ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DANIEL FLIPO

Comparaison des disciplines de service des files d'attente G/G/1

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 2 (1981), p. 191-212
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_2_191_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVII, n° 2-1981, p. 191-212.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Comparaison des disciplines de service des files d'attente G/G/1

par

Daniel FLIPO

Membre du laboratoire associé au C. N. R. S., n° 224,
« Processus Stochastiques et Applications »
Laboratoire de Probabilités. Université, Paris VI,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est la comparaison en régime stationnaire des différentes disciplines de service d'une file G/G/1.

SUMMARY. — In this article we compare several queueing disciplines for a stationary G/G/1 queue.

INTRODUCTION

Dans la première partie nous précisons la notion de discipline de service et nous donnons une construction d'un vecteur d'état $\vec{S}$ de la file stationnaire, utilisant des méthodes de processus ponctuels marqués analogues à celles de U. Kalahne [*4*] et P. Franken [*3*]. Notre présentation, donnant des formules explicites de transformation du vecteur $\vec{S}$ entre deux arrivées consécutives permet la comparaison des disciplines entre elles.

La seconde partie étudie le cas des disciplines où la préemption, c'est-à-dire l'interruption du service en cours au profit d'un nouvel arrivant, est autorisée. Dans cette classe la discipline SRPT est optimale en un sens très fort.

La troisième partie, qui contient les résultats les plus nouveaux, est consacrée aux disciplines sans préemption. On y donne deux propriétés (faibles) d'optimalité de la discipline SPT, et on montre par des contre-exemples que ces résultats ne peuvent pas être améliorés même dans le cas indépendant.

La quatrième partie expose brièvement comment les résultats précédents peuvent être étendus aux files à priorités.

1. CONSTRUCTION DE LA FILE STATIONNAIRE

Le processus des arrivées et des services demandés est décrit par un processus ponctuel marqué, simple, stationnaire (on exclut donc les arrivées groupées). Pour le construire on se donne $M(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures ponctuelles de la forme $m = \sum_{i \in Z} \varepsilon_{t_i}$ où ε_t désigne la mesure de Dirac au point t, la suite des t_i étant strictement croissante et telle que $t_0 \leq 0 < t_1$. On munit $M(\mathbb{R})$ de la tribu $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ engendrée par la famille d'applications $m \to m(B)$ où B décrit la tribu $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ des boréliens de $\mathbb{R}$. Chaque arrivée est marquée par un point $\mathbb{R}_+$ représentant le service demandé. L'espace d'états sera donc $\Omega = M(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_+)^Z$ muni de la tribu $\mathscr{A} = \mathscr{M}(\mathbb{R}) \times (\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})^Z$.

On définit sur Ω le flot $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ par

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (m, \{s_n\}_{n \in Z}) & \longrightarrow & (\tau_t m, \{s_{n+p}\}_{n \in Z}) \end{array} \qquad \text{où } m\,]0, t] = p$$

et τ_t désigne la translation

$$m = \sum_{i \in Z} \varepsilon_{t_i} \to \tau_t m = \sum_{i \in Z} \varepsilon_{t_i - t} .$$

Le processus N des arrivées est la projection de $(\Omega, \mathscr{A})$ sur $(M(\mathbb{R}), \mathscr{M}(\mathbb{R}))$. Ce processus est stationnaire par construction. On écrit

$$N(\omega, .) = \sum_{i \in Z} \varepsilon_{T_i(\omega)}(.) .$$

On pose

$$\hat{\Omega} = \{ \omega \in \Omega \mid N(\omega, \{0\}) = 1 \} = \{ \omega \in \Omega \mid T_0 = 0 \} .$$

On désigne par $\hat{\theta}$ la restriction à $\hat{\Omega}$ de l'opérateur $\omega \to \theta_{T_1(\omega)}(\omega)$. A partir des lois (données) des délais inter-arrivées et des services on construit sur $\hat{\Omega}$

l'unique mesure $\hat{P}$ invariante par $\hat{\theta}$ et telle que $\int_{\hat{\Omega}} T_1 d\hat{P} = 1$. On en déduit alors la probabilité P sur Ω dont $\hat{P}$ est la mesure de Palm par la formule :

$$\int_{\Omega} Z(\omega) dP(\omega) = \int_{\hat{\Omega}} d\hat{P}(\omega) \int_0^{T_1} Z(\theta_s \omega) ds .$$

Pour plus de détails sur ces questions consulter Neveu [7].

La construction du vecteur d'état en régime stationnaire repose de manière essentielle sur le fait que la charge Γ du serveur est indépendante de la discipline de service et s'annule sur un ensemble de mesure strictement positive. Nous commencerons donc par construire Γ sur $\hat{\Omega}$.

Considérons la suite définie par récurrence sur $\hat{\Omega}$ par

$$\Gamma_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{n+1} \circ \hat{\theta} = (\Gamma_n + \sigma - \tau)^+$$

où σ désigne le service demandé par le client arrivant à T_0 et τ l'intervalle de temps $T_1 - T_0$. Pour tout entier n, Γ_n représente la partie de la charge du serveur dûe aux n derniers clients arrivés.

On pose $\xi = \sigma - \tau$ et on vérifie immédiatement que

$$\Gamma_n = \sup_{1 \leq p \leq n} \left(\sum_{k=1}^{p} \xi \circ \hat{\theta}^{-k} \right)^+$$

ce qui prouve la croissance en n de la suite Γ_n.

Soit Γ la limite croissante, éventuellement infinie de la suite Γ_n. Γ vérifie l'équation :

$$(1) \qquad \Gamma \circ \hat{\theta} = (\Gamma + \xi)^+$$

Dans tout ce qui suit nous supposons $(\hat{\Omega}, \hat{P}, \hat{\theta})$ *ergodique* [*ou, ce qui est équivalent* $(\Omega, P, \{ \theta_t \}_{t \in \mathbb{R}})$ *ergodique*] *et* $\hat{E}(\sigma) < 1$. On a alors

PROPOSITION 1. — L'équation (1) admet sur $(\hat{\Omega}, \hat{P})$ une solution unique, $\hat{P}$ p. s. finie. Cette solution vérifie en plus $\hat{P}(\Gamma = 0) > 0$. La charge stationnaire du serveur d'une file G/G/1 est cette unique solution.

Démonstration. — Prouvons d'abord l'existence d'une solution $\hat{P}$ p. s. finie de l'équation (1). $\Gamma = \lim_n \uparrow \Gamma_n = \left(\sup_{p \geq 1} \sum_{k=1}^{p} \xi \circ \hat{\theta}^{-k} \right)^+$ vérifie (1) et d'après le théorème ergodique $\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \xi \circ \hat{\theta}^{-k} \overset{\hat{P}\, p.s.}{\longrightarrow} \hat{E}(\xi) < 0$. Les variables

$\sum_{k=1}^{p} \xi \circ \hat{\theta}^{-k}$ sont donc $\hat{P}$ p. s. négatives à partir d'un certain rang et donc Γ est finie $\hat{P}$ p. s.

Toute solution η de (1) est soit $\hat{P}$ p. s. infinie, soit $\hat{P}$ p. s. finie : en effet l'événement $\{ \eta < \infty \}$ est $\hat{\theta}$ invariant, et $\hat{\theta}$ est ergodique. Toute solution $\hat{P}$ p. s. finie vérifie $\hat{P}(\eta = 0) > 0$. En effet supposons que $\hat{P}(\eta = 0)$ soit nulle. L'équation (1) s'écrit alors $\eta \circ \hat{\theta} = \eta + \xi$ $\hat{P}$ p. s. et

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ \qquad \hat{E}[(\eta + \xi) \wedge A - \eta \wedge A] = 0 \quad (\alpha)$$

Mais la variable $(\eta + \xi) \wedge A - \eta \wedge A$ tend vers ξ $\hat{P}$ p. s. lorsque $A \to +\infty$ ($\eta < \infty$ $\hat{P}$ p. s.), et $|(\eta + \xi) \wedge A - \eta \wedge A| \leq |\xi|$, donc d'après le théorème de Lebesgue $E[(\eta + \xi) \wedge A - \eta \wedge A] \xrightarrow[A \to +\infty]{} \hat{E}(\xi) < 0$ ce qui contredit (α).

