ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. CALBRIX

# Mesures non σ-finies : désintégration et quelques autres propriétés

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 17, nº 1 (1981), p. 75-95
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_1_75_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. XVII, n° 1, 1981, p. 75-95.

Section B :
*Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Mesures non $\sigma$-finies : désintégration et quelques autres propriétés

par

**J. CALBRIX**
Laboratoire de Mathématiques,
Université de Haute-Normandie,
76130 Mont-Saint-Aignan

SUMMARY. — We give a general theorem on the disintegration of measures with a simple statement and an easy proof. We work with « bimesures » which seems to be the good tool for the study of disintegration. The result includes many well-known results in the topological case as well as in the abstract case.

## I. INTRODUCTION

Dans cet article, nous étudions les désintégrations des bimesures $\pi$ non bornées, définies sur le produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ de deux tribus sur les ensembles respectifs E et F (les autres cas — désintégration d'une mesure sur un produit par rapport à une marge, désintégration d'une mesure par rapport à une mesure image — s'y ramènent).

Nous montrons que si (F, $\mathbf{F}$, $\pi(E,.)$) est concassable (en un sens plus large que [*2*]), le problème se réduit facilement au cas borné.

Les hypothèses sur les mesures $\pi(.,B)$, $B \in \mathbf{F}$ sont des hypothèses classiques de tension par rapport à une famille semi-compacte.

Dans le cas où E est un espace topologique séparé et $\mathbf{E}$ la tribu borélienne de E, nous obtenons un théorème généralisant celui de Jean Saint-Pierre [*9*] avec une démonstration plus simple.

Nous utilisons l'outil relèvement, désormais classique dans ce genre de problème ([*6*], [*5*], [*8*], [*10*], [*9*]) mais nous l'appliquons aux espérances conditionnelles d'indicatrices plutôt qu'à celles des fonctions continues, ce qui simplifie les démonstrations.

Le cas E topologique est traité en premier car le langage topologique est plus imagé et simplificateur. Le cas E abstrait généralisant le premier cas est traité ensuite. Pour ce cas et si $\pi$ est borné, le résultat n'est pas le plus général connu. Un récent travail de Pachl [*12*] a permis de se passer de l'hypothèse de séparation dans les systèmes compacts de [*7*].

Nous appliquons ensuite nos résultats aux cas des désintégrations propres et généralisons la proposition 13 page 39 de Bourbaki [*2*].

## II. NOTATIONS ET DÉFINITIONS DE BASE

### II.1. Généralités.

Soit $(F, \mathbf{F})$ un espace mesurable, muni d'une mesure $\nu$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.

$\mathbf{F}_\nu$ désigne la *tribu complétée* de $\mathbf{F}$ par $\nu$ et l'extension de $\nu$ à $\mathbf{F}_\nu$ est encore notée $\nu$.

Toute propriété concernant $\mathbf{F}_\nu$ est précédée de $\nu$ (par exemple $\nu$-mesurable, $\nu$-intégrable...).

Soit $(F', \mathbf{F}')$ un espace mesurable, $f$ une application de F dans F' :

On dit que $f$ est *$\nu$-localement mesurable* (resp. : *$\nu$-localement intégrable*, *$\nu$-localement négligeable*) si pour tout B $\nu$-intégrable, $f_{|B}$ est $\nu_{|B}$-mesurable (resp. : $\nu_{|B}$-intégrable, $\nu_{|B}$-négligeable).

On dit qu'une partie A de F est $\nu$-localement mesurable (resp. : $\nu$-localement négligeable) si $1_A$ est $\nu$-localement mesurable (resp. : $\nu$-localement négligeable).

On écrit en abrégé $\nu$-loc. mes., $\nu$-loc. int., $\nu$-loc. nég.

### II.2. CONCASSAGES

Un *pré-concassage* de $(F, \mathbf{F}, \nu)$ est une famille $(F_i)_{i \in I}$ de parties de F, $\nu$-intégrables, d'intersections deux à deux $\nu$-négligeables, telle que pour tout B $\nu$-intégrable il existe un sous-ensemble dénombrable J de I tel que

$$\nu\left(B \Big\backslash \bigcup_{i \in J} F_i\right) = 0 .$$

On note $\mathbf{F}_i$ la trace $\mathbf{F} \cap F_i$ de $\mathbf{F}$ sur $F_i$, $\nu_i$ la restriction de $\nu$ à $\mathbf{F}_i$.

On constate évidemment que $E \Big\backslash \bigcup_{i \in I} F_i$ est $\nu$-localement négligeable.

Un *concassage* est un préconcassage $(F_i)_{i \in I}$ où les $F_i$ sont deux à deux disjoints.

Un espace ayant un concassage sera dit *concassable.*

L'expression concassage est empruntée à Bourbaki et notre notion généralise la notion introduite par celui-ci.

Montrons qu'il existe pour tout espace (F, **F**, $\nu$) un préconcassage et que si **F** a au plus la puissance du continu, sous l'hypothèse du continu, l'espace est concassable.

Si tous les ensembles $\nu$-intégrables sont $\nu$-négligeables, la famille $(\phi)$ est un préconcassage.

Si il existe un élément de **F** intégrable de mesure strictement positive, il existe alors en vertu de l'axiome de Zorn une famille maximale d'éléments de **F** intégrables de mesures strictement positives, d'intersections deux à deux $\nu$-négligeables. Si B est $\nu$-intégrable la trace sur B de cette famille a un suprêmum essentiel qui n'est autre que la classe de B : La famille maximale est donc un préconcassage.

Si maintenant F a la puissance du continu et si nous travaillons sous l'hypothèse du continu, mettant sur le préconcassage le bon ordre du plus petit ordinal non dénombrable et enlevant à chaque élément du préconcassage la trace des éléments ordonnés avant lui, par une récurrence transfinie, on obtient un concassage.

Remarquons alors que, pour n'importe quelle mesure, nombre de « bons » espaces sont concassables (les polonais munis de leur structure borélienne et plus généralement les sousliniens au sens de Bourbaki [*1*]).

## II.3. **Mesures tendues.**

Soit (F, **F**, $\nu$) un espace mesuré et **C** une sous famille de **F**. On dit que $\nu$ est **C**-tendue si $\nu(B) = \operatorname{Sup}\{\nu(C) \mid C \in \mathbf{C}, C \subset B\}$ pour tout $B \in \mathbf{F}$. (La propriété reste vraie pour tout $B \in \mathbf{F}_\nu$). Soit E un espace topologique séparée (e. t. s.). Soit **K**(E) (ou **K** si il n'y a pas d'ambiguïté) la famille des compacts de E, **B**(E) la tribu borélienne de E.

Une mesure $\mu$ sur **B**(E) est dite de *Radon* si :

1) $\mu$ est **K**(E)-tendue,

2) $\mu$ est *localement bornée* (il existe pour tout $x \in E$ un voisinage ouvert de $x$ intégrable).

Pour tout e. t. s. muni d'une mesure de Radon, il existe un concassage constitué de compacts (cf. V.5).

Toute mesure $\sigma$-finie sur un espace souslinien est de Radon.

### II.4. — Bimesures.

Soient (E, **E**) et (F, **F**) deux espaces mesurables.

Une *bimesure* $\pi$ sur **E** $\times$ **F** est une application de **E** $\times$ **F** dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ telle que $\pi(A, .)$ soit une mesure sur **F** pour tout $A \in \mathbf{E}$ et $\pi(., B)$ soit une mesure sur **E** pour tout $B \in \mathbf{F}$.

Les mesures $\pi(., F)$ et $\pi(E, .)$ seront notées $\mu$ et $\nu$ et les mesures $\pi(., B)$ et $\pi(A, .)$ seront notées $\mu_B$ et $\nu_A$. (On ne confondra pas $\mu_B$ et $\mu_{|A}$ la restriction de $\mu$ à la trace $\mathbf{E} \cap A$ de **E** sur A).

$\pi$ se prolonge naturellement à $\mathbf{E}_\mu \times \mathbf{F}_\nu$.

Le concept de bimesure semble être le concept adéquat pour traiter les désintégrations.

Si $\pi$ est une mesure sur $E \otimes F$, on notera encore $\pi$ la bimesure valant $\pi(A \times B)$ sur (A, B).

