ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Lois stables dans un groupe

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 1 (1981), p. 51-61

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_1_51_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 1, 1981, p. 51-61. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Lois stables dans un groupe

par

A. TORTRAT

Laboratoire de Calcul de Probabilité,
Tour 55, 3[e] étage, 4, Place Jussieu, 75005 Paris-V[e],
Laboratoire associé au C. N. R. S., n° 224
85, rue de Paris 92190 Meudon (France)

RÉSUMÉ. — Nous donnons des contre-exemples à trois propriétés des lois stables dans R (: l'exposant p est ≤ 2, une loi 2-strictement stable est gaussienne, une loi p-stable est centrable si $p \neq 1$).

Les lois des classes que nous définissons ne sont pas indéfiniment divisibles. Nous prouvons la loi de zéro-un (pour un translaté de sous-groupe normal) pour une loi stable d'exposant $p > 0$ quelconque, avec une définition plus faible que toutes celles connues dans le cas vectoriel.

SUMMARY. — We give counter-examples to three properties of stable laws in R (: the exponent is ≤ 2, a strictly 2-stable law is gaussian, a p-stable law is centrable if $p \neq 1$). The laws such defined are not infinitely divisible. We prove the zero-one (for a translated normal subgroup) for all stable laws, with weaker definition than all that known in the linear case.

1. INTRODUCTION

Si beaucoup de lois gaussiennes sont stables (dans le cas d'un groupe abélien, mais aussi pour le cas non abélien, cf. la remarque 3 finale), on peut dire qu'il y a beaucoup plus de lois 2-stables que de lois gaussiennes, et ceci bien que la loi de zéro-un.

$$(1) \qquad \mu(Gx) = 0 \text{ ou } 1\,, \qquad G \text{ sous-groupe (normal)} \in \mathbb{B}\,,$$

soit « trivialement » vérifiée par des lois plus générales que les lois stables (cf. [*4*] et [*5*]).

Cela est assuré par ce qui suit si X admet un tore comme groupe facteur, et tient à ce que les lois des trois classes dont nous allons montrer l'existence ne sont pas indéfiniment divisibles.

DÉFINITION (1). — La loi μ est dite stable d'exposant rationnel $p = m/l$ (réduit) > 0, si, $n \cdot \mu$ désignant l'image de la loi μ par l'application $x \to x^n$, et $\delta(a)$ la loi de Dirac en $a \in X$, on a

$$(2) \qquad n' \cdot \mu = \mu^{n''}\delta(a_n)\,, \qquad n' = n^l,\ n'' = n^m,\ n = 2, 3, \ldots$$

La loi μ est dite stable d'exposant p non rationnel si μ^t est définie pour $t = n^p$ $(n \geq 2)$ et $t = n^p - 2$ (lorsque $n^p > 2$) avec $\mu^{n^p} = \mu^2\mu^{n^p-2}$, et vérifie

$$(2') \qquad n \cdot \mu = \mu^{n^p}\delta(a_n)\,, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

μ est dite strictement stable (ou stable et centrée) si dans (2) ou (2') on peut prendre $a_n = e$ unité de l'espace X. Elle est dite « centrable » si une translation la rend strictement stable (pour la droite réelle R, cela est toujours vrai si $p \neq 1$).

On suppose que $(X, \mathbb{B})$ est un groupe mesurable $(: x \times x' \to xx'^{-1}$ est $\mathbb{B} \times \mathbb{B} - \mathbb{B}$ mesurable) ou un groupe topologique (séparé donc complètement régulier) muni de sa tribu borélienne $\mathbb{B}$, la loi μ étant alors supposée τ-régulière : alors vaut la formule de Fubini (et beaucoup plus dans le cas topologique : $\int f(xy)\mu(dy)$ est une fonction semi-continue — supérieurement ou inférieurement, et bornée — avec f).

Comme on va le voir p peut dans certains cas prendre toutes les valeurs > 0.