Prouvons maintenant l'unicité de la solution de (1), soit η une solution $\hat{P}$ p. s. finie de (1). On a $\eta \geq \Gamma$. En effet $\eta \geq 0 = \Gamma_0$ $\hat{P}$ p. s. et $\eta \geq \Gamma_p$ implique $\eta \circ \hat{\theta} \geq (\Gamma_p + \xi)^+ = \Gamma_{p+1} \circ \hat{\theta}$ ou encore $\eta \geq \Gamma_{p+1}$ $\hat{P}$ p. s. Par passage à la limite croissante on obtient $\eta \geq \Gamma$ $\hat{P}$ p. s. Sur l'ensemble $\{ \eta = 0 \}$ de mesure > 0 η et Γ coïncident, et l'ensemble $\{ \eta = \Gamma \}$ est $\hat{\theta}$ invariant. Donc $\eta = \Gamma$ $\hat{P}$ p. s.

Remarque. — Dans le cas $\hat{E}(\sigma) > 1$ et $\hat{\theta}$ ergodique on a $\Gamma \equiv \infty$ $\hat{P}$ p. s. d'après le théorème ergodique et toute solution de (1) vérifie $\eta \geq \Gamma$ donc (1) n'admet que la solution triviale $\eta \equiv \infty$ $\hat{P}$ p. s.

L'étude du cas $\hat{E}(\sigma) = 1$ avec $\hat{\theta}$ ergodique est faite dans Borovkov [*1*]. On trouvera des conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité de l'équation (1) sans hypothèse d'ergodicité de $\hat{\theta}$ dans Sznitman [*10*].

DÉFINITION 2. — Sur $\hat{\Omega}$ on pose $\nu(\omega) = \inf\{ n \in \mathbb{N} \mid \Gamma \circ \hat{\theta}^{-n} = 0 \}$ ou $+\infty$. $\hat{\theta}$ étant ergodique la proposition 1 implique que ν est finie $\hat{P}$ p. s.

Définissons maintenant les notions de vecteurs d'état et de discipline de service. On appellera vecteur d'état et on notera en général $\vec{S}$ tout vecteur de $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ dont les I premières composantes sont strictement positives, et dont toutes les suivantes sont nulles. Un tel vecteur représentera à un instant donné la liste des services résiduels à accomplir par le serveur dans l'ordre inverse des indices : le service en cours correspond à la dernière composante non nulle de $\vec{S}$ ($\overset{\text{indice}}{\text{I}}$), le suivant à celle d'indice $I - 1$, etc. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des vecteurs d'état.

Une discipline de service sera définie comme application Φ de $\hat{\Omega}$ dans l'ensemble des permutations de $\{ 1, 2, \ldots, I + 1 \}$. Si $\vec{S}$ est le vecteur d'état juste avant l'arrivée d'un client réclamant un service σ, ce vecteur devient juste après l'arrivée $\vec{S}^+ = \Phi(\vec{S} + \sigma\,\vec{e}_{I+1})$. Sur l'ensemble

$$\{\omega \in \hat{\Omega} \mid \vec{S} = 0\} = \{\omega \in \hat{\Omega} \mid I = 0\} \qquad \text{on pose } \Phi = id.$$

Donnons les expressions de Φ pour quelques disciplines usuelles. On se place sur $\{\omega \in \hat{\Omega} \mid \vec{S} \neq 0\}$.

. *Discipline FIFO* (First in, First out), c'est-à-dire service dans l'ordre des arrivées : $\Phi = (1, 2, \ldots, I, I + 1)$.

. *Discipline LIFO* (Last in, First out), c'est-à-dire service dans l'ordre inverse des arrivées sans préemption : $\Phi = (I, I + 1)$.

. *Une variante de LIFO* est $\Phi = id$, discipline qui correspond au service dans l'ordre inverse des arrivées avec remplacement systématique du client en service par le nouvel arrivant.

. *Discipline SRPT* (Shortest Remaining Processing Time), il s'agit d'une discipline avec préemption qui sert toujours en priorité le client dont le reste de service est le plus faible.

Dans ce cas

$$\begin{array}{lll}
\Phi = (1, 2, \ldots, I + 1) & \text{sur } \{\omega \in \hat{\Omega} \mid S^1 \leq \sigma\} & \\
\Phi = (j, j + 1, \ldots, I + 1) & \text{sur } \{\omega \in \hat{\Omega} \mid S^j \leq \sigma < S^{j-1}\} & \text{pour } 2 \leq j \leq I \\
\Phi = id & \text{sur } \{\omega \in \hat{\Omega} \mid \sigma < S^I\} &
\end{array}$$

Pour cette discipline les composantes de $\vec{S}$ sont toujours ordonnées par ordre décroissant.

. *Discipline SPT* (Shortest Processing Time), variante sans préemption de SRPT :

$$\begin{array}{lll}
\Phi = (1, 2, \ldots, I + 1) & \text{sur } \{\omega \in \hat{\Omega} \mid S^1 \leq \sigma\} & \\
\Phi = (j, j + 1, \ldots, I + 1) & \text{sur } \{\omega \in \hat{\Omega} \mid S^j \leq \sigma < S^{j-1}\} & \text{pour } 2 \leq j \leq I \\
\Phi = (I, I + 1) & \text{sur } \{\omega \in \hat{\Omega} \mid \sigma < S^I\} &
\end{array}$$

Pour cette discipline les composantes de $\vec{S}$ sont encore ordonnées par ordre décroissant à l'exception de la dernière composante non nulle.

Dans tous les exemples qui précèdent Φ est un cycle de la forme

$$(j, j + 1, \ldots, I + 1)$$

où j ne dépend que de $\vec{S}$ et de σ. Le fait que Φ soit un cycle signifie que l'arrivée d'un nouveau client ne remet pas en cause l'ordre de service établi entre les précédents et que l'on se contente de classer le nouveau parmi eux. On peut cependant imaginer des disciplines plus générales, comme par exemple une variante de SRPT qui ferait servir immédiatement tout client ayant vu k autres clients passer devant lui (k fixé). On atténuerait ainsi l'attente des clients réclamant un long service. Le Φ correspondant n'est plus toujours un cycle et dépend de plusieurs termes de la suite $(\vec{S} \circ \hat{\theta}^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$. On est amené à poser la définition suivante.

DÉFINITION 3. — On appellera discipline *admissible* toute application Φ de $\hat{\Omega}$ dans l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, I + 1\}$ (I = indice de la dernière composante non nulle de $\vec{S}$), qui ne dépend que des $v + 1$ premiers termes de la suite

$$\{(\sigma, \vec{S}), (\sigma \circ \hat{\theta}^{-1}, \vec{S} \circ \hat{\theta}^{-1}, \tau \circ \hat{\theta}^{-1}), \ldots, (\sigma \circ \hat{\theta}^{-n}, \vec{S} \circ \hat{\theta}^{-n}, \tau \circ \hat{\theta}^{-n}), \ldots\}_{n \in \mathbb{N}}. \tag{3}$$

Intuitivement une discipline admissible est une discipline qui ne dépend que du présent et de tout le passé jusqu'au dernier passage de Γ (ou de $\vec{S}$) par 0. La variante de SPRT envisagée ci-dessus est admissible. On notera

$\mathscr{C}$ l'ensemble des disciplines admissibles.

$\mathscr{C}'$ l'ensemble des disciplines admissibles sans préemption c'est-à-dire l'ensemble des permutations de $\mathscr{C}$ laissant l'indice $I + 1$ invariant.

$\mathscr{C}_0$ l'ensemble des disciplines de $\mathscr{C}$ ne dépendant de la suite (3) que par I (c'est le cas des disciplines FIFO, LIFO, $\Phi = id$, etc.).

$\mathscr{C}_1$ l'ensemble des disciplines de $\mathscr{C}$ ne dépendant que du premier terme $(\sigma, \vec{S})$ de la suite (3).

On peut combiner ces définitions et parler de $\mathscr{C}'_0 = \mathscr{C}' \cap \mathscr{C}_0$, et de $\mathscr{C}'_1 = \mathscr{C}' \cap \mathscr{C}_1$.

Remarque. — Toutes les disciplines de la classe $\mathscr{C}$ interdisent au serveur de se reposer tant qu'un client au moins reste demandeur de service.

L'existence du vecteur d'état stationnaire $\vec{S}_\Phi$ défini sur $\hat{\Omega}$ pour $\Phi \in \mathscr{C}$ découle immédiatement de l'ergodicité de $\hat{\theta}$ et du fait que $P\{\Gamma = 0\} > 0$.