Si $\mu$ est une mesure sur (E, **E**), T une application $\mu$-mesurable de E dans F et $\nu$ la mesure image $T(\mu)$ de $\mu$ par T, on définit une bimesure $\pi$ sur **E** $\times$ **F** en posant $\pi(A, B) = \mu(A \cap T^{-1}(B))$.

De même si $(E, E, \mu)$ est un espace mesuré, **F** une sous tribu de **E**, on définit une bimesure $\pi$ sur **E** $\times$ **F** en posant $\pi(A \times B) = \pi(A \cap B)$.

*A priori* une bimesure sur **E** $\times$ **F** est un objet plus général qu'une mesure sur $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$. On sait cependant que si E est un e. t. s. et si $\pi$ est une bimesure sur $\mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}$ telle que $\mu$ soit $\mathbf{K}(E)$-tendue et bornée alors la fonction $\pi'$ définie sur les rectangles mesurables par $\pi'(A \times B) = \pi(A, B)$ se prolonge de manière unique en une mesure sur $\mathbf{B}(E) \otimes \mathbf{F}$. (Morando, voir réf. dans [*3*]).

## III. UN THÉORÈME DE DÉSINTÉGRATION

### III.1. Définition d'une désintégration d'une bimesure.

Soient (E, **E**) et (F, **F**) deux espaces mesurables, $\pi$ une bimesure sur **E** $\times$ **F**. Une désintégration, $\nu$-localement mesurable de $\pi$ est une application P de **E** $\times$ F dans [0, 1] vérifiant :

(R') $P(., y)$ est une mesure pour tout $y \in F$,

(M) $P(A, .)$ est $\nu$-localement mesurable pour tout $A \in \mathbf{E}$,

(D) $\displaystyle\int_B d\nu(y) P(A, y) = \pi(A, B)$ pour tout $A \in \mathbf{E}$, B $\nu$-intégrable.

La désintégration est régulière si :

(R) $P(., y)$ est une probabilité pour tout $y \in F$.

### III.2. Énoncé du théorème.

Nous nous situons dans un cadre topologique par souci pédagogique. Nous offrons une version abstraite au paragraphe V.

THÉORÈME III.2.1. — *Soient* E *un e. t. s.*, $(F, \mathbf{F})$ *un espace mesurable*, $\pi$ *une bimesure sur* $\mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}$.

*Supposons que* $(F, \mathbf{F}, \nu)$ *soit concassable et que, pour tout* B $\nu$*-intégrable*, $\mu_B$ *soit* $\mathbf{K}(E)$*-tendue (donc de Radon) ; alors, il existe une désintégration* P *de* $\pi$, $\nu$*-loc. mes., régulière telle que* $P(., y)$ *soit* $\mathbf{K}(E)$*-tendue (donc de Radon) pour tout* $y \in F$.

*Démonstration.* — Soit $(F_i)_{i\in I}$ un concassage de $(F, \mathbf{F}, \nu)$, $\phi \notin (F_i)_{i\in I}$. Posons $N = F \setminus \cup F_i$. Supposons que pour chaque $i \in I$, nous ayons une désintégration $P_i$, $\nu_i$-mesurable, régulière de la bimesure $\pi$ restreinte à $\mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}_i$ telle que $P_i(., y)$ soit $\mathbf{K}$-tendue pour tout $y \in F_i$. On définit alors

$$P = \sum_i P_i + \mu_0 1_N$$

par

$P(A, y) = P_i(A, y)$ si $A \in \mathbf{B}(E)$, $y \in F_i$, $i \in I$,
$P(A, y) = \mu_0(A)$ si $A \in \mathbf{B}(E)$, $y \in N$,

où $\mu_0$ est une probabilité de Radon sur $\mathbf{B}(E)$ (par exemple une dirac).

P est alors une désintégration vérifiant les conclusions du théorème.

On est ramené au cas où $\pi$ est bornée et $\mu$ de Radon.

Mais alors ce résultat est classique, cf. [*7*], [*5*], [*8*], [*10*].

Donnons, ici une démonstration simplifiée de ce cas.

Tout d'abord, énonçons un lemme étendant un résultat de [*7*] (th. 3.1, p. 448, inspiré par le th. E, Sec. 53 de [*4*]).

LEMME III.2.2. — *Soient* X *un e. t. s. et* $\theta$ *une fonction positive additive bornée sur* $\mathbf{B}(X)$.

*Posons*

$$\theta_*(G) = \sup \{ \theta(C) \mid C \textit{ compact}, C \subset G \} \textit{ pour tout } G \textit{ ouvert}$$

*et* $$\theta^*(A) = \inf \{ \theta_*(G) \mid G \textit{ ouvert}, G \supset A \} \textit{ pour tout } A \subset X.$$

$\theta^*$ *est une mesure extérieure au sens de Carathéodory telle que tout élément de* $\mathbf{B}(X)$ *soit* $\theta^*$*-mesurable.*

$\theta^*$ *restreinte à* $\mathbf{B}(X)$ *est une mesure de Radon et* $\theta^*(X) \leqq \theta(X)$.

*Démonstration.* — Montrons que $\theta_*$ est sous $\sigma$-additive. Soit $(G_n)$ une suite d'ouverts et $\varepsilon > 0$. Il existe un compact K inclus dans $\cup G_n$ tel que $\theta_*(\cup G_n) \leqq \theta(K) + \varepsilon$. Il existe alors un entier $r$ tel que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{r} G_n$$

et d'après la propriété de séparation des compacts disjoints par des ouverts disjoints, il existe $K_1, K_2, \ldots, K_r$, $r$ compacts tels que

$$K = \bigcup_{n=1}^{r} K_n$$

et $K_n \subset G_n$, $n = 1, \ldots, r$. On a alors

$$\theta_*(\cup G_n) \leqq \theta(K) + \varepsilon \leqq \sum_{n=1}^{r} \theta(K_n) + \varepsilon \leqq \sum_{n=1}^{r} \theta_*(G_n) + \varepsilon \leqq \Sigma\theta_*(G_n) + \varepsilon$$

$\theta^*$ est donc sous $\sigma$-additive. De plus, elle est croissante et vérifie $\theta^*(\phi) = 0$, c'est donc une mesure extérieure.

Montrons que tout ouvert est $\theta^*$-mesurable. Il suffit de montrer que pour deux ouverts G et G', on a :

$$\theta^*(G) \geqq \theta^*(G \cap G') + \theta^*(G \setminus G')$$

Soient C et D deux compacts vérifiant $C \subset G \cap G'$, $D \subset G \setminus C$. Comme $C \cup D \subset G$ et $C \cap D = \emptyset$ on a :

$$\theta^*(G) \geqq \theta(C \cup D) = \theta(C) + \theta(D)$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta^*(G) &\geqq \theta(C) + \operatorname{Sup}\{\, \theta(D) \mid D \text{ compact}, D \subset G \setminus C \,\} \\ &\geqq \theta(C) + \theta^*(G \setminus G') \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta^*(G) &\geqq \operatorname{Sup}\{\, \theta(C) \mid C \text{ compact}, C \subset G \cap G' \,\} + \theta^*(G \setminus G') \\ &\geqq \theta^*(G \cap G') + \theta^*(G \setminus G') \end{aligned}$$

On en déduit que $\theta^*$ restreinte à **B**(X) est une mesure **F**(X)-tendue (**F**(X) ensemble des fermés de X).

On vérifie que pour tout C compact inclus dans G ouvert

$$\theta(C) \leqq \theta^*(C) \leqq \theta_*(G) \leqq \theta(G).$$

En particulier $\theta_*(X) \leqq \theta(X)$.

Montrons que $\theta^*$ est **K**(X)-tendue. Soient $A \in$ **B**(X), $\varepsilon > 0$. Il existe un compact K tel que $\theta^*(X) \leqq \theta^*(K) + \varepsilon/2$. Il existe un fermé $F \subset A$ tel que $\theta^*(A) \leqq \theta^*(F) + \varepsilon/2$. On en déduit que le compact $F \cap K$ inclus dans A vérifie $\theta^*(A) \leqq \theta^*(F \cap K) + \varepsilon$. c. q. f. d.

Passons à la démonstration du théorème dans le cas $\pi$ borné. Supposons $\pi \not\equiv 0$ (le cas $\pi \equiv 0$ est trivial). Soit $A \in \mathbf{B}(E)$.