LEMME 1. — Les seules lois μ p-stables ($p > 0$) indéfiniment divisibles ($\mu^{1/k}$ existe pour chaque entier $k \geq 2$) sur la circonférence Γ sont les enroulées de lois indéfiniment divisibles de R, de *f.c.* $\phi(t)$

$$(3) \qquad \operatorname{Log}\phi(t) = iat - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_{[-\pi,\pi[} [e^{itx} - 1 - itx]M(dx)\,.$$

(1) On comparera ces définitions avec celle de P. BALPI, dans « Lois stables sur les déplacements de R^d », *Lecture notes*, n° 706, p. 1-9.

En conséquence, on a $0 < p \leq 2$ et pour $p = 2$ ces lois sont normales ([2]), et centrables si $p \neq 1$.

Preuve. — μ n'a pas de facteur idempotent. C'est clair dans le cas de (2') où les moments sont $\neq 0$. Dans le cas de (2) aussi, car les $u_{n'}(n' = n^l)$ sont tous $\neq 0$, et si μ est invariante par la translation $e^{2\pi i/k}$ (k entier ≥ 2), $u_{n'}$ doit être nul pour tout n non-multiple de k.

Alors (cf. [*3*]) μ admet la représentation de Fourier

$$\operatorname{Log} \hat{\mu}(n) = ina - \frac{\sigma^2}{2} n^2 + \int_{[-\pi,\pi[} [e^{inx} - 1 - inx] dM .$$

d'où l'affirmation de l'énoncé que μ est enroulée de la loi définie par (3). En particulier on a

$$\operatorname{Log} | \hat{\mu}(n') | = - \frac{\sigma^2}{2} n'^2 + \int [\cos n'x - 1] dM .$$

Or

$$\int [1 - \cos n'x] dM \leq \frac{1}{2} n'^2 \int x^2 dM$$

ne peut être $\geq n'^p \operatorname{Log}(1/\rho) - \sigma^2 n'^2/2$ pour tout n', si $p > 2$, et pour $p = 2\,(n' = n)$ ne peut égaler $(\operatorname{Log} 1/\rho - \sigma^2/2)n^2$ que si M est identiquement nul et $\operatorname{Log} \rho = - \dfrac{\sigma^2}{2}$.

En effet

$$bn^2 = \int [1 - \cos nx] dM \leq 2M\{ |x| > \eta \} + \frac{n^2}{2} \int_{|x| \leq \eta} x^2 dM$$

implique

$$b \leq \frac{2}{n^2} M\{ |x| > \eta \} + \frac{1}{2} \varepsilon(\eta) ,$$

donc $b = 0$.

2. LOIS STABLES SUR LA CIRCONFÉRENCE χ

2.1. Pour tout $p > 0$ et $0 < \rho \leq 1/e$, la suite $u_n = \rho^{n^p}$ est une suite de moments.

Preuve. — Pour $p \leq 2$, la loi en question est l'enroulée de la loi de R de *f. c.* ρ^{t^p} ($t > 0$). Soit donc $p > 2$ et posons

(4) $u_n = \rho^{n^2} - u'_n$ avec $0 < u'_n = \rho^{n^2}(1 - \rho^{n^p - n^2}) \leq \rho^{n^2}$, $u'_1 = 0$.

([2]) Pour $p < 2$, nous ne savons pas si μ est enroulée d'une loi stable, si on peut dans (3) faire $dM = C dx / |x|^{1+p}$ (C pour $x > 0$, C' pour $x < 0$). Dans le cas strictement stable la question est : peut-on avoir les moments $\phi(n) = u_1^n$ avec $u_1 = e^{-c+ib}$,

$$|b| \leq \pi \qquad \text{et} \qquad |b|/c > \operatorname{tg} p\pi/2$$

a) Posons $\rho = e^{-\sigma^2/2}$. La « densité » $f_\sigma(t)$ $(-\pi < t \leq \pi)$ est donnée par

$$2\pi f_\sigma(t) = 2\pi g_\sigma(t) - 2\sum_1^\infty u'_n \cos nt\,, \qquad \text{avec} \quad g_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-2n\pi)^2}{2\sigma^2}}$$