On pose $\vec{S}_\Phi = 0$ sur $\{\Gamma = 0\}$. Les formules (4) et (5) suivantes suffisent alors à définir $\vec{S}_\Phi$ $\hat{P}$ p. s. : comme $\sum_{k=1}^{\infty} S^k = \Gamma$, on a encore $\vec{S}_\Phi \circ \theta^{v'} = 0$ avec $v' = \inf\{n > 0 \mid \Gamma \circ \hat{\theta}^n \equiv 0\}$.

$$\vec{S}_\Phi^+(\omega) = \Phi(\omega)(\vec{S}_\Phi(\omega) + \sigma(\omega)\vec{e}_{I(\omega)+1}) \tag{4}$$

où I(.) est l'indice de la dernière composante non nulle de $\vec{S}(.)$. Les composantes de $\vec{S} \circ \hat{\theta}(.)$ sont alors données par

$$(5) \qquad \forall j \in \mathbb{N}^* \qquad S_\Phi^j \circ \hat{\theta} = \left(\sum_{k=j}^{\infty} (S_\Phi^+)^k - \tau \right)^+ - \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} (S_\Phi^+)^k - \tau \right)^+$$

La suite $\{ S \circ \hat{\theta}^{-v+n} \}_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi définie $\hat{P}$ p. s. sur $\hat{\Omega}$ et en se plaçant sur chaque sous ensemble $\{ v = n \}$ de $\hat{\Omega}$ on obtient l'existence d'un vecteur d'état stationnaire $\vec{S}$, fini et vérifiant (4) et (5) $\hat{P}$ p. s. sur $\hat{\Omega}$.

A partir de $\vec{S}_\Phi$ on définit P p. s. une fonction aléatoire $\vec{S}_\Phi(\omega, t)$ sur Ω, stationnaire par le flot $\{ \theta_s \}_{s \in \mathbb{R}}$ (c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2 \qquad \vec{S}_\Phi(\theta_s \omega, t) = \vec{S}_\Phi(\omega, t + s))$$

en posant

$$(6) \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \qquad S_\Phi^j(\omega, t)$$
$$= \left[\sum_{k=j}^{\infty} (S_\Phi^+)^k \circ \hat{\theta}^n - (t - T_n) \right]^+ - \left[\sum_{k=j+1}^{\infty} (S_\Phi^+)^k \circ \hat{\theta}^n - (t - T_n) \right]^+$$

sur $\{ \omega \in \Omega \mid T_n \leq t < T_{n+1} \}$.

Remarque. — Les affirmations faites précédemment sur la décroissance des composantes de $\vec{S}$ pour les disciplines SRPT et SPT découlent immédiatement des formules (4) et (5).

Prouvons maintenant l'unicité des solutions des équations (4) et (5). Pour toute solution $\vec{S}$ de (4) et (5) la somme $\sum_{j=1}^{\infty} S^j$ vérifie l'équation (1) et d'après l'unicité des solutions de (1) on a $\sum_{j=1}^{\infty} S^j = \Gamma$. Ainsi sur l'ensemble $\{ \Gamma = 0 \}$ de mesure strictement positive deux solutions quelconques de (4) et (5) coïncident. L'ensemble $\{ \vec{S} = \vec{S}' \}$ étant $\hat{\theta}$ invariant et $\hat{\theta}$ étant ergodique on a $\vec{S} = \vec{S}'$ $\hat{P}$ p. s.

Étudions maintenant les phénomènes transitoires. Partant d'un état non stationnaire défini sur $\hat{\Omega}$ par $\vec{S}_0 \in \mathscr{E}$ donné on construit la suite $\vec{S}_n$ définie par (7) et (8) :

$$(7) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \vec{S}_n^+ = \Phi(\vec{S}_n + \sigma \circ \hat{\theta}^n e_{I_n + 1})$$

où I_n est la dernière composante non nulle de $\vec{S}_n$.

$$(8)\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1}^j = \left(\sum_{k=j}^{\infty} (S_n^+)^k - \tau \circ \hat{\theta}^n \right)^+ - \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} (S_n^+)^k - \tau \circ \hat{\theta}^n \right)^+$$

Pour étudier la convergence de la suite $\vec{S}_n \circ \hat{\theta}^{-n}$ vers $\vec{S}$ stationnaire solution de (4) et (5) posons $G_n = \sum_{j=1}^{\infty} S_n^j$ et prouvons l'existence d'une v. a. entière v_1 $\hat{P}$ p. s. finie telle que $G_{v_1(\omega)}(\omega) = 0$. $\{ G_n \}$ qui est indépendante de Φ vérifie

$$G_0 = \sum_{j=1}^{\infty} S_0^j \qquad \text{et} \qquad G_{n+1} = (G_n + \xi \circ \hat{\theta}^n)^+ \qquad \text{où } \xi = \sigma - \tau$$

soit encore

$$G_n = \operatorname{Max}\left\{ \Gamma_{n-1} \circ \hat{\theta}^n\ ;\ G_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \xi \circ \hat{\theta}^k \right\}.$$

Lorsque $n \to \infty$ $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi \circ \hat{\theta}^k \xrightarrow{\hat{P}\text{ p.s.}} \hat{E}(\xi) < 0$ et $G_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \xi \circ \hat{\theta}^k$ devient négatif à partir d'un indice $v_0(\omega)$ $\hat{P}$ p. s. fini

$$\forall n \geq v_0 \qquad G_n = \Gamma_{n-1} \circ \hat{\theta}^n .$$

Posons $v_1 = \inf \{ p \geq v_0 \mid \Gamma \circ \hat{\theta}^p = 0 \}$ ($v_1 < \infty$ $\hat{P}$ p. s.), comme la suite Γ_n croît vers Γ on a $G_{v_1} = \Gamma \circ \theta^{v_1} = 0$ $\hat{P}$ p. s. et on vérifie par récurrence que

$$\forall n \geq v_1 \qquad \vec{S}_n \circ \hat{\theta}^{-n} = \vec{S}\ \hat{P} \text{ p. s.}$$

ce qui établit la convergence p. s. de la suite $S_n \circ \hat{\theta}^{-n}$ vers $\vec{S}$. On a ainsi démontré la

PROPOSITION 4. — On suppose $\hat{\theta}$ ergodique et $\hat{E}(\sigma) < 1$. Pour toute discipline $\Phi \in \mathscr{C}$ il existe une unique v. a. $\vec{S}_\Phi \in \mathscr{E}$ définie sur $\hat{\Omega}$ et vérifiant (4) et (5) et un unique processus $\vec{S}_\Phi(\omega, t)$ définie sur Ω et stationnaire par le flot $\{ \theta_t \}$ vérifiant (4) et (6).

De plus il existe une v. a. v_1 $\hat{P}$ p. s. finie telle que la suite $\vec{S}_n$ construite par (7) et (8) à partir d'un vecteur $\vec{S}_0$ quelconque de $\mathscr{E}$ vérifie $\vec{S}_n \circ \hat{\theta}^{-n} = \vec{S}$ $\hat{P}$ p. s. pour tout $n \geq v_1$.

La donnée de $\vec{S}$ sur $\hat{\Omega}$, et de $\vec{S}(\omega, t)$ sur Ω fournit toutes les caractéristiques de la file G/G/1 en régime stationnaire :

— Le nombre de clients présents (en attente ou en service) juste avant l'arrivée d'un client est le nombre I de composantes strictement positives de $\vec{S}$.

— Le nombre de clients en attente au même instant est $L = (I - 1)^+$.

— Le temps d'attente W du client arrivant à $T_0 = 0$ se déduit immédiatement de $\vec{S}$ dans le cas où la discipline est FIFO : $W_{FIFO} = \sum_{k=1}^{\infty} S^k = \Gamma$.