La mesure $\nu_A$ est absolument continue par rapport à $\nu$ puisque majorée par elle. Soit $\dot{g}_A$ la classe des densités de Radon Nikodym de $\nu_A$ par rapport à $\nu$. On a :

$$\int_B d\nu g = \nu_A(B) \text{ pour tout } B \in \mathbf{F}_\nu, \qquad g \in \dot{g}_A$$

On sait qu'il existe un relèvement sur $(F, \mathbf{F}, \nu)$ (c'est-à-dire un homomorphisme d'algèbre unitaire, compatible pour l'ordre de $L\infty(F, \mathbf{F}_\nu, \nu)$ dans $\mathscr{L}\infty(F, \mathbf{F}_\nu, \nu)$, l'ordre sur le deuxième espace étant l'ordre naturel). Nous n'avons pas besoin d'un tel relèvement dans toute sa force, on trouvera dans [3] un théorème d'existence d'un relèvement sans la propriété de conservation du produit, ce qui nous suffit pour la suite. Soit donc $\rho$ un relèvement sur $(F, \mathbf{F}, \nu)$.

On pose :

$$Q(A, y) = \rho(\dot{g}_A)(y) \text{ pour tout } A \in \mathbf{B}(E), \qquad y \in F$$

On vérifie :

1) $Q(.\,, y)$ est une fonction additive positive telle que $Q(E, y) = 1$ pour tout $y \in F$,

2) $Q(A, .)$ est $\nu$-mesurable pour tout $A \in \mathbf{B}(E)$,

3) $\int_B d\nu(y) Q(A, y) = \pi(A, B) (A \in \mathbf{B}(E),\ B \in \mathbf{F}_\nu)$.

Appliquant le lemme à chaque $Q(.\,, y)$, on trouve une fonction P de $\mathbf{B}(E) \times F$ dans $[0, 1]$ telle que $P(.\,, y)$ soit une mesure **K**-tendue pour tout $y$.

Montrons que P vérifie (M) et (D). En fait, il suffit de prouver que $P(A, .) = Q(A, .)$ $\nu$-p. p. pour tout $A \in \mathbf{B}(E)$.

Soit G ouvert. Il existe une suite $(K_n) \uparrow$ de compacts dans G vérifiant $\mu(K_n) \uparrow \mu(G)$.

Pour tout B $\nu$-mesurable, on a :

$$\int_B d\nu(y) Q(G, y) = \mu_B(G) = \operatorname{Lim} \uparrow \mu_B(K_n) = \int_B d\nu(y) \lim \uparrow Q(K_n, y)$$

Comme $Q(G, .) \geqq Q^*(G, .) = P(G, .) \geqq \operatorname{Lim} Q(K_n, .)$, on obtient $P(G, .) = Q(G, .)$ $\nu$-p. p.

L'ensemble des boréliens A tels que $P(A, .) = Q(A, .)$ $\nu$-p. p. étant stable par complémentation, unions finies disjointes et limites croissantes, c'est $\mathbf{B}(E)$.

Comme $P(E, .) = Q(E, .)(= 1)$ $\nu$-p. p. on modifie P si nécessaire pour obtenir la propriété (R). c. q. f. d.

Utilisant la mesure $\nu_*$ sur $\mathbf{F}_\nu^*$ (cf. V.2), on constate que les couples $(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}_\nu$ vérifiant $\pi(A, B) = 0$ avec $\nu(B) = +\infty$ ont une bimesure reconstituée à l'aide de $\nu_*$. Plus précisément $\pi(A, B) = 0 = \int_B d\nu_*(y)P(A, y)$ car $P(A, .)$ est $\nu$-localement négligeable sur B et donc $\nu_*$-négligeable sur B.

En deuxième lieu, on remarque que si la bimesure $\pi$ vérifie :

(A) Pour tout $(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}_\nu$, si $0 < \pi(A, B) < \infty$ alors B est $\nu$-$\sigma$-finie, la désintégration reconstitue la bimesure des couples $(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}_\nu$ vérifiant $0 < \pi(A, B) < \infty$.

En troisième lieu, si, outre (A), $\pi$ vérifie la propriété :

(T) Pour tout $(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}$ :

$$\pi(A, B) = \operatorname{Sup}\{\, \pi(A', B') \mid (A', B') \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}, A' \times B' \subset A \times B, \pi(A', B') < \infty \,\},$$

alors pour tout couple $(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}_\nu$ tel que $\pi(A, B) = +\infty$ on a

$$\int_B d\nu_*(y)P(A, y) = +\infty = \pi(A, B).$$

En définitive, si $\pi$ vérifie (A) et (T) on a :

Pour tout

$$(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}_\nu \quad \int_B d\nu_*(y)P(A, y) = \pi(A, B).$$

La propriété (T) est assez naturelle et correspond à une propriété de « partie finie forte » pour $\pi$. Si $\pi$ est définie par une mesure de Radon sur un produit d'espaces topologiques séparés, $\pi$ vérifie (T).

La propriété (A) est vérifiée par la bimesure définie par le produit d'une mesure bornée et d'une mesure quelconque. C'est le cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{B}[0, 1] \otimes \mathbf{B}(\mathbb{R})$ qui vérifie en plus la propriété (T) et le théorème III.2.1 reconstitue alors pour cette bimesure, la mesure de tout pavé (avec $\nu_*$). Par contre la propriété (A) n'est pas vérifiée par la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ et le théorème III.2.1 ne donne qu'une médiocre reconstitution de la mesure des pavés (en vérité ceux de mesure nulle).

On remarque cependant que la bimesure associés à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ est somme de « bonnes » bimesures, en l'occurence des bimesures du type de celle associée à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{B}[0, 1] \otimes \mathbf{B}(\mathbb{R})$.

En modifiant un peu la définition d'une désintégration, on peut alors donner un théorème permettant pour ce dernier cas de donner une reconstitution de la mesure de tout pavé.

THÉORÈME III.2.3. — *Soient* E *un e. t. s.* $(\mathrm{F}, \mathbf{F})$ *un espace mesurable,* $\pi$ *une bimesure sur* $\mathbf{B}(\mathrm{E}) \times \mathbf{F}$. *Supposons qu'il existe une* $\mathbf{B}(\mathrm{E})$-*partition de* E, *disons* $(\mathrm{E}_n)$, *vérifiant :*

*a) Pour tout* $\mathrm{B} \in \mathbf{F}$, *tout* $n$, *si* $\nu_n(\mathrm{B}) = \nu_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{B}) < \infty$ *alors* $\mu_{\mathrm{B}|\mathrm{E}_n}$ *est* $\mathbf{K}(\mathrm{E}_n)$-*tendue,*

*b)* $\pi_{|\mathbf{B}(\mathrm{E}_n) \times \mathbf{F}}$ *vérifie* (A) *et* (T),

*c) Les espaces* $(\mathrm{F}, \mathbf{F}, \nu_n)$ *ont un concassage commun.*

*Il existe alors une mesure* $\nu^0$ *sur* $\mathbf{F}$ *et une application* $\mathrm{P} : \mathbf{B}(\mathrm{E}) \times \mathrm{F} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ *vérifiant :*

1) $\mathrm{P}(.\,, y)$ *est une mesure* $\mathbf{K}(\mathrm{E})$-*tendue,*

2) $\mathrm{P}(\mathrm{A}, .)$ *est* $\nu^0$-*localement mesurable,*

3) *Pour tout* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbf{B}(\mathrm{E}) \times \mathbf{F}_\nu$ : $\displaystyle\int_{\mathrm{B}} d\nu^0_*(y)\mathrm{P}(\mathrm{A}, y) = \pi(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

*Démonstration.* — Soit $(\mathrm{F}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ un concassage commun aux $(\mathrm{F}, \mathbf{F}, \nu_n)$. Pour chaque $j \in \mathrm{J}$, il existe une suite $(\mathrm{C}_{n,j})$ de nombres réels strictement positifs, majorés par 1, vérifiant :

$$\sum_n \mathrm{C}_{n,j}\nu_n(\mathrm{F}_j) < \infty\,, \qquad j \in \mathrm{J}\,.$$

Soit $\pi^0$ la bimesure définie sur $\mathbf{B}(\mathrm{E}) \times \mathbf{F}$ par :

$$\pi^0(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sum_n \sum_j \pi(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n, \mathrm{B} \cap \mathrm{F}_j)\mathrm{C}_{n,j}\,.$$

On vérifie que $\pi^0 \leqq \pi$, que $(\mathrm{F}_j)$ est un concassage pour $(\mathrm{F}, \mathbf{F}, \nu^0)$ où $\nu^0(.) = \pi^0(\mathrm{E}, .)$ et que $\mu^0_{\mathrm{B}}$ est $\mathbf{K}(\mathrm{E})$-tendue pour tout B $\nu^0$-intégrable.

