \in [0, t] \text{ et } \exists s' \in]t, t+\varepsilon] \text{ tel que } \mathrm{X}_{s'} = -1\} \\ &\leqslant \mathrm{P}\{\mathrm{X}_t \text{ a au moins un saut dans } [t, t+\varepsilon]\} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} q_r(\varepsilon) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{2m\geqslant r} q_r^m(\varepsilon)\cdot q_m \\ &= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{2m\geqslant r} \frac{(2m)!}{r!(2m-r)!}\varepsilon^r(1-\varepsilon)^{(2m-r)}\cdot q_m \overset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Proposition 12. — $f(t) = \frac{1}{2} c\left(\frac{t}{2}\right)$.

Démonstration. — 1° f vérifie les deux équations

$$i) \qquad f(t)f(2\pi - t) = \frac{1}{4} f(2\pi)[1 + c(t)], \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$ii) \qquad f(2t) = 2\frac{1 + 2c(t) + c(2t)}{[1 + c(t)]^2} f^2(t), \qquad t \in [0, \pi].$$

En effet, pour *i*) :

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= P\{X_s = 1 \ \forall s \in [0, 2\pi]\} \\ &= P\{X_s = 1, \ s \in [0, t], \ X_s = 1, \ s \in [t, 2\pi]\} \\ &= P\{X_s = 1, \ s \in [0, t] \mid X_s = 1, \ s \in [t, 2\pi]\} \\ &\quad \cdot P\{X_s = 1, \ s \in [t, 2\pi]\} \\ &= P\{X_s = 1, \ s \in [0, t] \mid X_t = 1, \ X_{2\pi} = 1\} \\ &\quad \cdot P\{X_s = 1, \ s \in [t, 2\pi]\} \end{aligned}$$

grâce à la propriété markovienne, ce qui équivaut, par l'invariance par rotations, à :

$$f(2\pi) = [f(t)/P\{X_t = 1, \ X_0 = 1\}] \cdot f(2\pi - t),$$

ce qui donne l'équation *i*), si l'on tient compte du lemme 1. Pour *ii*) :

$$\begin{aligned} f(t) &= P\{X_s = 1, \ s \in [0, t] \mid X_0 = 1, \ X_t = 1\} \cdot P\{X_0 = 1, \ X_t = 1\} \\ &= A \cdot [1 + c(t)]/4 \end{aligned}$$

si l'on a posé

$$A = P\{X_s = 1, \ s \in [0, t] \mid X_0 = 1, \ X_t = 1\}$$

$$\begin{aligned} f(2t) = {} & P\{X_s = 1, \ s \in [0, t], X_s = 1, s \in [t, 2t] \mid X_0 = 1, X_t = 1, X_{2t} = 1\} \\ & \cdot P\{X_0 = 1, X_t = 1, X_{2t} = 1\} \end{aligned}$$

Markov

$$\begin{aligned} = \quad & P\{X_s = 1, s \in [0, t] \mid X_0 = 1, X_t = 1, X_{2t} = 1\} \\ & \cdot P\{X_s = 1, s \in [t, 2t] \mid X_0 = 1, X_t = 1, X_{2t} = 1\} \\ & \cdot P\{X_0 = 1, X_t = 1, X_{2t} = 1\} \end{aligned}$$

Markov

$$\begin{aligned} = \quad & P\{X_s = 1, s \in [0, t] \mid X_0 = 1, X_t = 1\} \\ & \cdot P\{X_s = 1, s \in [t, 2t] \mid X_t = 1, X_{2t} = 1\} \\ & \cdot P\{X_0 = 1, X_t = 1, X_{2t} = 1\} \\ = {} & A^2 \cdot [1 + 2c(t) + c(2t)]/8 \end{aligned}$$

par invariance par rotations.

En comparant les deux expressions donnant $f(t)$ et $f(2t)$, on obtient *ii*).

