

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. ÉMILION

Théorème ergodique local dans L_p ($1 < p < \infty$)

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, n° 2 (1981), p. 181-184

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_2_181_0

© Gauthier-Villars, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Théorème ergodique local dans L_p ($1 < p < \infty$)

par

R. ÉMILION

Laboratoire de Probabilités, Tour 56, 3^e étage,
4, Place Jussieu, Paris-VI^e, 75230 Paris Cedex 05

INTRODUCTION

Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré σ -fini et soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe à un paramètre de contractions linéaires positives dans $L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$ $1 < p < \infty$, fortement continu. La théorie ergodique locale est l'étude de l'existence de la limite presque sûre d'expressions de la forme $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt$ lorsque ε tend vers 0^+ , f étant un élément de L_p .

Kubokawa [2] a démontré que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt = f$ p. p. lorsque $T_0 = I$. Ackoglu et Krengel [1] ont généralisé ce résultat en démontrant que la limite existe même quand le semi-groupe n'est pas défini en $t = 0$. L'intérêt de cet article-ci est de présenter une démonstration tout à fait simple et différente des précédentes du résultat suivant et de son analogue pour des opérateurs T_t non nécessairement positifs.

THÉORÈME. — Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré σ -fini.

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe à un paramètre de contractions positives dans $L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$ $1 < p < \infty$, fortement continu. Alors :

Pour tout $f \in L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt = T(0)f$ p. p. sur X .

Remarques. — 1) L'analogie de ce théorème pour un semi-groupe à n paramètres se démontre comme celui de Terrel [4].

2) Si T_t n'est pas nécessairement positif mais est une contraction de L_1 et L_∞ , le lemme 1 qui suit s'obtient en utilisant le semi-groupe (\tilde{T}_t) d'opérateurs positifs de [2] et par suite le théorème est aussi démontré dans ce cas.

LEMME 1. — $(T_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les hypothèses du théorème, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$

$$\left\| \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt \right\|_p < c \|f\|_p$$

Preuve. — Posons, pour tout $\lambda > 0$, $R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt$ et $f^* = \sup |\lambda R_\lambda f|$. S. A. MacGrath [3] a démontré que $\|f^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

Pour t tel que $0 < t < \varepsilon$ on a $1 < e e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}$, donc

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt < \frac{e}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} T_t f dt.$$

Par suite

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt < e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} T_t f dt$$

et

$$\sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt < e f^* \quad \text{pour } f \in L_p^+$$

donc

$$\left\| \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt \right\|_p < \frac{ep}{p-1} \|f\|_p \quad \text{pour } f \in L_p.$$

LEMME 2. — L'ensemble des fonctions f de L_p pour lesquelles la conclusion du théorème est vraie est fermé dans L_p .

Preuve. — Démonstration classique qu'on retrouve dans les théorèmes de convergence presque sûre. Posons pour $\varepsilon > 0$:

$$S_\varepsilon f = \int_0^\varepsilon T_t f dt, \quad R^* f = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f$$

et

$$Rf = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \varepsilon' \rightarrow 0^+}} \sup \left| \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f - \frac{1}{\varepsilon'} S_{\varepsilon'} f \right|.$$

On a $Rf < 2R^*f$.

Appelons E l'ensemble des fonctions de L_p vérifiant la conclusion du théorème. Soit f adhérent à E ; il s'agit de montrer que $f \in E$. Montrons d'abord que $Rf = 0$ p. p. Soit $\varepsilon > 0$ et $g \in E$ tel que $0 < \|f - g\|_p^p < \varepsilon^2$. Puisque $Rg = 0$ on a $Rf = R(f - g)$.

On a aussi

$$\begin{aligned} \mu((Rf)^p > \varepsilon) &= \mu((R(f - g))^p > \varepsilon) < \mu\left((R(f - g))^p > \frac{1}{\varepsilon} \|f - g\|_p^p\right) \\ &< \mu\left((R^*(f - g))^p > \frac{1}{2^p \varepsilon} \|f - g\|_p^p\right) \\ &< 2^p \varepsilon \frac{\|R^*(f - g)\|_p^p}{\|f - g\|_p^p} \quad \left(\text{si } h \in L_p \mu(h^p > \lambda) < \frac{1}{\lambda} \|h\|_p^p\right) \\ &< 2^p \varepsilon c^p \text{ (lemme 1).} \quad \text{Donc } \mu((Rf)^p > \varepsilon) < 2^p \varepsilon c^p. \end{aligned}$$

Par suite $Rf = 0$ p. p. et donc d'après le critère de Cauchy $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f$ existe p. p. D'autre part $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f - T(0)f \right\|_p = 0$ car le semi-groupe est continu en 0. En prenant une suite ε_n tendant vers 0 et en sachant que la convergence presque sûre d'une sous-suite, on obtient par unicité de la limite : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f = T(0)f$. Donc $f \in E$.

LEMME 3. — Posons $M(\varepsilon)f = \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f$ pour $\varepsilon > 0$ et $f \in L_p$.

L'ensemble $\{M(\varepsilon)f / f \in L_p, 0 < \varepsilon < 1\}$ est dense dans $T(0)L_p$ (image par $T(0)$ de L_p) et toutes les fonctions $M(\varepsilon)f$ satisfont la conclusion du théorème.

Résultat classique démontré, par exemple, par Terrel [4].

Preuve du théorème. — D'après le lemme 2 et le lemme 3 toute fonction de $T(0)L_p$ satisfait la conclusion du théorème, donc pour tout $f \in L_p$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t T_0 f dt = T_0(T_0 f) \quad \text{p. p.}$$

ou

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f dt = T(0)f, \quad \text{car } T_t T_0 = T_{t+0} = T_0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AKCOGLU-KRENGEL, A differentiation theorem in L_p , *Math. Z.*, t. **169**, 1979.
 [2] Y. KUBOKAWA, A local ergodic theorem for semi-group on L_p *Tohoku. Math. Journal*, t. **26**, 1974, p. 411-422.

- [3] S. A. MAC. GRATH, An abelian ergodic theorem for semi-group in L_p spaces. *Proceed. Amer. Society*, t. **54**, 1976, p. 231-236.
- [4] T. TERREL, Local ergodic theorems for n -parameters semi-groups of operators. *Contribution to ergodic and Prob. Theory*. Springer-Verlag, N. Y., 1970.

(Manuscrit reçu le 18 décembre 1980)