Il existe donc une désintégration $\mathrm{P}^0$ de $\pi^0$, $\nu^0$-localement mesurable, régulière, telle que $\pi^0(.\,, y)$ soit $\mathbf{K}(\mathrm{E})$-tendue.

Posons $\mathrm{P}(\mathrm{A}, y) = \displaystyle\sum_n \mathrm{C}_{n,j}^{-1}\mathrm{P}^0(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n, y)$, $y \in \mathrm{F}_j$, $j \in \mathrm{J}$, $\mathrm{A} \in \mathbf{B}(\mathrm{E})$. Il est facile de voir que P vérifie 1) et 2) du théorème.

Vérifions 3). Soit $(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}_\nu$.

Comme tout élément $\nu$-négligeable est $\nu_n$-négligeable pour tout $n$ et donc $\nu^0$-négligeable, on peut supposer $B \in \mathbf{F}$.

Si $(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}$ avec $\pi(A, B) < \infty$, on pose alors

$$N_1 = \{ n \in \mathbb{N} \mid \pi(A \cap E_n, B) > 0 \}.$$

Pour $n \notin N_1$ $\pi^0(A \cap E_n, B) = 0$ donc $P^0(A \cap E_n, .)$ est $\nu^0$-localement négligeable sur B. $P(A \cap E_n, .)$ est donc aussi $\nu^0$-localement négligeable sur B et

$$\int_B d\nu_*^0(y) P(A \cap E_n, y) = 0 = \pi(A \cap E_n, B).$$

Pour $n \in N_1$, comme $(F, \mathbf{F}, \nu_n)$ vérifie (A), B est $\nu_n$-$\sigma$-fini. Il existe alors J′ dénombrable $\subset$ J vérifiant :

$B \setminus \bigcup_{J'} F_j$ est $\nu_n$-négligeable. On constate alors que $P(A \cap E_n, .)$ est $\nu^0$-localement nul sur $B \setminus \bigcup_{J'} F_j$.

On a

$$\pi(A \cap E_n, B) = \sum_{J'} C_{n,j}^{-1} \pi^0(A \cap E_n, B \cap F_j)$$

$$= \sum_{J'} C_{n,j}^{-1} \int_{B \cap F_j} d\nu^0(y) P^0(A \cap E_n, y)$$

$$= \int_{B \cap \bigcup_{j \in J'} F_j} d\nu^0(y) P(A \cap E_n, y)$$

$$= \int_B d\nu_*^0(y) P(A \cap E_n, y)$$

Finalement

$$\pi(A, B) = \int_B d\nu_*^0(y) P(A, y).$$

Soit $(A, B) \in \mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}$ avec $\pi(A, B) = +\infty$. Il existe $n$ tel que

$$\pi(A \cap E_n, B) = +\infty.$$

Comme $(F, \mathbf{F}, \nu_n)$ vérifie (T), il existe une suite $((A_k, B_k))$ avec

$$(A_k, B_k) \in \mathbf{B}(E_n) \times \mathbf{F},\ \pi(A_k, B_k) < +\infty,$$
$$A_k \times B_k \subset (A \cap E_n) \times B,\ \operatorname{Lim} \pi(A_k, B_k) = +\infty.$$

On a :

$$+\infty = \pi(A \cap E_n, B) = \lim_k \pi(A_k, B_k) = \operatorname{Lim}_k \int_{B_k} d\nu_*^0(y) P(A_k, y)$$
$$\leq \int_B d\nu_*^0(y) P(A, y)$$

D'où

$$\pi(A, B) = +\infty = \int_B d\nu_*^0(y) P(A, y)$$

c. q. f. d.

*Remarque.* — Le théorème reste vrai si on remplace la condition (T) sur $\pi_{|\mathbf{B}(E_n) \times \mathbf{F}}$ par la condition de partie finie :

(P. F.)′ Pour tout $(A, B) \in \mathbf{B}(E_n) \times \mathbf{F}$ vérifiant $\pi(A, B) > 0$, il existe $(A', B') \in \mathbf{B}(E_n) \times \mathbf{F}$ vérifiant $A' \times B' \subset A \times B$ et $0 < \pi(A, B) < \infty$. Il est facile de voir en effet que la conjonction de (A) et (P. F.)′ implique (T).

Toute bonne désintégration doit reconstituer les intégrales. Nous donnons sans démonstration le théorème suivant dans le cadre d'un produit.

THÉORÈME III.2.4. — *Soient* $(E, \mathbf{E})$ *et* $(F, \mathbf{F})$, *deux espaces mesurables,* $\pi$ *une mesure sur* $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$, $\mu$ *et* $\nu$ *les projections de* $\pi$ *sur* E *et* F. *On note encore* $\pi$ *la bimesure associée.*

*Supposons qu'il existe une désintégration* P $\nu$*-localement mesurable de* $\pi$, *alors pour tout* $f$ $\pi$*-localement mesurable à valeurs dans* R, *intégrable sur tout* $E \times B$ *où* B *est* $\nu$*-intégrable :*

$f(., y)$ *est* $P(., y)$*-intégrable* $\nu$*-localement p. p. et*

$$\int_B d\nu(y) \int P(dx, y) f(x, y) = \int_{E \times B} d\pi f \qquad (B\ \nu\text{-}intégrable)$$

## IV. DÉSINTÉGRATIONS PROPRES

Dans ce paragraphe E est un e. t. s., $\mu$ une mesure de Radon sur E, (F, **F**) un espace *séparé* (**F** contient les points), T une application $\mu$-localement mesurable de E dans F, $\pi$ la bimesure définie sur $\mathbf{B}(E) \times \mathbf{F}$ par $\pi(A, B) = \mu_*(A \cap T^{-1}(B))$.

Ici, $\mu_*$ est la mesure intérieure associée à $\mu$, définie sur la tribu $\mathbf{B}(E)_\mu^*$ des ensembles $\mu$-localement mesurables par

$$\mu_*(A) = \operatorname{Sup}\{\mu(B) \mid B\ \mu\text{-intégrable}, B \subset A\}, \qquad A \in \mathbf{B}(E)_\mu^*$$

(voir V.1 et V.2).

### IV.1. Définition d'une désintégration propre.

On dit qu'une désintégration P de $\pi$ est *T-propre* si

$$(\mathrm{P})\begin{cases} 1)\ \mathrm{P}(.,y) \text{ est portée par } \mathrm{T}^{-1}(y) \text{ pour tout } y \in \mathrm{F}, \\ 2)\ \mathrm{P}(.,y) \text{ est une probabilité si } y \in \mathrm{T}(\mathrm{E}). \end{cases}$$

### IV.2. Terminologie.

On dit que **F** est *dénombrablement séparé* (dén. sép.) si il existe une sous famille dénombrable $(\mathrm{B}_n)$ séparant les points de F (c'est-à-dire si $x$, $y \in \mathrm{F}$ et $x \neq y$; il existe $n$ tel que, soit $x \in \mathrm{B}_n$ et $y \notin \mathrm{B}_n$, soit $x \notin \mathrm{B}_n$ et $y \in \mathrm{B}_n$). $(\mathrm{B}_n)$ est appelée *famille séparante.*

Si **F** est dén. sép. et si T est $\mu$-mesurable alors le graphe de T appartient à $\mathbf{B}(\mathrm{E})\mu \otimes \mathbf{F}$. (En effet le graphe de T est l'image réciproque de la diagonale de $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ par l'application $(x, y) \to (\mathrm{T}(x), y))$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ dans $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ et la condition **F** dén. sép. implique que cette diagonale appartienne à $\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}$). Un raisonnement classique montre alors qu'il existe un ensemble négligeable N dans E tel que la trace du graphe de T sur $(\mathrm{E} \setminus \mathrm{N}) \times \mathrm{F}$ appartienne à $\mathbf{B}(\mathrm{E}) \otimes \mathbf{F}$. (Si $(\mathrm{F}_n)$ est une famille séparante, $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{F}_n)$ s'écrit $\mathrm{E}_n \cup \mathrm{N}_n$ où $\mathrm{E}_n$, $\mathrm{N}_n \in \mathbf{B}(\mathrm{E})$, $\mu(\mathrm{N}_n) = 0$ et $\mathrm{E}_n \cap \mathrm{N}_n = \emptyset$. On pose $\mathrm{N} = \cup \mathrm{N}_n$).