Posons $a_k = e^{-(2k+1)^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}\sigma$,

$$A_\sigma = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k = 2\sum_0^\infty a_k\,, \quad A'_\sigma = A_\sigma - a_0 = a_0 + 2\sum_1^\infty a_k \quad (a_0 = a_{-1})$$

et

$$c(\sigma) = \min_t g_\sigma(t)\,.$$

On a

$$g_\sigma(\pi) = A_\sigma \geq c(\sigma) \geq A'_\sigma \geq a_0\,.$$

En effet on a

$$e^{(t-2n\pi)^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}\sigma \geq a_{n-1} \text{ ou } a_n$$

suivant que n est < 0 ou ≥ 0.

b) Nous majorons $S(t) = 2\sum_2^\infty u'_n \cos nt$ par

$$2\sum_2^\infty \rho^{n^2} = 2\rho^4(1 + \rho^{-5} + \rho^{-(4^2-2^2)} + \ldots) \leq 2\rho^4/(1 - \rho^5)\,.$$

Pour $\sigma = \sqrt{2}$, soit $\rho = 1/e$, la minoration $c(\sigma) \geq a_0$ suffit pour prouver $f_\sigma(t) \geq 0$, car on a

$$\frac{2}{e^4 - e^{-1}} \leq 2\pi a_0(\sqrt{2}) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2/4} \gtreqless 1{,}77\, e^{-2{,}467}\,.$$

Comme $\rho^4/(1 - \rho^5)$ décroît avec ρ et $a_0(\sigma)$ croît lorsque σ croît de 0 à π, $f_\sigma \geq 0$ est assuré pour $\sqrt{2} \leq \sigma \leq \pi$.

Pour $\sigma > \pi^2$ on a encore

$$\frac{2}{e^{2\sigma^2} - e^{-\sigma^2/2}} \leq 2\pi a_0(\sigma) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\pi^2/2\sigma^2}/\sigma$$

car

$$\sigma > \pi^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \leq 2\sigma^2 - \frac{\pi^2}{2\pi^4} \leq 2\sigma^2 - \frac{\pi^2}{2\sigma^2}$$
$$\leq e^{-2\sigma^2-\pi^2/2\sigma^2} - 1 \leq e^{2\sigma^2-\pi^2/2\sigma^2} - e^{-(\sigma 2+\pi^2/\sigma^2)/2}$$

Aussi bien on voit par convolution que $f_\sigma(t)$ reste ≥ 0, car le demi-groupe additif engendré par $[2, \pi^2]$ égale $[2, \infty]$.

c) Pour p non-rationnel, la loi μ (de moments u_n) ainsi définie est bien strictement stable au sens de notre définition : il suffit de s'assurer que μ^{m^p-2} existe, comme loi. Or c'est la loi obtenue en remplaçant, dans ce qui précède, ρ par $\rho' = \rho^{m^p-2}$ (avec $t = m^p - 2 > 0$). Puisque $\rho' < \rho \leq \frac{1}{e}$, cela suit de la première affirmation du lemme démontrée en *a)* et *b)* ci-dessus.

Remarque. — Nous n'affirmons pas $f_\sigma \geq 0$ pour tout $\sigma < \sqrt{2}$, et cela est certainement faux pour σ assez petit (quelle est la valeur limite, fonction de p ?). Ce serait en effet dire μ indéfiniment divisible puisque $\mu^{1/k}$ est obtenue avec la valeur $\rho^{1/k}$ au lieu de ρ, qui $\uparrow 1$ lorsque $k \uparrow \infty$.

Question. — *Existe-t-il d'autres groupes abéliens (compacts) que les produits (quelconques) de circonférences, possédant des lois stables d'exposants > 2 ? Lesquels ?*

2.2. Il existe (sur Γ) des lois 2-strictement stables non gaussiennes au sens de Bernstein (3).

Posons

$$g_{\sigma,b}(t) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_1^\infty e^{-n^2\sigma^2/2}\cos(nt - n^2 b)\right]$$

pour la « densité » de la « loi » de moments

$$u_n = u_1^{n^2},\ n \geq 2,\ u_1 = e^{-\frac{\sigma^2}{2}+ib},\ |b| \leq \pi .$$

Cette densité est ≥ 0 sur un fermé F_σ de valeurs de b, non vide car son minimum en t est une fonction continue de u_1. F_σ contient donc un plus grand intervalle $\{ b : |b| \leq b_\sigma \}$. Plus précisément on a

$$2\pi(g_\sigma(t, b) - g_\sigma(t, 0)) = 4\sum_1^\infty e^{-n^2\sigma^2/2}\sin\frac{n^2 b}{2}\sin\left(nt - n^2\frac{b}{2}\right),$$

$$\text{en } |\cdot| \leq 4\sum_1^\infty e^{-n^2\sigma^2/2} \overset{\text{def}}{=} 4\,S(\sigma).$$

(3) Nous donnons un résultat plus précis que ce fait brut, l'existence, dont nous devons l'argument à M. J. P. Kahane.