Dans le cas général W n'est pas connu à l'instant $T_0 = 0$ puisqu'il peut dépendre des services demandés par certains clients arrivés après T_0. Pour $p \in \mathbb{N}$ on note $N_p(\omega)$ l'indice de la composante de $\vec{S}^+ \circ \hat{\theta}^p$ correspondant au reste de service du client arrivé à $T_0 = 0$. Plus précisément la suite N_p est définie par récurrence :

$$N_0(\omega) = \Phi(I + 1)$$

$$N_{p+1}(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \sum_{k=N_p}^{\infty} (S^+)^k \circ \hat{\theta}^p \leq \tau \circ \hat{\theta}^p \\ \Phi \circ \hat{\theta}^{p+1}(N_p) & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $\mu(\omega) = \sup \{ p \in \mathbb{N} \mid N_p < \infty \}$

μ est $\hat{P}$ p. s. finie car $\mu \leq \nu'$ où $\nu' = \inf \{ n \geq 1 \mid \Gamma \circ \hat{\theta}^n = 0 \}$ qui est elle même finie $\hat{P}$ p. s. ($\hat{\theta}$ est ergodique et $\hat{P}(\Gamma = 0) > 0$). On a alors

$$W = T_\mu + \sum_{k=N_\mu}^{\infty} (S^+)^k \circ \theta^\mu - \sigma . \tag{9}$$

Remarquons que $W \leq T_{\mu+1} < \infty$ $\hat{P}$ p. s. pour toute discipline Φ de $\mathscr{C}$.

— Le processus des sorties se déduit également de $\vec{S}$:

l'instant de sortie du client arrivé à $T_0 = 0$ est $T_0'' = W + \sigma$. Le processus des sorties sera noté $N' = \sum_{i \in Z} \varepsilon_{T_i'}$ avec $T_0' \leq 0 < T_1'$. On remarquera que T_n' ne coïncide pas en général avec l'instant de sortie T_n'', du client arrivé à T_n ceci même si la discipline est FIFO.

Rappelons les formules liant P et $\hat{P}$ dans le cas d'un processus ponctuel stationnaire simple $N = \sum_{i \in Z} \varepsilon_{T_i}$.

Proposition 5. — *a*) Pour toute fonction mesurable positive $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a

$$\int_\Omega dP(\omega) \int_{\mathbb{R}} N(\omega, ds) f(\theta_s\omega, s) = \int_{\hat\Omega} d\hat{P}(\omega) \int_{\mathbb{R}} f(\omega, s) ds . \tag{10}$$

b) Pour toute fonction mesurable positive $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$

$$\int_\Omega dP(\omega) g(\omega) = \int_{\hat\Omega} d\hat{P}(\omega) \int_0^{T_1(\omega)} g(\theta_s\omega) ds . \tag{11}$$

Démonstration. — Voir Neveu [7] Théorèmes II.4 et II.13.

Une application immédiate de (10) donne les formules de Little :

Proposition 6. — Si $I(t)$ et $L(t)$ désignent respectivement le nombre de clients présents (en attente ou en service) et la longueur de la file d'attente (nombre de clients en attente) à l'instant t, on a pour toute discipline Φ de $\mathscr{C}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad E[I(t)] = \hat{E}(W + \sigma) \tag{12}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad E[L(t)] = \hat{E}(W) \qquad \text{(égalités dans } \bar{\mathbb{R}}) \tag{13}$$

Démonstration. — $$I(t) = \sum_{n \in Z} 1_{\{T_n \le t < T_n''\}}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} N(\omega, ds) 1_{\{s \le t < s + (W+\sigma)\ \theta_s(\omega)\}}$$

d'où $$E[I(t)] = \int_\Omega d\hat{P} \int_{\mathbb{R}} 1_{\{s \le t < s + (W+\sigma)\}} ds \qquad \text{d'après (10)}$$
$$= \hat{E}(W + \sigma)$$

La seconde formule se démontre de la même façon.

Outre les espaces Ω et $\hat\Omega$, il est intéressant d'introduire

$$\hat{\hat\Omega} = \{ \omega \in \hat\Omega \mid \Gamma(\omega) = 0 \} \tag{14}$$

et $\hat{\hat{P}}$ la mesure de Palm du processus des arrivées de clients trouvant le serveur inoccupé. Si on applique la formule (11) au passage de $\hat{P}$ à $\hat{\hat{P}}$ on obtient pour toute fonction mesurable positive $h : \hat\Omega \to \mathbb{R}_+$.

$$\int_{\hat\Omega} d\hat{P}(\omega) h(\omega) = \int_{\hat{\hat\Omega}} d\hat{\hat{P}}(\omega) \Big(\sum_{0 \le n < \lambda} h \circ \hat\theta^n \Big) \tag{15}$$

où $\lambda(\omega)$ est le nombre de clients arrivant pendant une période d'occupation ininterrompue du serveur.

En particulier si $h = \mathrm{W}$ on a

$$\mathrm{E}[\mathrm{L}(t)] = \hat{\mathrm{E}}(\mathrm{W}) = \hat{\hat{\mathrm{E}}}\left[\sum_{0 \leq n < \lambda} \mathrm{W} \circ \hat{\theta}^n\right]. \tag{16}$$

2. OPTIMALITÉ DE LA DISCIPLINE SRPT DANS LA CLASSE $\mathscr{C}$

L'ordre partiel sur $\mathscr{E}$ défini ci-dessous est une variante de l'ordre introduit par D. Smith [*9*].

Définition et Proposition 7. — Soit $\prec$ la relation d'ordre définie sur $\mathscr{E}$ par

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{E}^2 \qquad \mathrm{A} \prec \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \sum_{i=k}^{\infty} \mathrm{A}^i \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mathrm{B}^i$$

La discipline $\Psi = \mathrm{SRPT}$ est optimale dans $\mathscr{C}$ au sens suivant :

$$\forall \Phi \in \mathscr{C} \qquad \vec{\mathrm{S}}_\Psi \prec \vec{\mathrm{S}}_\Phi \;\; \hat{\mathrm{P}} \text{ p. s.} \tag{17}$$

On remarquera que (17) implique

$$\mathrm{I}_\Psi \leq \mathrm{I}_\Phi \;\; \hat{\mathrm{P}} \text{ p. s.} \tag{18}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \vec{\mathrm{S}}_\Psi(t) \prec \vec{\mathrm{S}}_\Phi(t) \;\; \mathrm{P} \text{ p. s.} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_\Psi(t) \leq \mathrm{I}_\Phi(t) \;\; \mathrm{P} \text{ p. s.} \tag{19}$$

$$\hat{\mathrm{E}}(\mathrm{W}_\Psi) \leq \hat{\mathrm{E}}(\mathrm{W}_\Phi). \tag{20}$$

Parmi toutes les disciplines de $\mathscr{C}$, SRPT minimise donc à la fois le nombre de clients présents avant une arrivée, le nombre de clients présents à un instant t quelconque et l'espérance du temps d'attente.

Démonstration. — Soit $\vec{\mathscr{S}}$ le vecteur réordonné de $\vec{\mathrm{S}}$ par ordre décroissant des composantes ($\mathscr{S}^1$ est la plus grande).

Pour prouver que $\vec{\mathrm{S}}_\Psi \prec \vec{\mathrm{S}}_\Phi$ $\hat{\mathrm{P}}$ p. s. il suffit de montrer que $\vec{\mathscr{S}}_\Psi \prec \vec{\mathscr{S}}_\Phi$ $\hat{\mathrm{P}}$ p. s. en effet $\vec{\mathscr{S}}_\Psi = \vec{\mathrm{S}}_\Psi$ et $\forall \Phi \in \mathscr{C}$ $\vec{\mathscr{S}}_\Phi \prec \vec{\mathrm{S}}_\Phi$.

Montrons que $\mathscr{S}_\Psi \prec \mathscr{S}_\Phi$ $\hat{\mathrm{P}}$ p. s. Cet événement contenant $\{ \Gamma = 0 \}$ de mesure strictement positive, il suffit de prouver son invariance par $\hat{\theta}$. Or d'après (5),

$$\sum_{k=j}^{\infty} S_{\Phi}^{k} \circ \hat{\theta} = \left(\sum_{k=j}^{\infty} (S_{\Phi}^{+})^{k} - \tau \right)^{+} \qquad \text{d'où}$$

$$(21) \quad \begin{cases} \forall j > 1 \quad \displaystyle\sum_{k=j}^{\infty} \mathcal{S}_{\Psi}^{i} \circ \hat{\theta} = \left(\sum_{k=j}^{\infty} \mathcal{S}_{\Psi}^{k} + \sigma - \tau \right)^{+} \wedge \left(\sum_{k=j-1} \mathcal{S}_{\Psi}^{k} - \tau \right)^{+} \\ \forall \Phi \in \mathscr{C} \; \forall j > 1 \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_{\Phi}^{i} \circ \hat{\theta} \geq \left(\sum_{k=j}^{\infty} \mathcal{S}_{\Phi}^{k} + \sigma - \tau \right)^{+} \wedge \left(\sum_{k=j-1}^{\infty} \mathcal{S}_{\Phi}^{k} - \tau \right) \end{cases}$$

et pour $j = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_{\Phi}^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_{\Phi}^{k} = \Gamma.$

Ceci prouve que $\{ \mathcal{S}_{\Psi} \circ \hat{\theta} \prec \mathcal{S}_{\Phi} \circ \theta \} \supset \{ \mathcal{S}_{\Psi} \prec \mathcal{S}_{\Phi} \}$ et termine la démonstration de (17).