### IV.3. Théorème IV.3.1.

THÉORÈME IV.3.1. — *Soient* E *un e. t. s.,* $\mu$ *une mesure de Radon sur* E, (F, **F**) *un espace mesurable,* T *une application* $\mu$*-localement mesurable, de* E *dans* F, $\pi$ *la bimesure définie sur* $\mathbf{B}(\mathrm{E}) \times \mathbf{F}$ *par* $\pi(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \mu_*(\mathrm{A} \cap \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B}))$.

*Supposons qu'il existe un concassage* $(\mathrm{F}_i)$ *de* (F, **F**, $v$) *tel que chaque* $\mathbf{F}_i$ *soit dénombrablement séparée alors il existe une désintégration* P *de* $\pi$, $v$*-loc. mes.,* T*-propre telle que* $\mathrm{P}(.,y)$ *soit de Radon pour tout* $y \in \mathrm{F}$.

*Démonstration.* — L'application T étant $\mu_*$-mesurable et les $\mathrm{F}_i$ étant $v$-intégrables, pour tout $i$, $\mathrm{E}'_i = \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{F}_i)$ est $\mu_*$-intégrable.

Il existe alors, au vu des remarques précédant le théorème, un ensemble mesurable $\mathrm{E}_i \subset \mathrm{E}'_i$ tel que $\mathrm{E}'_i \setminus \mathrm{E}_i$ soit $\mu$-localement négligeable et tel que l'application $\mathrm{T}_i$ de $\mathrm{E}_i$ dans $\mathrm{F}_i$, coïncidant avec T sur $\mathrm{E}_i$, ait son graphe dans $\mathbf{B}(\mathrm{E}_i) \otimes \mathbf{F}_i$.

Soit $\pi_i$ la restriction de $\pi$ à $\mathbf{B}(\mathrm{E}_i) \times \mathbf{F}_i$. En vertu du théorème III.2.1, comme la restriction $\mu_i$ de $\mu$ à $\mathrm{E}_i$ est de Radon, il existe une désintégration $\mathrm{P}_i$ de $\pi_i$, $v_i$-mesurable, régulière constituée de mesures de Radon ($v_i$ est la mesure image de $\mu_i$ par $\mathrm{T}_i$ et elle coïncide avec la restriction de $v$ à $\mathrm{F}_i$).

On montre alors que $P_i\,(T_i^{-1}(y), y) = 1$ $\nu_i$-p. p. En effet, si H est un élément de $\mathbf{B}(E_i) \otimes \mathbf{F}_i$ et si pour tout $y \in F_i$, on note $H_y$ l'ensemble (mesurable) des $x \in E_i$ vérifiant $(x, y) \in H$, on sait que $y \to P_i(H_y, y)$ est $\nu_i$-mesurable et

$$\int d\nu_i(y) P_i(H_y, y) = \mu_i(\{ x \mid (x, T_i(x)) \in H \}).$$

Il s'ensuit que $y \to P_i(T_i^{-1}(y), y)$ est $\nu_i$-mesurable (H = graphe de $T_i$) et

$$\int d\nu_i(y) P_i(T_i^{-1}(y), y) = \nu_i(F_i),$$

et donc $P_i(T_i^{-1}(y), y) = 1 \nu_i$-p. p.

En conséquence $H_i = T_i(E_i)$ est $\nu_i$-mesurable et vérifie $\nu_i(T_i(E_i)) = \nu_i(F_i)$. On constate alors que $(H_i)$ est un concassage de $(F, \mathbf{F}, \nu)$.

Soit F′ l'ensemble des $y \in F$ tels qu'il existe $i$ pour lequel $P_i(T_i^{-1}(y), y) = 1$. On pose alors pour tout $A \in \mathbf{B}(E)$ :

$P(A, y) = P_i(A \cap E_i, y)$ pour $y \in H_i \cap F'$, $i \in I$,
$P(A, y) = 1_A(x_y)$ pour $y \in T(E) \setminus F'$ $(x_y \in T^{-1}(y))$,
$P(A, y) = 0$ sinon,

P est une désintégration de $\pi$, $\nu$-loc. mes., T-propre, constituée de mesures de Radon.

## V. GÉNÉRALISATION ET CONSÉQUENCES

Nous donnons un certain nombre de définitions et propriétés concernant les mesures non bornées. Ceci rectifie en particulier certaines équivoques de [9]. Nous étendons ensuite le théorème III.2.1 au cadre abstrait et donnons quelques résultats sur les désintégrations propres étendant un résultat de Bourbaki.

### V.1. **La propriété** (C).

Soit $(F, \mathbf{F}, \nu)$, un espace mesuré, $\nu^*$ la mesure extérieure au sens de Carathéodory associée à $\nu$, $\mathbf{F}_\nu^*$ la tribu des parties $\nu^*$-mesurables

$$\left(\mathbf{F}_\nu^* = \{ A \subset F \mid (\forall B \subset F) \nu^*(B) = \nu^*(A \cap B) + \nu^*(B \setminus A) \}\right).$$

$\mathbf{F}_\nu^*$ peut être caractérisée comme étant l'ensemble des parties A de F vérifiant : Pour tout $B \in \mathbf{F}_\nu$ $\nu(B) \geqq \nu^*(B \cap A) + \nu^*(B \setminus A)$ (1). On sait que $\nu^*$ restreinte à $\mathbf{F}_\nu^*$ est une mesure complète, que $\mathbf{F}_\nu \subset \mathbf{F}_\nu^*$, que $\nu^*_{|\mathbf{F}_\nu} = \nu$ et que l'extension est la même si on travaille directement avec $(F, \mathbf{F}_\nu, \nu)$.

On dira que $(F, \mathbf{F}, \nu)$ *vérifie* (C) si $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^*$ (ce qui est le cas si $\nu$ est $\sigma$-finie).

Donnons une caractérisation de la tribu de Carathéodory affinant celle de Zaanen (th. 7, p. 43 [*11*]).

LEMME V.1.1. — $\mathbf{F}_\nu^* = \{ A \subset F \mid A$ *est* $\nu$*-localement mesurable* $\}$.

*Démonstration.* — En vertu de (1) la tribu des parties $\nu$-localement mesurables est incluse dans $F_\nu^*$.

Soient $A \in \mathbf{F}_\nu^*$ et B $\nu$-intégrable; on a pour tout B′ $\nu$-mesurable dans B :

$$\nu(B') \geqq \nu^*(B' \cap A) + \nu^*(B' \setminus A) = \nu_{|B}^*(B' \cap A) + \nu_{|B}^*(B' \setminus A)$$

donc $A \cap B \in (\mathbf{F}_\nu \cap B)_{\nu|B}^* = \mathbf{F}_\nu \cap B \subset \mathbf{F}_\nu$.

Remarquons que si $(F, \mathbf{F}, \nu)$ dans le théorème III.2.1 vérifie (C), la désintégration est $\nu$-mesurable.

## V.2. **La propriété de la partie finie.**

On dira que $(F, \mathbf{F}, \nu)$ vérifie la *propriété de la partie finie* si

$$\text{(P. F.)}\begin{cases}\text{Pour tout A } \nu\text{-mesurable de mesure} > 0, \text{ il existe B} \\ \nu\text{-intégrable de mesure} > 0 \text{ vérifiant } B \subset A.\end{cases}$$

Toute mesure de Radon sur un e. t. s. vérifie (P. F.). Il en est de même de la plupart des mesures de Hausdorff.