Par convolution on voit que b_σ croît avec σ et $kF_{\sigma,\sqrt{k}} \subset F_\sigma$ donc

$$kb_{\sigma/\sqrt{k}} \leq b_\sigma . \tag{5}$$

(5) *ne peut être une égalité (pour un σ et tout k)* car $u_1^{1/k} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{k}}\right)^2 + i\frac{b}{k}}$ serait le premier moment d'une loi 2-strictement stable (pour tout k) si u_1 en est un. La loi μ de densité g_σ serait indéfiniment divisible donc normale suivant le lemme 1.

Pour $\sigma \geq \pi$, $b_\sigma = \pi$: toute valeur de b est permise. Ainsi $b(\pi/\sqrt{k}) < \frac{\pi}{k}$, pour un $k \geq 2$ au moins. En effet dire $e^{-\pi^2/2\sigma^2}/\pi\sqrt{2\pi} = 1/\pi\sqrt{2\pi e} \geq 2S/\pi$ équivaut à $S \leq 1/2\sqrt{2\pi e}$ (avec $S = S(\pi)$). Or on a

$$S = \sum_1^\infty e^{-n^2\pi^2/2} \leq e^{-\pi^2/2} + e^{-4\pi^2/2}/(1 - e^{-5\pi^2/2}) \neq e^{-\pi^2/2}$$

$$= e^{-4,934} \ll 1/2\sqrt{2\pi e} \sim 1/5\sqrt{e}.$$

$\left(\text{On a utilisé } \sum_2^\infty \rho^{n^2} \leq \rho^4(1 - \rho^5)\right)$.

Les lois μ ainsi obtenues ne sont pas non plus gaussiennes au sens de Bernstein (cf. [*1*], [*5*]) car celles-ci sont ou normales, ou périodiques : ont des moments nuls.

2.3. Il existe sur Γ des lois p strictement stables ($p < 2$, $p \neq 1$) qui ne sont pas enroulées de lois stables de R.

La preuve est la même que pour $p = 2$:

Soit $u_n = u_1^{n^p}$ ($n > 0$) avec $u_1 = e^{-c+ib}$, et $g_{c,b}$ la « densité » donnée comme ci-dessus, avec n^p au lieu de n^2 (et c au lieu de $\sigma^2/2$).

On sait que pour $|b| \leq c \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}p$, $e^{-t^p(c-ib)}$ ($t > 0$) est la *f. c.* d'une loi de R de densité $\pi(t)$ dont l'enroulée est donc $g_{c,b}(t)$. Ainsi pour $c \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}p \geq \pi$ il n'y a aucune restriction à l'argument de u_1.

Pour $b = c \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}p$ (par exemple) on a affaire à la loi stable unilatère; le plus petit intervalle contenant son support est R si $p > 1$, et $[0, \infty[$ si $p < 1$ car en ce dernier cas on a

$$\operatorname{Log} u_n = \int_0^\infty (e^{inx} - 1)\frac{Cdx}{x^{1+p}}.$$

Ces lois sont unimodales. La densité continue $\pi(t)$ ne peut donc s'annuler qu'en 0 pour $p < 1$, et nulle part si $p > 1$, et la densité enroulée $g_{c,b}(t)$ est partout $\neq 0$, son minimum est > 0 pour $|b| = c \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} p$ et l'est donc encore pour des valeurs un peu plus grandes de $|b|$ $\left(\text{supposant } c \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} p < \pi\right)$.