Les égalités (18) et (19) se déduisent immédiatement de (17), et (20) découle de (19) et (12).

3. RECHERCHE D'UNE DISCIPLINE OPTIMALE DANS LA CLASSE $\mathscr{C}'$ DES DISCIPLINES SANS PRÉEMPTION

On considère maintenant la classe $\mathscr{C}'$ des disciplines sans préemption (un service commencé ne peut être interrompu avant sa fin).

On se place sur $(\hat{\hat{\Omega}}, \hat{\hat{P}})$ cf. (14). Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\lambda$ et $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\lambda$ les services demandés et les délais interarrivées : σ_1 arrive à $t = 0$, σ_2 à $T_1 = \tau_1, \ldots, \sigma_n$ à $T_{n-1} = \tau_1 + \tau_2 \ldots + \tau_{n-1}$. On a $\forall n \; 1 \leq n < \lambda$

$$\sigma_1 + \ldots + \sigma_n > \tau_1 + \ldots + \tau_n \quad \text{et} \quad \sigma_1 + \ldots + \sigma_\lambda \leq \tau_1 + \ldots + \tau_\lambda$$

par définition de la période d'occupation.

On définit une permutation ρ de $\{ 1, 2, \ldots, \lambda \}$ en appelant $\rho(n)$ l'indice d'arrivée du client servi en $n^{\text{ième}}$ position : pour tout n compris entre 1 et λ le client d'indice $\rho(n)$ arrive à l'instant $\displaystyle\sum_{j<\rho(n)} \tau_j$, voit son service commencer à l'instant $\displaystyle\sum_{k<n} \sigma_{\rho(k)}$, et subit donc une attente

$$(22) \qquad W_{\rho(n)} = \sum_{k<n} \sigma_{\rho(k)} - \sum_{j<\rho(n)} \tau_j .$$

On notera que les seules permutations ρ correspondant à des disciplines Φ admissibles sont celles qui vérifient $W_{\rho(n)} \geq 0 \ \forall n \in \{1, 2, \ldots, \lambda\}$ (en particulier on a toujours $\rho(1) = 1$) mais que réciproquement à une permutation ρ satisfaisant à ces contraintes ne correspond pas nécessairement à une discipline admissible.

On calcule ensuite $\sum_{0 \leq n < \lambda} W \circ \hat{\theta}^n$

$$\sum_{0 \leq n < \lambda} W \circ \hat{\theta}^n = \sum_{n=1}^{\lambda} W_{\rho(n)}$$

et en utilisant (22) :

$$\sum_{0 \leq n < \lambda} W \circ \hat{\theta}^n = \sum_{k=1}^{\lambda} (\lambda - k)\sigma_{\rho(k)} - \sum_{k=1}^{\lambda} (\lambda - k)\tau_k . \tag{23}$$

Le seul terme qui dépende de la discipline Φ dans (23) est $\sum_{k=1}^{\lambda} (\lambda - k)\sigma_{\rho(k)}$. On pourrait croire qu'il suffit pour minimiser cette somme (et donc aussi $\hat{E}(W_\Phi)$ et $E(L_\Phi(t)$ d'après (16)) de servir en priorité les clients réclamant les services les plus courts c'est-à-dire d'appliquer la discipline SPT. Il n'en est rien comme le montrent les deux exemples suivants :

Exemple 1. — On prend pour $\hat{\Omega}$ un espace à 4 points $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. $\hat{\theta}$ est l'application qui à ω_i associe ω_{i+1} modulo 4. τ est la v. a. constante et égale à 1 sur $\hat{\Omega}$, et $\hat{P}$ est alors la probabilité uniforme sur $\hat{\Omega}$ ($\hat{P}$ est invariante par $\hat{\theta}$ et $\hat{E}(\tau) = 1$). On définit ensuite σ sur $\hat{\Omega}$:

$$\sigma(\omega_1) = 2{,}2 \quad \sigma(\omega_2) = 0{,}7 \quad \sigma(\omega_3) = 0{,}9 \quad \sigma(\omega_4) = 0{,}1 ,$$

d'où $\hat{E}(\sigma) = \dfrac{39}{40} < 1$.

Dans ce cas $\hat{\hat{\Omega}} = \{\omega_1\}$ et $\hat{\hat{P}}(\hat{\hat{\Omega}}) = 1/4$. Il n'y a que 3 disciplines sans préemption satisfaisant aux contraintes $\forall n \ W_{\rho(n)} \geq 0$:

SPT = FIFO : $\rho = (1, 2, 3, 4)$
LIFO : $\rho = (1, 3, 4, 2)$
et la discipline : $\rho = (1, 3, 2, 4)$.

Elles sont toutes les trois admissibles. Les 3 v. a. W_Φ sont données par le tableau suivant :

	SPT = FIFO $\rho = (1, 2, 3, 4)$	LIFO $\rho = (1, 3, 4, 2)$	$\rho = (1, 3, 2, 4)$
$W(\omega_1)$	0	0	0
$W(\omega_2)$	1,2	2,2	2,1
$W(\omega_3)$	0,9	0,2	0,2
$W(\omega_4)$	0,8	0,1	0,8
$\hat{E}(W)$	$\frac{29}{40}$	$\frac{25}{40}$	$\frac{31}{40}$

La discipline LIFO est donc préférable à SPT.

Remarques. — 1) Les valeurs choisies pour les variables σ et τ ne sont pas critiques : Sur un espace $\hat{\Omega}$ à 4 points LIFO est préférable à SPT chaque fois que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\{ \tau_1 + \tau_2 < \sigma_1 ; \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 < \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 ;$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 < \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 < \sigma_1 + \sigma_3 ; \sigma_3 + \sigma_4 < 2\sigma_2 \} .$$

En effet la somme $\sum_{k=1}^{\lambda} (\lambda - k)\sigma_{\rho(k)}$ vaut

$$\begin{aligned} &3\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 \quad \text{si} \quad \rho = (1, 2, 3, 4) \\ &3\sigma_1 + 2\sigma_3 + \sigma_4 \quad \text{si} \quad \rho = (1, 3, 4, 2) \\ &3\sigma_1 + 2\sigma_3 + \sigma_2 \quad \text{si} \quad \rho = (1, 3, 2, 4) \end{aligned}$$

2) La discipline consistant à servir dans l'ordre σ_1, σ_2 puis attendre 0, 1 sans rien faire, puis servir 4 et enfin 3 (discipline exclue puisqu'elle laisse le serveur se reposer pendant que le client 3 attend) conduit à $\hat{E}(W) = \frac{23}{40}$ ce qui est meilleur que LIFO. Ainsi on peut diminuer l'attente moyenne des clients en laissant le serveur prendre les vacances auxquelles il aura finalement droit (0, 1 ici), avant d'avoir servi tous les clients en attente. Mais pour prendre ses vacances au meilleur moment le serveur doit connaître d'avance tout ce qui se passera dans la période d'occupation en cours.

Exemple 2. — Même dans le cas indépendant GI/GI/1, SPT n'est pas nécessairement optimale au sens du critère $\underset{\Phi \in \mathscr{C}'}{\text{Min}}\ \hat{E}(W_\Phi)$.

Le délai inter-arrivées est la v. a. constante égale à 1.

La loi des services est uniforme sur les quatre valeurs

$$s_1 = 2{,}5 \quad s_2 = 0{,}5 - 3\varepsilon \quad s_3 = 0{,}5 + \varepsilon \quad s_4 = \varepsilon$$

où ε est un réel compris strictement entre 0 et $\frac{1}{40}$.

$\hat{\mathrm{E}}(\sigma)$ vaut dans ce cas $\hat{\mathrm{E}}(\sigma) = 0{,}875 - \frac{\varepsilon}{4} < 1$.