Il est facile de voir que pour un espace $(F, \mathbf{F}, \nu)$, (P. F.) équivaut à $\nu$ est $\mathbf{I}$-tendue, $\mathbf{I}$ désignant la famille des parties $\nu$-intégrables.

On voit tout aussi aisément que si $(F, \mathbf{F}, \nu)$ vérifie (C) alors (P. F.) équivaut à : tout ensemble $\nu$-localement négligeable est $\nu$-négligeable.

Posons $\nu_*(A) = \operatorname{Sup} \{ \nu(B) \mid B \in \mathbf{I}, B \subset A \}$, $A \in \mathbf{F}_\nu^*$. On vérifie que $\nu_*$ est une mesure sur $\mathbf{F}_\nu^*$, que $(F, \mathbf{F}, \nu_*)$ vérifie (P. F.), que $(F, \mathbf{F}_\nu^*, \nu_*)$ vérifie (P. F.) et (C) et que $\mathbf{F}_\nu^*$ est $\nu_*$-complète.

On a aussi : A est $\nu$-localement négligeable $\Leftrightarrow$ A est $\nu_*$-négligeable. La mesure $\nu_*$ coïncide avec $\nu$ sur $\mathbf{I}$ et $(F, \mathbf{F}, \nu)$ vérifie (P. F.) si et seulement si $\nu_*$ coïncide avec $\nu$ sur $\mathbf{F}$. Autrement dit $(F, \mathbf{F}, \nu)$ vérifie (P. F.) si et seulement si $\nu_*$ est une extension de $\nu$ à $\mathbf{F}_\nu^*$.

## V.3. **Propriété de stricte localisabilité.**

Un espace $(F, \mathbf{F}, \nu)$ est dit *strictement localisable* (S. L.) si il existe un concassage qui soit une partition de F.

Notons que si $(F, \mathbf{F}, \nu)$ est concassable et vérifie (P. F.) alors $(F, \mathbf{F}_\nu^*, \nu_*)$ vérifie (C), (P. F.) et (S. L.) (cf. V.2).

Lorsque (F, **F**, $\nu$) vérifie (C) et (P. F.), l'existence d'un relèvement (homomorphisme d'algèbre, unitaire, compatible pour l'ordre de $L_\infty(F, \mathbf{F}_\nu, \nu)$ dans $\mathscr{L}_\infty(F, \mathbf{F}_\nu, \nu)$) est équivalent à (S. L.) (cf. [*6*], th. 5, p. 48, et § 9, p. 17).

Il y a des espaces vérifiant (C) et (S. L.) et ne vérifiant ni (P. F.), ni la propriété de relèvement.

*Par exemple,* soit $F = [0, 1]^2$. Considérons sur F, le semi-anneau **S** constitué des « intervalles horizontaux » de la forme

$$A = \{ (x, y) \mid a < x \leqq b,\ y = c \},$$

$a$, $b$, $c$ variant dans $[0, 1]$ avec $a \leqq b$. La fonction $\nu(A) = b - a$ est une mesure sur **S**.

Considérons $\nu^*$ l'extension de Carathéodory de $\nu$ ([*11*] ch. 2, § 6). Notons encore $\nu$ la mesure obtenue sur la tribu **F** des ensembles $\nu^*$-mesurables. (F, **F**, $\nu$) vérifie (C) et (S. L.).

Si $B \subset F$ est tel que B coupe $F_y (= [0, 1] \times \{ y \})$ suivant un ensemble $\nu$-mesurable pour tout $y$ alors B est $\nu$-mesurable et si de plus $B \cap F_y \neq \emptyset$ pour une quantité plus que dénombrable de $y$ alors $\nu(B) = +\infty$.

Il s'ensuit que $\{ 0 \} \times [0, 1]$ est mesurable de mesure infinie et ne contient pas d'ensemble intégrable de mesure non nulle.

Donc (F, **F**, $\nu$) ne vérifie pas (P. F.).

Montrons que (F, **F**, $\nu$) n'a pas de relèvement.

Soit $\rho$ un tel relèvement. Les indicatrices étant relevées suivant des indicatrices, on a $\rho(\dot{1}_{F_y}) = 1_{A_y}$ et $\{ A_y \mid y \in [0, 1] \}$ est une famille disjointe d'éléments de **F**.

Posons pour tout $y \in [0, 1]$, $B_y = A_y \cap F_y$. On a $\dot{1}_{B_y} = 1_{F_y}$ $\nu$-p. p.

Posons $A' = \cup \{ B_y \mid y \in [0, 1] \}$ et soit $1_A = \rho(\dot{1}_{A'})$. On a $1_A = 1_{A'}$ $\nu$-p. p. et donc $A \cap F_y = A' \cap F_y = B_y$ sauf peut être pour une quantité dénombrable de $y$ pour lesquelles on a seulement $1_{A \cap F_y} = 1_{A' \cap F_y}$ $\nu$-p. p.

Soit $M = \{ y \mid A \cap F_y = A' \cap F_y \}$. ($N = [0, 1] \setminus M$ est dénombrable).

Choisissons un point $t_y$ dans chaque $F_y \cap A$ et posons

$$C = \{ t_y \mid y \in [0, 1] \}, \qquad D = A \setminus C.$$

On a :

$$1_{A \cap A_y} = \rho(\dot{1}_{A \cap F_y}) = \rho(\dot{1}_{A \cap F_y \cap D}) = \rho(\dot{1}_D)\rho(\dot{1}_{A \cap F_y}) = \rho(\dot{1}_D) 1_{A \cap A_y}$$

$\rho(\dot{1}_D)$ vaut alors 1 sur $A \cap F_y$ pour $y \in M$ et vaut 1 $\nu$-p. p. sur $A \cap F_y$ si $y \notin M$.

On a alors $1_D = 1_A$ sur A $\nu$-p. p. ce qui est contradictoire avec le fait que $\nu(A \setminus D) = \nu(C) = +\infty$.

Jean Saint-Pierre [9] donne un théorème de désintégration pour une mesure $\lambda$ sur un produit $U \times T$ où U est un espace topologique séparé et T un espace abstrait muni d'une tribu **T**. L'hypothèse faite sur $(T, \mathbf{T}_\mu, \mu)$ où $\mu$ est la projection de $\lambda$ sur T est que l'espace vérifie (S. L.). Comme la démonstration utilise un relèvement sur T, l'hypothèse (S. L.) n'est donc pas suffisante. En vérité, si on veut utiliser le résultat de [6] (th. 5, p. 48) comme il est fait dans [9], il faut supposer que $(T, \mathbf{T}_\mu, \mu)$ vérifie (C) et (P. F.) en plus de (S. L.).

En deuxième lieu, la projection $\nu$ de $\lambda$ sur U est supposée de Radon. Cette hypothèse est utilisée pour montrer que les mesures $\lambda(. \times B)$ sont de Radon avec $\mu(B) < \infty$. La démonstration, si elle est valable pour $\lambda$ bornée ne l'est plus pour $\lambda$ non bornée. (Si on suppose l'existence d'un cardinal mesurable X, on peut considérer la mesure de dénombrement $\lambda$ sur P(X) qui est une mesure de Radon pour X muni de la topologie discrète. Si $\lambda'$ est une mesure à valeurs dans $\{0, 1\}$ non triviale ne chargeant pas les points, on a $\lambda' < \lambda$ et $\lambda'$ n'est pas de Radon).

Ce qui vient d'être dit permet de voir que le théorème III.2.1 est bien une généralisation du résultat de Jean Saint-Pierre. (Voir la dernière remarque du V.1).

## V.4. Systèmes compacts. Généralisation du théorème III.2.1.

Soit E un ensemble. Nous appellerons système compact une famille **C** de parties de E telle que

1) $\phi \in \mathbf{C}$,

2) **C** est stable pour les unions finies et les intersections de collections finies non vide.

3) **C** est une famille semi-compacte. (Pour toute sous famille dénombrable $(C_n)$, vérifiant $\bigcap_{i=1}^{p} C_i \neq \emptyset$ pour tout $p$ alors $\cap C_n \neq \emptyset$).