2° La seule fonction f continue, positive, telle que $f(0) = \frac{1}{2}$, vérifiant *i*) et *ii*) est la fonction $f(t) = \frac{1}{2} c\left(\frac{t}{2}\right)$. En effet : on peut supposer $f(2\pi) > 0$, car $f(2\pi) = 0 \overset{ii)}{\Rightarrow} f(\pi) = 0 \overset{ii)}{\Rightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \overset{i)}{\Rightarrow} f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et par récurrence :

$$f\left(\frac{k}{2^n} \cdot 2\pi\right) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, 2^n .$$

La récurrence porte sur n : il est vérifié que $f\left(\frac{k}{2^n} \cdot 2\pi\right) = 0 \, \forall k = 1, 2, \ldots, 2^n$ pour $n = 2$. Montrons que si $\mathrm{f}\left(\frac{k}{2^n} \cdot 2\pi\right) = 0 \ \forall k = 1, 2, \ldots, 2^n$, alors

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}} \cdot 2\pi\right) = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, 2^{n+1} .$$

En effet l'hypothèse de récurrence et la relation *ii*) entraînent

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}} \cdot 2\pi\right) = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, 2^n ,$$

d'où par *i*)

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}} \cdot 2\pi\right) = 0 \qquad \forall k = 2^n + 1, 2^n + 2, \ldots, 2^{n+1} .$$

Par continuité de f, on aurait $f \equiv 0$ sur $[0, 2\pi]$, ce qui contredit $f(0) = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2} \geqslant f(2\pi) > 0$ et on peut poser

$$f(2\pi) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \theta\pi} = \frac{1}{2} c\left(\frac{2\pi}{2}\right) .$$

Si l'on pose de façon générale :

$$f(t) = u(t) \cdot \frac{1}{2} c\left(\frac{t}{2}\right) ,$$

on a

(19) $$u(t) > 0 , \qquad u(0) = u(2\pi) = 1$$

et u continue.

On vérifie que $g(t) = \frac{1}{2} c\left(\frac{t}{2}\right)$ remplit les conditions *i*) et *ii*).

Par conséquent, si l'on remplace $f(t)$ par $u(t) \cdot \frac{1}{2} c\left(\frac{t}{2}\right)$ dans *i*) et *ii*), on obtient :

$$\left.\begin{array}{ll} iii) & u(t) \cdot u(2\pi - t) = 1 \\ iv) & u(2t) = u^2(t) \end{array}\right\} \quad t \in [0, \pi] \, .$$

Par un raisonnement par récurrence comme celui tenu plus haut, on montre alors que les conditions (19) et les relations *iii*) et *iv*) entraînent que $u(t) \equiv 1$ sur les dyadiques, donc sur $[0, 2\pi]$ par continuité, ce qui donne la conclusion.

PROPOSITION 13.

$$q_m = \frac{1}{\text{ch } \theta\pi} \cdot \frac{(\theta\pi)^{2m}}{(2m)\,!} \, .$$

Démonstration. — Mettons en évidence le fait que q_m dépend du paramètre θ : $q_m = q_m(\theta)$.

Le lemme 4 donnait :

$$q_m^n(\theta) \xrightarrow{n \to \infty} q_m(\theta)$$

et

$$q_m^n(\theta) = a_n(\theta) \cdot \alpha_n^m(\theta) \cdot 2\binom{2^n}{2m}$$

Par continuité des trajectoires

$$a_n(\theta) \xrightarrow{n \to \infty} f(2\pi) \, ,$$

que nous connaissons.

De la même façon que nous avons obtenu la formule (17), nous pouvons exprimer $\alpha_n(\theta)$ en termes de cosinus hyperboliques. L'utilisation du développement de Taylor de celui-ci et des calculs élémentaires, mais fastidieux montrent que $\alpha_n(\theta)$ se comporte comme $2^{-2n}(\theta\pi)^2$. Donc :

$$\begin{aligned} q_m(\theta) &= \frac{(\theta\pi)^{2m}}{\text{ch } \theta\pi} \cdot \lim_{n \to \infty} 2^{-2nm}\binom{2^n}{2m} \\ &= \frac{(\theta\pi)^{2m}}{\text{ch } \theta\pi} \cdot \frac{1}{(2m)\,!} \, . \end{aligned}$$