A la discipline SPT on oppose Φ qui coïncide avec SPT sauf dans le cas suivant : chaque fois que le serveur initie une période d'activité en assurant un service s_1 et que les deux clients arrivant pendant ce temps demandent des services s_2 et s_3 (dans un ordre ou l'autre), le serveur effectue en deuxième lieu le service s_3 (alors que s'il suivait la discipline SPT il devrait choisir s_2). Ensuite comme $s_1 + s_3 = 3 + \varepsilon$ le serveur a à choisir entre s_2 et le service σ demandé par le quatrième client. Trois cas sont à envisager :

— si $\sigma = s_4$ le serveur effectue s_4 puis s_2 et la période d'activité est terminée car $s_1 + s_3 + s_4 + s_2 = 3{,}5 - \varepsilon < 4$.

— si $\sigma = s_3$ (ou s_2) le serveur effectue s_2 puis s_3 (ou s_2) et sa période d'activité est terminée car

$$s_1 + s_3 + s_2 + s_3 = 4 - \varepsilon < 4 \quad \text{et} \quad s_1 + s_3 + s_2 + s_2 = 4 - 5\varepsilon < 4 .$$

— si $\sigma = s_1$ le serveur effectue s_2 puis s_1 et il se retrouve ensuite dans la même situation que s'il avait suivi la discipline SPT (qui a effectué dans l'ordre s_1, s_2, s_3, s_1) et il adopte ensuite la discipline SPT jusqu'à la fin de sa période d'activité.

Posons $\mathrm{D} = \sum_{0 \leq n < \lambda} \mathrm{W}_\Phi \circ \hat{\theta}^n - \sum_{0 \leq n < \lambda} \mathrm{W}_{\mathrm{SPT}} \circ \hat{\theta}^n$

D est nulle sauf si les trois premiers services demandés sont dans l'ordre (s_1, s_2, s_3) ou (s_1, s_3, s_2) et dans ce cas elle vaut d'après (22)

$$\mathrm{D} = \begin{cases} (\lambda - 2)(s_3 - s_2) + (\lambda - 3)(s_4 - s_3) + (\lambda - 4)(s_2 - s_4) & \text{si} \quad \sigma = s_4 \\ (\lambda - 2)(s_3 - s_2) + (\lambda - 3)(s_2 - s_3) & \text{sinon}. \end{cases}$$

Soit encore

$$\mathrm{D} = \begin{cases} s_3 + s_4 - 2s_2 = 8\varepsilon - 0{,}5 & \text{si} \quad \sigma = s_4 \\ s_3 - s_2 = 4\varepsilon & \text{sinon}. \end{cases}$$

D'où
$$\hat{\mathrm{E}}(\mathrm{W}_\Phi - \mathrm{W}_{\mathrm{SPT}}) = \hat{\hat{\mathrm{E}}}(\mathrm{D}) = \hat{\hat{\mathrm{P}}}(\hat{\hat{\Omega}})\left[\frac{2}{4^4}(8\varepsilon - 0{,}5) + \frac{6}{4^4}\cdot 4\varepsilon\right]$$
$$= \hat{\hat{\mathrm{P}}}(\hat{\hat{\Omega}}) \cdot \frac{40\varepsilon - 1}{128}$$

Donc $\hat{\mathrm{E}}(\mathrm{W}_\Phi) < \hat{\mathrm{E}}(\mathrm{W}_{\mathrm{SPT}})$ dès que $0 < \varepsilon < \frac{1}{40}$.

Remarquons enfin que cet exemple peut être modifié pour que les lois du service et du délai inter-arrivées possèdent des densités. La valeur de $\hat{E}(D)$ n'est pas modifiée si on donne à τ une densité symétrique autour de 1 portée par l'intervalle $\left[1-\frac{\varepsilon}{8}, 1+\frac{\varepsilon}{8}\right]$ et à σ une densité chargeant chaque intervalle $\left[s_i-\frac{\varepsilon}{8}, s_i+\frac{\varepsilon}{8}\right]$ $(i=1,2,3,4)$ d'une probabilité $\frac{1}{4}$, la restriction de cette densité à chaque intervalle étant symétrique autour de s_i.

Remarque sur l'intégrabilité de W : Kiefer et Wolfowitz ont montré dans [*5*] théorème 2 que pour toute file GI/GI/1, W_{FIFO} est $\hat{P}$-intégrable [resp. de carré intégrable] dès que $\hat{E}(\xi^2) < \infty$ [resp. $\hat{E}(\xi^+)^3 < \infty$]. Kingman donne dans [*6*] une majoration de l'espérance de W_{FIFO} en fonction de $\hat{E}(\xi^2)$. Sznitman a montré dans [*10*] que les résultats de Kiefer et Wolfowitz ne s'étendent pas au cas G/G/1.

Donnons maintenant deux résultats positifs sur l'optimalité de la discipline SPT dans le cas G/G/1.

PROPOSITION 8. — Dans le cas G/G/1, la discipline SPT est préférable à FIFO au sens de la relation d'ordre $\prec$ introduite dans la proposition 7 :

$$\vec{S}_{SPT} \prec \vec{S}_{FIFO} \ \hat{P} \text{ p. s.}$$

Démonstration. — Posons $\Psi = \text{SPT}$ et $\Phi = \text{FIFO}$. Compte tenu de l'ergodicité de $\hat{\theta}$ et du fait que l'événement $\vec{S}_\Psi \prec \vec{S}_\Phi$ est réalisé sur $\{\Gamma = 0\}$ de mesure strictement positive il suffit de montrer que

$$\vec{S}_\Psi \prec \vec{S}_\Phi \Rightarrow \vec{S}_\Psi \circ \hat{\theta} \prec \vec{S}_\Phi \circ \hat{\theta} \ \hat{P} \text{ p. s.}$$

Or pour $\Psi = \text{SPT}$:

$$(24) \quad \sum_{k=j}^{\infty} S_\Psi^k \circ \hat{\theta} = \begin{cases} \left(\sum_{k=j}^{\infty} S_\Psi^k + \sigma - \tau\right)^+ \wedge \left(\sum_{k=j-1}^{\infty} S_\Psi^k - \tau\right)^+ & \text{si } j \neq I_\Psi + 1 \\ \left(\sum_{k=j-1}^{\infty} S_\Psi^k - \tau\right)^+ & \text{si } j = I_\Psi + 1 \end{cases}$$

et pour $\Phi = \text{FIFO}$

$$(25) \quad \sum_{k=j}^{\infty} S_\Phi^k \circ \hat{\theta} = \begin{cases} \left(\sum_{k=j}^{\infty} S_\Phi^k + \sigma - \tau\right)^+ & \text{si } j = 1 \\ \left(\sum_{k=j-1}^{\infty} S_\Phi^k - \tau\right)^+ & \text{si } j \geq 2\,. \end{cases}$$

Remarquons que sur $\{ \Gamma = 0 \}$ Φ et Ψ coïncident et supposons donc $I_\Psi \geq 1$. La comparaison des formules (24) et (25) dans les 2 cas ($j = I_\Psi + 1 \geq 2$) et ($j \neq I_\Psi + 1$) montrent immédiatement que

$$\sum_{k=j}^{\infty} S_\Psi^k \leq \sum_{k=j}^{\infty} S_\Phi^k \Rightarrow \forall_j \sum_{k=j}^{\prime} S_\Psi^k \circ \hat{\theta} \leq \sum_{k=j}^{\infty} S_\Phi^k \circ \hat{\theta}.$$

Étudions maintenant la loi du nombre de clients présents juste avant l'arrivée d'un client pour les disciplines de la classe $\mathscr{C}'$. Rappelons que $\forall \Phi \in \mathscr{C}$ $\hat{P}(I_\Phi \geq 1) = \hat{P}(\Gamma > 0)$ est indépendante de Φ. De plus la discipline SPT minimise la probabilité d'avoir plus de deux clients en présence :

PROPOSITION 9. — Dans le cas G/G/1 on a

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}' \qquad \hat{P}(I_\Phi \geq 2) \geq \hat{P}(I_{SPT} \geq 2)$$

Démonstration. — Appelons $\vec{\mathscr{S}}_\Phi$ le vecteur obtenu en réordonnant par ordre décroissant les $I_\Phi - 1$ premières composantes de $\vec{S}_\Phi$ et en laissant dans la ligne I_Φ la dernière composante non nulle de $\vec{S}_\Phi$ et remarquons que pour $\Psi = \text{SPT}$ $\vec{\mathscr{S}}_\Psi = \vec{S}_\Psi$.