4) Pour tout $C \in \mathbf{C}$ et tout $C_1$, $C_2 \in \mathbf{C} \cap C$ vérifiant $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, il existe $C'_1$, $C'_2 \in \mathbf{C} \cap C$ vérifiant

$$(C \setminus C'_1) \cap (C \setminus C'_2) = \emptyset \text{ et } C_i \subset C \setminus C'_i \qquad i = 1, 2.$$

Cette définition s'inspire de celle de Jirina [7]. Dans [7] il n'est pas fait l'hypothèse de stabilité pour les intersections finies mais les exemples donnés la vérifie. Ne pas faire cette hypothèse a conduit Jirina à donner une propriété de séparation semblable à 4) mais plus complexe.

Le lecteur curieux vérifiera que les démonstrations qui suivent restent valables avec la définition de Jirina.

THÉORÈME V.4.1. — *Soient* $(E, \mathbf{E})$, $(F, \mathbf{F})$, *deux espaces mesurables,* $\pi$ *une bimesure définie sur* $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$. *Si* $(F, \mathbf{F}, \nu)$ *est concassable et si il existe un système compact* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{E}$ *tel que pour tout* B $\nu$-*intégrable,* $\mu_B$ *soit* $\mathbf{C}$-*tendue et que pour tout* $C \in \mathbf{C}$, *on ait* $\sigma(\mathbf{C} \cap C) = \mathbf{E} \cap C$ *alors : il existe une désintégration* P *de* $\pi$, $\nu$-*loc. mes., régulière, vérifiant* $P(\,.\,, y)$ *est* $\mathbf{C}$-*tendue pour tout* $y \in F$.

*Indications de démonstration.* — On se ramène au cas $\pi$ fini non nul et on applique alors le théorème de Jirina [7] (théorème signalé en fin d'article — added in proof — dont la démonstration devait faire l'objet d'une note qui ne semble pas avoir parue). Donnons ici le schéma d'une démonstration du théorème de Jirina. Tout d'abord, on énonce une extension de 3.1 de [7].

LEMME V.4.2. — *Si* $(X, \mathbf{X})$ *est un espace mesurable muni d'une fonction réelle* $\theta$ *sur* $\mathbf{X}$, *positive, additive, bornée, et d'un système compact* $\mathbf{C}$ *inclus dans* $\mathbf{X}$ *tel que* $\sigma(\mathbf{C}) = \mathbf{X}$, *si on pose* $\mathbf{G} = \{ X \setminus C \mid C \in \mathbf{C} \} \cup \{ \phi \}$

$\theta_*(G) = \sup \{ \theta(C) \mid C \in \mathbf{C},\ C \subset G \}$ *pour tout* $G \in \mathbf{G}$,

$\theta^*(A) = \inf \{ \theta_*(G) \mid G \in \mathbf{G},\ G \supset A \}$ *pour tout* $A \subset X$,

*alors* $\theta^*$ *est une mesure extérieure,* $\mathbf{X}$ *est inclus dans l'ensemble des parties* $\theta^*$-*mesurables,* $\theta^*(X) \leqq \theta(X)$ *et* $\theta^*_{|\mathbf{X}}$ *est* $\mathbf{C}$-*tendue. Si* $X \in \mathbf{C}$ *on a* $\theta^*(X) = \theta(X)$.

On montre que $\theta_*$ est sous $\sigma$-additive en appliquant la propriété 4) des systèmes compacts étendue par récurrence au cas de $n$ « compacts » et en remarquant que si un élément de $\mathbf{C}$ est inclus dans une réunion dénombrable d'éléments de $\mathbf{G}$, il est inclus dans une réunion finie.

$\theta^*$ est alors une mesure extérieure : $\theta^*$ est évidemment croissante et si $A = \cup A_n$ et $\varepsilon > 0$, pour chaque $A_n$ on a un élément $G_n$ de $\mathbf{G}$ contenant $A_n$ tel que $\theta^*(A_n) \geqq \theta_*(G_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ donc

$$\Sigma\theta^*(A_n) \geqq \Sigma\theta_*(G_n) + \varepsilon \geqq \theta_*(\cup G_n) + \varepsilon \geqq \theta^*(A) + \varepsilon\,.$$

De plus $\theta^*(\phi) = \theta_*(\phi) = 0$.

On montre alors comme dans le lemme III.2.2 que $\mathbf{G}$ est inclus dans l'ensemble des parties $\theta^*$-mesurables.

On en déduit que $\theta^*$ restreinte à $\mathbf{X} = \sigma(\mathbf{C}) = \sigma(\mathbf{G})$ est une mesure $\mathbf{C}$-tendue vérifiant $\theta^*(X) = \theta_*(X) \leqq \theta(X)$.

Évidemment si $X \in \mathbf{C}$, $\theta^*(X) = \theta(X)$. c. q. f. d.

— Passons à la démonstration du théorème.

Soit $(C_n)$ une famille d'éléments de $\mathbf{C}$ deux à deux disjoints telle que $\mu(E \setminus \cup C_n) = 0$.

Posons alors $E' = \cup C_n$, $\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cap E'$, $\mathbf{C}' = \{ C \in \mathbf{C} \mid C \subset E' \}$. On a $\sigma(\mathbf{C}') = \mathbf{E}'$ et $\mathbf{C}'$ est un système compact dans $\mathbf{E}'$.

Soit $Q(A, y) = \rho(\dot{g}_A)(y)$ pour tout $A \in \mathbf{E}'$, $y \in F$ où $\rho$ est un relèvement sur $(F, \mathbf{F}, \nu)$ et $\dot{g}_A$ la classe des densités de Radon Nikodym de $\nu_A$ par rapport à $\nu$.

Pour chaque $y \in F$, on applique le lemme V.4.2 à $(E', \mathbf{E}')$ et $Q(., y)$. On obtient une application $Q^* : \mathbf{E}' \times F \to [0, 1]$ vérifiant : $Q^*(., y)$ est une mesure $\mathbf{C}'$-tendue sur $E'$ et $Q^*(E', y) \leqq Q(E', y) = 1$ pour tout $y$.

On démontre, comme dans le théorème III.2.1 que pour tout $A \in E'$, $Q^*(A, .)$ est $\nu$-mesurable, que pour tout $A \in \mathbf{E}'$ et $B\nu$-intégrable

$$\int_B d\nu(y) Q^*(A, y) = \pi(A, B)$$

et que $Q^*(E, y) = 1$ $\nu$-p. p. Soit $N = \{ y \mid Q^*(E', y) < 1 \}$.

On pose, alors, pour tout $A \in \mathbf{E}$, $y \in F$ :

$$\begin{aligned} P(A, y) &= Q^*(A \cap E', y) && \text{si } y \notin N \\ P(A, y) &= \mu(A)/\mu(E) && \text{si } y \in N \end{aligned} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Récemment J. Pachl [*12*] a amélioré le résultat du théorème dans le cas où $\pi(E, F) = 1$. Si on suppose que $\mathbf{C}$ est stable pour les unions finies et les intersections dénombrables ($\phi, E \in \mathbf{C}$) alors on peut supprimer la condition de séparation 4) sur $\mathbf{C}$.

En vérité notre démonstration n'utilise pas à fond les propriétés de Q. Pour tout $y \in F$, la fonction $Q(., y)$ définie sur le treillis semi-compact $\mathbf{C}' \cup \{ E' \}$, vérifie les propriétés :

1) $Q(., y)$ est croissante,
2) $Q(., y)$ est bornée,
3) $Q(., y)$ est modulaire (c'est-à-dire, pour tout $C, C' \in \mathbf{C}'$,

$$Q(C \cup C', y) + Q(C \cap C', y) = Q(C, y) + Q(C', y)).$$

Pachl montre que pour une telle fonction, il existe une fonction

$$Q'(., y) \geqq Q(., y)$$

vérifiant 1), 2), 3) et de plus :

$$Q'(E', y) = Q(E', y) \qquad \text{et} \qquad Q'(C, y) + Q'_*(E' \setminus C, y) = Q'(E', y)$$

pour tout $C \in \mathbf{C}'$.

Cette dernière propriété permet à Pachl d'étendre $Q'(.,y)$ en une mesure sur une tribu contenant $\sigma(\mathbf{C}')$ par une simple approximation par l'intérieure, ce qui lui fournit une désintégration (cf. [*12*], th. 3.5).

## V.5. **Jonction avec les notions de Bourbaki.**

Elle se fait grâce au théorème 2, page 46 [*2*].