Mais nous ne savons plus dire lorsque $c \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} p < \pi$ (comme pour $p = 2$) si ces lois (et lesquelles ?) peuvent être indéfiniment divisibles : si $\operatorname{Log} u_n$ peut être représentée suivant (3) (avec $t = n$).

2.4. Il existe des lois 2-stables non centrables.

Les égalités entre arguments écrites ci-après, sont bien sûr à entendre « modulo 2π ».

LEMME 2. — Si une loi μ est p-stable ($p = m/l$), elle est centrable (en $e^{i\theta}$) si et seulement si on a (avec les notations de (2))

(6) $\quad u_{n'} = \rho^{n''} e^{ib_n}$ avec (6') $\quad b_n - n''b_1 = (n' - n'')\theta \qquad (\rho > 0)$.

Si $b_1 = 0$ (et $p \neq 1$), μ n'est centrée que si tous les moments $u_{n'}$ d'ordres $n' = n^l$ sont positifs.

Preuve. — Soit ζ une v. a. de loi μ vérifiant (2) avec $a_k = e^{i\theta_k}$.

On a

$$\zeta^{k'} \overset{\text{loi}}{=} \zeta_1 \ldots \zeta_{k''} e^{i\theta_k} \qquad (\text{les } \zeta_i \text{ indépendantes de loi } \mu)$$

donc

$$E\zeta^{n'k'} = (E\zeta^{n'})^{k''} e^{in'\theta_k}.$$

Prenant les modules et $n = 1$ on obtient $|u_{k'}| = \rho^{k''}$ (avec $\rho = |u_1|$), et pour les arguments

(7) $\quad b_{nk} = n'\theta_k + k''b_n \Rightarrow$ (7') $\quad b_{nk} - k'b_n = n''(b_k - k'b_1)$, $\quad n$ et $k \geq 1$.

(7') n'impose pas (6') sans l'hypothèse de centrage : si μ est centrable, posant $u_1 = e^{i\theta}\rho e^{i\gamma}$, on a

$$u_{n'} = e^{in'\theta}(\rho e^{i\gamma})^{n''}$$

soit

$$b_1 = \theta + \gamma \quad \text{et} \quad b_n = n'\theta + n''\gamma \Rightarrow b_n = (n' - n'')\theta + n''b_1$$

Nous prouverons l'existence de μ non centrable (pour $p = 2$) en trouvant une loi avec $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$.

LEMME 3. — Une loi 2-stable ne peut avoir ses premiers moments $u_1, \ldots, u_{k-1}$ positifs, avec $k \geq 3$ et u_k non positif (: $b_k \neq 0$) que si k est premier. De plus $b_n = 0$ pour n pair ou n produit de facteurs premiers $< k$, et

$$(8) \quad n = n_0 p_1, \ldots, p_{\mathrm{I}} \text{ avec } n_0 \text{ impair et } p_i \text{ premiers impairs} \geq k$$
$$\Rightarrow e^{ib_n} = \prod_{1}^{\mathrm{I}} \varepsilon_{p_i},$$

où les $\varepsilon_p = e^{ib} = \pm 1$ peuvent être choisis arbitrairement (tout p premier impair $\geq k$). On obtient ainsi toutes les lois 2-stables avec u_1 et $u_2 > 0$ mais non tous les $u_{n'}$ *possibles* (c'est-à-dire dont les moments satisfont aux relations (6) de stabilité).

Preuve. — *i*) (7′) assure

$$(9) \qquad b_{nk} - kb_n = n^2 b_k, \qquad b_{nk} - nb_k = k^2(b_n - nb_1).$$

Pour $2 \leq n < k$ on a donc $b_{nk} = n^2 b_k = nb_k$, soit

$$(10) \qquad n(n-1)b_k \equiv 0 \text{ (modulo } 2\pi), \qquad n < k.$$

Ainsi (faire $n = 2$)$b_k = \pi$ et $b_{nk} = 0$ pour n pair et π pour n impair ($n < k$).

ii) Plus généralement $b_{nm} = nb_m$ si $n < k$, donc $b_n = 0$ si n a tous ses facteurs premiers $< k$, et k est nécessairement premier (≥ 3 par hypothèse).