Posons ensuite $\forall \Phi \in \mathscr{C}'$ $\Sigma_\Phi = \sum_{k=2}^{\infty} \mathscr{S}_\Phi^k$.

Juste après l'arrivée d'un client on a

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}' \qquad \Sigma_\Phi^+ = \sum_{k=2}^{\infty} (\mathscr{S}_\Phi^+)^k = \begin{cases} (\Sigma_\Phi + \sigma) \wedge \Gamma & \text{si } \Sigma_\Phi > 0 \\ \Gamma & \text{si } \Sigma_\Phi = 0 \end{cases}$$

et juste avant l'arrivée suivante

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}' \qquad \Sigma_\Phi \circ \hat{\theta} = \sum_{k=2}^{\infty} \mathscr{S}_\Phi^k \circ \hat{\theta} \begin{cases} \geq (\Sigma_\Phi + \sigma - \tau)^+ \wedge (\Gamma - \tau)^+ & \text{si } \Sigma_\Phi > 0 \\ = (\Gamma - \tau)^+ & \text{si } \Sigma_\Phi = 0 \end{cases}$$

et dans le cas de la discipline $\Psi = \text{SPT}$ l'inégalité devient une égalité.

On en déduit que

a) $\Sigma_\Phi - \Sigma_\Psi \geq 0 \Rightarrow (\Sigma_\Phi - \Sigma_\Psi) \circ \hat{\theta} \geq 0$ sauf peut être sur $\{ \Sigma_\Phi > 0 \text{ et } \Sigma_\Psi = 0 \}$
b) $(\Sigma_\Phi - \Sigma_\Psi) \circ \hat{\theta} \geq 0$ sur $\{ \Sigma_\Phi = 0 \cap \Sigma_\Psi > 0 \}$

d'où l'inclusion :

$$\{ (\Sigma_\Phi - \Sigma_\Psi) \circ \hat{\theta} < 0 \}$$
$$\subset \{ (\Sigma_\Phi - \Sigma_\Psi < 0) \cup (\Sigma_\Phi > 0 \; \Sigma_\Psi = 0) \} \cap \{ \Sigma_\Phi = 0 \cap \Sigma_\Psi > 0 \}^c$$

soit en utilisant l'invariance de $\hat{P}$ par $\hat{\theta}$

$$\hat{P}(\Sigma_\Phi - \Sigma_\Psi < 0) \leq \hat{P}(\Sigma_\Phi - \Sigma_\Psi < 0) + \hat{P}(\Sigma_\Phi > 0 \cap \Sigma_\Psi = 0) - P(\Sigma_\Phi = 0 \cap \Sigma_\Psi > 0)$$

soit

$$\hat{P}(\Sigma_\Phi = 0 \cap \Sigma_\Psi > 0) \leq \hat{P}(\Sigma_\Phi > 0 \cap \Sigma_\Psi = 0)$$

ou encore en ajoutant

$$\hat{P}(\Sigma_\Phi > 0 \cap \Sigma_\Psi > 0)$$

aux deux membres

$$\hat{P}(\Sigma_\Psi > 0) \leq \hat{P}(\Sigma_\Phi > 0)$$

ce qui établit la proposition 9.

On pourrait espérer généraliser le résultat de la proposition 9 et montrer que

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}' \ \forall k \geq 2 \qquad \hat{P}[I_\Phi \geq k] \geq \hat{P}[I_{SPT} \geq k]$$

L'exemple suivant montre que cette inégalité peut devenir fausse dès $k = 3$ et que l'on n'a pas non plus

$$\forall \Phi \in \mathscr{C}' \qquad \hat{E}[I_\Phi] \geq \hat{E}[I_{SPT}]$$

Exemple 3. — On prend pour $\hat{\Omega}$ un espace à 7 points $\hat{\Omega} = \{ \omega_i \}_{1 \leq i \leq 7}$ $\hat{\theta}$ est l'application qui à ω_i associe ω_{i+1} modulo 7. La valeur des couples (σ, τ) est donnée par le tableau suivant qui précise également les valeurs de W et I pour les disciplines Ψ = SPT et Φ qui coïncide avec SPT sauf sur ω_3 où $\Phi(\omega_3) = (2, 3)$ alors que $\Psi(\omega_3) = (1, 2, 3)$.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
σ	2,1	3,8	4	1	1	1	1
τ	1	1	4	1	1	1	5
W_Ψ	0	1,1	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
I_Ψ	0	1	2	1	2	3	4
W_Φ	0	9,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
I_Φ	0	1	2	2	2	2	2

Comme $\hat{\theta}\hat{P} = \hat{P}$ et $\hat{E}(\tau) = 1$, $\forall i \in \{ 1, 2, \ldots, 7 \}$ $\hat{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{14}$.

Pour la discipline $\Psi = \mathrm{SPT}$ on a

$$\hat{E}(W_\Psi) = \frac{206}{140}, \qquad \hat{E}(I_\Psi) = \frac{13}{14} \qquad \text{et} \qquad \hat{P}(I_\Psi \geq 3) = \frac{2}{14}$$

tandis que pour la discipline Φ

$$\hat{E}(W_\Phi) = \frac{96}{140}, \qquad \hat{E}(I_\Phi) = \frac{11}{14} \qquad \text{et} \qquad \hat{P}(I_\Phi \geq 3) = 0\,.$$

4. APPLICATION AUX FILES A PRIORITÉS

Pour simplifier l'exposé nous nous limiterons à deux classes de priorités, le cas de n classes de traitant de la même manière.

Le processus N de toutes les arrivées prioritaires ou non est un processus ponctuel simple marqué supposé stationnaire. Chaque arrivée est marquée par un couple (α, σ) où α vaut 1 si le client est prioritaire et 0 sinon, et σ est un point de $\mathbb{R}_+^*$ représentant le service demandé. On ne fait aucune hypothèse d'indépendance. On note N_0 et N_1 respectivement les sous processus des arrivées ordinaires et prioritaires.

On construit comme au paragraphe 1 l'espace $(\hat{\Omega}, \hat{\theta}, \hat{P})$. $(\hat{\Omega}_0, \hat{\theta}_0, \hat{P}_0)$ et $(\hat{\Omega}_1, \hat{\theta}_1, \hat{P}_1)$ désignent les espaces associés respectivement aux processus des arrivées ordinaires et prioritaires :

$$\hat{\Omega}_0 = \{\, \omega \in \hat{\Omega} \mid \alpha(\omega) = 0 \,\}$$

$\hat{\theta}_0$ est la restriction à $\hat{\Omega}_0$ de l'opérateur $\hat{\theta}^v$ où v désigne l'instant du premier retour à $\hat{\Omega}_0$.

La mesure de Palm $\hat{P}_0$ du processus N_0 est la restriction à $\hat{\Omega}_0$ de la mesure $\hat{P}$ du processus global. Ceci se vérifie immédiatement en appliquant la proposition II-16 de Neveu [7].

On définit de même $\hat{\Omega}_1$, $\hat{\theta}_1$ et $\hat{P}_1$.