Si E est un e. t. s., se donner une mesure de Radon $\mu$ sur $\mathbf{B}(E)$ équivaut à se donner une mesure $\tilde{\mu}$ au sens de Bourbaki.

On dit qu'une application $f$ de E dans un e. t. s. F est $\mu$-mesurable au sens de Lusin (L-$\mu$-mes.) si pour tout A $\mu$-intégrable et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ et $f_{|K_\varepsilon}$ soit continue.

Cette définition équivaut à : pour tout K compact il existe une partition de K en une suite de compacts $(K_n)$ et d'une ensemble $\mu$-négligeable telle que $f_{|K_n}$ soit continue. (Ce qui constitue la $\tilde{\mu}$-mesurabilité au sens de Bourbaki).

Si on note $B(\tilde{\mu})$ la tribu des ensembles $\tilde{\mu}$-mesurables c'est-à-dire les ensembles tels que leur indicatrice soit $\tilde{\mu}$-mesurable, on a $B(\tilde{\mu}) = B(E)^*_\mu$. (Les ensembles $\tilde{\mu}$-mesurables sont exactement les ensembles $\mu$-localement mesurables).

Soit $f$ une fonction à valeurs dans F, e. t. s. Si $f$ est L-$\mu$-mes. alors $f$ est $\mu_*$-mesurable (cf. V.2). La réciproque est vraie si F est plongeable dans un espace souslinien au sens de Bourbaki [*1*] (théorème de Lusin).

On sait que E possède un concassage au sens de Bourbaki (c'est-à-dire une famille $(K_i)$ de compacts disjoints telle que pour tout $x$, il existe un voisinage ouvert V de $x$ et une partie dénombrable J de I vérifiant

$$\mu\Big(V \setminus \bigcup_{i \in J} K_i\Big) = 0$$

avec en prime $\tilde{\mu}(E / \cup K_i) = 0$).

Il est facile de voir que c'est un concassage à notre sens.

Nous sommes en mesure d'énoncer un corollaire du théorème IV.3.1 qui généralise la proposition 13, page 39 de Bourbaki [*2*]. (Voir cependant la remarque 2) suivant le corollaire).

COROLLAIRE V.5.1. — *Soient* E *un e. t. s.,* $\mu$ *une mesure de Radon sur* E, T *une application L-*$\mu$*-mes. de* E *dans* F *e. t. s. (donc* $\mu_*$*-mesurable),* $\pi$ *la bimesure définie sur* $\mathbf{B}(E) \times \mathbf{B}(F)$ *par* $\pi(A,B) = \mu_*(A \cap T^{-1}(B))$. *On suppose que dans un premier cas* $\nu$ *est de Radon et les compacts de* F *sont métrisables et dans un deuxième cas que* $(F, \mathbf{F}, \nu)$ *est concassable et les compacts de* E *sont métrisables. Alors, dans les deux cas, il existe une désintégration* *de $\pi$, $\nu$-loc. mes. (donc L-$\nu$-mes. dans le premier cas),* T*-propre, constituée de mesures de Radon.*

*Démonstration.* — On se ramène au théorème IV.3.1 si on prouve qu'il existe un concassage $(F_i)$ tel que pour tout $i$, $\mathbf{F}_i$ soit dén. sép. Dans le premier cas, $\nu$ étant de Radon, il existe un concassage constitué de compacts et ces compacts sont métrisables. On a donc la propriété voulue. Dans le deuxième cas, soit $(F_i')$, un concassage de F. $T^{-1}(F_i')$ est $\mu_*$-intégrable. $\mu_*$ étant $\mathbf{K}$(E)-tendue, il existe une partition de $T^{-1}(F_i')$ en une famille de compacts (métrisables) $(K_n^i)_n$ et d'un ensemble $\mu_*$-négligeable telle que $T_{|K_n^i}$ soit continue pour tout $n$. L'espace $T\left(\bigcup_n K_n^i\right)$ est alors souslinien comme image continue de $\bigcup_n K_n^i$ qui est polonais lorsqu'on le munit de la topologie somme des topologies des $K_n$. On pose $F_i = T\left(\bigcup_n K_n^i\right)$ et il est facile de voir que $(F_i)$ est un concassage et qu'il vérifie la propriété voulue.

*Remarques.* — 1) Si dans les hypothèses, on suppose que T est $\tilde{\mu}$-propre au sens de Bourbaki (c'est-à-dire $\nu$ est localement bornée), $\nu$ est alors automatiquement une mesure de Radon, il suffit alors de supposer dans le premier cas (resp. 2$^{\text{ième}}$ cas) que les compacts de F (resp. E) sont métrisables. La désintégration est alors L-$\nu$-mes. dans les deux cas.

2) Si on se place dans le deuxième cas en supposant en outre : T $\mu$-propre et $\mu\sigma$-finie (ce qui constitue des hypothèses un peu plus larges que celles de [*2*] propr. 13, p. 39 dans lesquelles $\mu$ est modérée) la désintégration peut être choisie $\mathbf{B}$(F)-mesurable si on lui demande, au lieu de satisfaire (P), de ne satisfaire que : $P(.,y)$ est portée par $T^{-1}(y)$ et $P(E,y) = 1$ $\nu$-p. p.

En effet, il existe sur E un concassage $(K_n)_{n\in N}$. Alors $\mathbf{B}(\cup K_n)$ est séparable. Soit $(A_n)$ une algèbre dénombrable engendrant $\mathbf{B}(\cup K_n)$. Il existe alors un ensemble $N \in \mathbf{B}(F)$, $\nu$-nul tel que $P(A_n, .)_{|F\setminus N}$ soit $\mathbf{B}(F \setminus N)$-mesurable pour tout $n$. Posons alors pour tout $A \in \mathbf{B}(E)$.

$$\begin{aligned} P'(A, y) &= P(A \cap (\cup K_n), y) && \text{si } y \notin N, \\ P'(A, y) &= 0 && \text{si } y \in N. \end{aligned}$$

P′ est une désintégration de $\pi$ vérifiant la condition (P) affaiblie et telle que $P'(A, .)$ soit $\mathbf{B}$(F)-mesurable pour tout $A \in \mathbf{B}(E)$.

Pour $f \geqq 0$, $\mathbf{B}$(E)-mesurable, on obtient alors une conclusion plus forte que celle de [*2*] : $y \to \int P(dx, y) f(x)$ est $\mathbf{B}$(F)-mesurable mais pour $f \geqq 0$, universellement mesurable au sens de [2] nous n'obtenons que la $\nu$-mesurabilité de $y \rightarrow \int P(dx, y)f(x)$. Nous n'avons pas su dire si cette application est ou non universellement mesurable au sens de [2].

REMERCIEMENTS

Je remercie C. Dellacherie pour son aide et ses maintes suggestions ayant permis de mener à bien ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, *Topologie Générale*, Chap. 9, 3e éd., Hermann, Paris, 1969.
[2] BOURBAKI, *Intégration*, Chap. 9, Hermann, Paris, 1969.
[3] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, Chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1975; Chap. 5 à 8, *à paraître*, Hermann, Paris.
[4] R. P. HALMOS, *Measure theory*, Van Nostrand, 1950.
[5] J. HOFFMANN-JORGENSEN, Existence of conditional probabilities, *Math. Scand.*, t. **28**, 1971, p. 257-264.
[6] A. et C. IONESCU-TULCEA, *Topic in the theory of Lifting*, Springer Verlag, Berlin, 1969.
[7] M. JIRINA, On regular conditional probabilities, *Journal math. tchécoslovaque*, t. **9**, n° 84, 1959, p. 445-450.
[8] J. PELLAUMAIL, Application de l'existence d'un relèvement à un théorème de désintégration des mesures. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **VIII**, n° 3, 1972, p. 211-215.
[9] J. SAINT-PIERRE, Désintégration d'une mesure non bornée, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **XI**, n° 3, 1975, p. 275-286.
[10] M. VALADIER, Désintégration d'une mesure sur un produit, *C. R. Acad. Sci.*, (Paris), t. **276**, 3 janvier 1973, 34 Sie A.
[11] A. C. ZAANEN, *Integration*, North Holland, Amsterdam, 1967.
[12] JAN K. PACHL, Disintegration and compact measure, *Math Scand.*, t. **43**, 1978, p. 157-168.

*(Manuscrit reçu le 30 octobre 1980)*