PROPOSITION 14. — La fonction $q_r(s)$ est donnée par :

$$q_r(s) = \begin{cases} (\text{ch } \theta\pi)^{-1} \, [\text{ch } (1 - s)\theta\pi] \dfrac{(\theta\pi s)^r}{r\,!} & \text{si } r \text{ pair} \\[2ex] (\text{ch } \theta\pi)^{-1} \, [\text{ch } (1 - s)\theta\pi] \dfrac{(\theta\pi s)^r}{r\,!} & \text{si } r \text{ impair} \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
q_r(s) &= \sum_{2m \geqslant r} q_r^m(s) \cdot q_m \\
&= \sum_{2m \geqslant r} \frac{(2m)\,!}{r\,!\,(2m-r)\,!} s^r (1-s)^{(2m-r)} \cdot \frac{(\theta\pi)^{2m}}{(2m)\,!\,\mathrm{ch}\,\theta\pi} \\
&= (\mathrm{ch}\,\theta\pi)^{-1} \frac{s^r}{r\,!} \sum_{2m \geqslant r} \frac{(1-s)^{(2m-r)}}{(2m-r)\,!} \cdot (\theta\pi)^{2m} \\
&= \begin{cases} (\mathrm{ch}\,\theta\pi)^{-1} \dfrac{s^r}{r\,!} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-s)^{2k}}{(2k)\,!} (\theta\pi)^{(2k+r)} & \text{si } r \text{ pair} \\[2ex] (\mathrm{ch}\,\theta\pi)^{-1} \dfrac{s^r}{r\,!} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-s)^{2k+1}}{(2k+1)\,!} (\theta\pi)^{(2k+1+r)} & \text{si } r \text{ impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Nous avons donné une description probabiliste aussi complète que possible des trajectoires du processus. Celle-ci nous permet d'en déduire une réalisation plus explicite. En effet, il est clair que l'on décrit entièrement une trajectoire en donnant le nombre de sauts et leur position, si l'on précise en plus, la valeur prise à l'origine, par exemple. Le nombre de sauts est donné par une variable aléatoire M à valeurs dans 0, 2, 4, 6, ... dont la distribution est donnée par $P\{M = 2m\} = q_m$. Connaissant le nombre de sauts $2m$, leur distribution dans $[0, 2\pi[$ est uniforme, ainsi que le montrent le lemme 5 et la proposition 10. La position à l'origine est la variable aléatoire X_0.

Pour des raisons de symétrie, toutes ces variables aléatoires sont indépendantes. On en déduit :

THÉORÈME 3. — On définit les variables indépendantes suivantes :

Y à valeurs ± 1, équiprobables,
N à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$ telle que $P\{N = m\} = q_m$,
Z_i à valeurs dans $[0, 1]$, réparties uniformément, $i = 1, 2, \ldots$.

Si $Z_i^s = 1$ si $Z_i > s$ et -1 sinon, alors pour

$$\tilde{X}_s(\omega) = Y(\omega) \cdot \prod_{i=0}^{2N(\omega)} Z_i^s(\omega), \qquad s \in [0, 1],$$

$X_t = \tilde{X}_{\frac{t}{2\pi}}$ définit un processus indexé par $[0, 2\pi]$, qui est une version de celui que l'on a défini au théorème 2.

Démonstration. — Évident par ce qui précède.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] G. R. GRIMMETT, A theorem about random fields. *Bull. London Math. Soc.*, t. 5, 1973, p. 81-84.

[*2*] L. D. PITT, A Markov property for gaussian processes with a multidimensional parameter. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, t. **43**, **5**, 1971, p. 367-391.

[*3*] E. CARNAL, *Processus markoviens à plusieurs paramètres*, Thèse, 1979.

[*4*] S. R. S. VARADHAN, *Stochastic processes.* Cours du Courant Inst., 1967-1968, N. Y., University.

(Manuscrit reçu le 5 mars 1981)