Dans toute la suite on suppose $(\hat{\Omega}\,\hat{\theta}\,\hat{P})$ ergodique ($(\hat{\Omega}_0\,\hat{\theta}_0\,\hat{P}_0)$ et $(\hat{\Omega}_1\,\hat{\theta}_1\,\hat{P}_1)$ le sont alors également) et $\hat{E}(\sigma) < 1$. La proposition 1 reste valable : la charge stationnaire Γ du serveur est finie $\hat{P}$ p. s. et vérifie $\hat{P}(\Gamma = 0) > 0$. On peut donc construire sur $\hat{\Omega}$ comme au paragraphe 1 un vecteur stationnaire $\vec{S}$ de $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ dont les I_0 premières composantes représentent les restes de service (strictement positifs) des clients non prioritaires juste avant l'instant $T_0 = 0$, et les I_1 suivantes les restes de services des clients prioritaires, toutes les autres étant nulles. On convient de placer provisoirement le client qui arrive, soit à la ligne $I_0 + I_1 + 1$ s'il est prioritaire, soit à la ligne $I_0 + 1$ s'il est ordinaire et dans ce cas on décale tous les services des clients prioritaires d'une ligne vers le bas. On opère ensuite une permutation qui place ce client selon la discipline choisie :

DÉFINITION 10. — On appelle discipline admissible toute application de $\hat{\Omega}$ dans l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, I_0 + I_1 + 1\}$ qui :

a) ne dépend que des $v + 1$ premiers termes de la suite

$$\{(\alpha, \sigma, \vec{S}), (\alpha \circ \hat{\theta}^{-1}, \sigma \circ \hat{\theta}^{-1}, \vec{S} \circ \hat{\theta}^{-1}), \ldots, (\alpha \circ \hat{\theta}^{-n}, \sigma \circ \hat{\theta}^{-n}, \vec{S} \circ \hat{\theta}^{-n}) \ldots \}_{n \in \mathbb{N}}$$

où v est la v. a. de la définition 2.

b) peut s'écrire $\Phi = \Phi_0 \circ \Phi_1 = \Phi_1 \circ \Phi_0$ où $\Phi_0(\omega)$ et $\Phi_1(\omega)$ sont respectivement des permutations de $\{1, 2, \ldots, I_0\}$ et $\{I_0 + 1, \ldots, I_0 + I_1 + 1\}$ lorsque $\omega \in \hat{\Omega}_1$ et des permutations de

$$\{1, 2, \ldots, I_0 + 1\} \qquad \text{et} \qquad \{I_0 + 2, \ldots, I_0 + I_1 + 1\}$$

lorsque $\omega \in \hat{\Omega}_0$.

On notera que pour toute discipline admissible l'arrivée d'un client prioritaire interrompt tout service ordinaire en cours.

PROPOSITION 11. — Pour toute discipline admissible Φ il existe sur $\hat{\Omega}$ un vecteur d'état stationnaire $\vec{S}_\Phi$ solution des équations (4) et (5) et un processus $\vec{S}_\Phi(\omega, t)$ défini sur Ω stationnaire par $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ et solution des équations (4) et (6). De plus la suite $\vec{S}_n$ construite par (7) et (8) à partir d'un vecteur $\vec{S}$ quelconque de $\mathscr{E}$ vérifie $\vec{S}_n \circ \theta^{-n} = \vec{S}$ $\hat{P}$ p. s. pour tout $n \geq v_1$ où v_1 est une v. a. $\hat{P}$ p. s. finie.

La démonstration est identique à celle de la proposition 4.

On peut maintenant chercher comme au § 2 une discipline de service optimale au sens de la relation d'ordre $\prec$.

Si on appelle $\vec{S}_0$ et $\vec{S}_1$ les vecteurs d'états correspondant respectivement aux clients ordinaires et prioritaires.

$$\vec{S}_0 = \begin{bmatrix} S^1 \\ \vdots \\ S^{I_0} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{S}_1 = \begin{bmatrix} S^{I_0+1} \\ \vdots \\ S^{I_0+I_1} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

on a le résultat suivant

Proposition 12. — Le vecteur $\vec{S}_0$ [respectivement $\vec{S}_1$] est indépendant de Φ_1 [resp. Φ_0]. Toute discipline Ψ_1 [resp. Ψ_0] qui réalise SRPT pour les clients prioritaires [resp. ordinaires] est optimale au sens suivant :

$$\forall\Phi \text{ admissible } \vec{S}_1(\Psi_1) \prec \vec{S}_1(\Phi)\ \hat{P} \text{ p. s.} \quad [\text{resp. } \vec{S}_0(\Psi_0) \prec \vec{S}_0(\Phi)\ \hat{P} \text{ p. s.}].$$

Démonstration. — Sur l'ensemble $\{ \Gamma = 0 \}$ $\vec{S}_0$ et $\vec{S}_1$ sont nuls donc indépendants de Φ. On appelle v la v. a. p. s. finie $\inf\{ n \in \mathbb{N} \mid \Gamma \circ \hat{\theta}^{-n} = 0 \}$ et on vérifie facilement que si $\vec{S}_0 \circ \theta^{-v+n}$ est indépendant de

$$\Phi_1 \circ \hat{\theta}^{-v}, \Phi_1 \circ \hat{\theta}^{-v+1}, \ldots, \Phi_1 \circ \hat{\theta}^{-v+n-1}$$

le même résultat est vrai à l'ordre $n + 1$. En se plaçant sur chaque ensemble $\{ v = n \}$ on obtient que $\vec{S}_0$ ne dépend pas Φ_1. On procède de même pour $\vec{S}_1$ et Φ_0.

Notons $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_0$ les réordonnements, par ordre décroissant des composantes des vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_0$. Pour terminer la démonstration de la proposition 12, il suffit comme au § 2 de prouver l'invariance par $\hat{\theta}$ des événements $\{ \mathscr{S}_1(\Psi_1) \prec \mathscr{S}_1(\Phi) \}$ et $\{ \mathscr{S}_0(\Psi_0) \prec \mathscr{S}_0(\Phi) \}$, invariance qui découle immédiatement des formules liant $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_1^+$ et $\mathscr{S}_1 \circ \hat{\theta}$ [resp. $\mathscr{S}_0 \mathscr{S}_0^+$ et $\mathscr{S}_0 \circ \hat{\theta}$] : Pour toute discipline Φ admissible et pour tout entier $j \geq 1$ on a $\hat{P}$ p. s. :

$$\mathscr{S}_1^+ = \mathscr{S}_1 \qquad \text{sur } \hat{\Omega}_0$$

$$\sum_{k=j}^{\infty} (\mathscr{S}_1^+)^k = \left(\sum_{k=j}^{\infty} \mathscr{S}_1^k + \sigma \right) \wedge \left(\sum_{k=j-1}^{\infty} \mathscr{S}_1^k \right) \qquad \text{sur } \hat{\Omega}_1$$

et $$\sum_{k=j}^{\infty} \mathscr{S}_1^k \circ \hat{\theta} \geq \left[\sum_{k=j}^{\infty} (\mathscr{S}_1^+)^k - \tau \right]^+ \qquad \text{avec égalité pour } \Phi = \Psi_1 .$$

De même

$$\mathscr{S}_0^+ = \mathscr{S}_0 \qquad \text{sur } \hat{\Omega}_1$$

$$\sum_{k=j}^{\infty} (\mathscr{S}_0^+)^k = \left(\sum_{k=j}^{\infty} \mathscr{S}_0^k + \sigma \right) \wedge \left(\sum_{k=j-1}^{\infty} \mathscr{S}_0^k \right) \qquad \text{sur } \hat{\Omega}_0$$

et en appelant Γ_1 la charge (indépendante de Φ) due aux clients prioritaires

$$\sum_{k=j}^{\infty} \mathscr{S}_0^k \circ \theta \geq \left[\sum_{k=j} (\mathscr{S}_0^+)^k - (\tau - \Gamma_1)^+ \right]^+ \qquad \text{avec égalité pour } \Phi = \Psi_0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOROVKOV, *Stochastic Processes in queuing theory*. Springer, 1976.

[2] CONWAY, MAXWELL, MILLER, *Theory of Scheduling*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.

[3] P. FRANKEN, Einige Anwendungen der Theorie Zufälliger Punktprozesse in der Bedienungstheorie. *Mathematische Nachrichten*, t. **70**, 1975, p. 303-319.

[4] U. KALAHNE, Existence, Uniqueness and some invariant Properties of stationary distributions for General Single Server Queues. *Math. Operationforsch. Stat.*, t. **4**, 1976, p. 557-575.

[5] KIEFER, WOLFOWITZ, On the characteristics of the general queuing process, with applications to random walk. *Ann. Math. Statist.*, t. **27**, 1956, p. 147-161.

[6] KINGMAN, Inequalities in the theory of queues. *Journal of Royal Stat. Soc.*, t. B **32**, 1970, p. 102-110.

[7] J. NEVEU, Processus ponctuels. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour 1976, *Lecture Notes*, n° 598, 1977, p. 250-368.

[8] SCHRAGE and MILLER, The M/G/1 queue with SRPT discipline. *Operations Research*, t. **14**, 1966, p. 670-684.

[9] D. SMITH, A new proof of the optimality of the SRPT discipline. *Operations Research*, t. **26**, n° 1, 1978, p. 197-199.

[10] A. S. SZNITMAN, Perturbations ponctuelles d'évolutions : construction d'espaces stationnaires. *Thèse de 3ᵉ cycle*, Université Paris VIᵉ, 1980.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1981)