Soit p premier $\geq k$. (9) donne $n(n-1)b_p = p(p-1)b_n$, donc (prenant $n = 2$) $e^{ibp} = \varepsilon_p = \pm 1$. Soit $n = mp$. (9) *donne* $b_{mp} = p^2 b_m + mb_p$. On voit donc que $b_n = 0$ ou π, soit $e^{ib_n} = \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = \varepsilon_m \varepsilon_p$ si m est impair, ε_m si m est pair. Ainsi, vu $\varepsilon_{n_0} = 1$, $\varepsilon_n = 1$ si n est pair et sinon $\varepsilon_n = \Pi \varepsilon_p$, le produit des ε_p étant pris sur l'ensemble des facteurs premiers $\geq k$ de n, c'est (8).

LEMME 4. — Prenant $k = 3$, $\varepsilon_3 = -1$ et tous autres ε_p égaux à 1, $\rho = 1/e$ (soit $\sigma^2 = 2$), on obtient une loi 2-stable non centrable.

Preuve. — La densité de cette loi est donnée par

$$2\pi f(t) = 2\pi g_{\sqrt{2}}(t) - \mathrm{S}(t),$$

avec

$$\mathrm{S}(t) = 4 \sum_{n = 3^{2l+1}m} e^{-n^2} \cos nt \qquad (l = 0, 1, \ldots, m = 1, 2, \ldots),$$

car les u'_n de (4) valent $2e^{-n^2}$ lorsque l'exposant de 3 dans la décomposition (8) de n est impair (et sont nuls sinon).

On a donc, avec la même méthode de majoration de S qu'en 2.1 et 2.2.

$$|S(t)| \leq 4 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-9l^2} \leq \frac{4}{e^9}\left(1 + \frac{1}{e^{27}(1 - e^{-45})}\right).$$

Cette majoration est à comparer à $2\pi c(\sqrt{2}) \geq \sqrt{\pi}e^{-\pi^2/4}$, soit

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{e^{27}(1 - e^{-45})}\right)$$

à $e^{6,533}$. □

REMARQUE 2. — Il est clair qu'avec des valeurs de k assez grandes on obtiendrait des valeurs de σ arbitrairement petites. Il semble bien que, par continuité, on puisse de cette méthode déduire l'existence de lois stables non centrables d'exposant voisin de 2. Il est clair aussi que les lois de 2.2 et 2.4 sont autant de « contre-exemples » au théorème de Cramer-Lévy (cf. *un* tel contre-exemple, p. 359 de [*1*]).

3. LA LOI DE ZÉRO-UN

Dans [*5*] (cf. aussi [*4*]) nous nous sommes limités à l'exposant p rationnel, implicitement supposé ≤ 2, mais cela n'intervenait pas, et le § 2.1 montre que c'est une restriction, non nécessaire.

Nous reprenons la question pour compléter les résultats de [*5*] et en particulier couvrir complètement le résultat de Krakowiak qui doit (dans le cas vectoriel) supposer μ^t défini pour *des* t irrationnels (cf. [*5*]) *même pour un exposant p rationnel.* Nous nous limitons à la définition (moins restrictive) donnée dans l'introduction et seule utile pour obtenir (1).

THÉORÈME. — *i)* Si le groupe X est abélien, (1) vaut si (2) ou (2′) (suivant que p est rationnel ou non) sont vrais pour des n multiples de tout nombre premier (avec dans le 2^e^ cas $n^p \geq 1$).

ii) Si X n'est pas abélien, mais p rationnel, (1) vaut si (2), avec $a_n = e$, vaut pour des n multiples de tout entier (avec la restriction $Gx = G$ si $p = 1$).

iii) Si X n'est pas abélien, mais μ symétrique, (1) vaut (pour tout $p > 0$) si (2) ou (2′) valent pour des n multiples de tout entier (avec $n^p \geq 1$ dans le cas de (2′)).

Ainsi (1) vaut pour toute loi stable dans le cas abélien, et dans le cas non abélien pour toute loi stable et symétrique, ou strictement stable d'exposant rationnel.

Preuve. — *a*) Considérons *une* relation (2) ou (2′), avec n'' ou $n^p \geq 2$ (ce que permet l'hypothèse). Elle s'écrit

$$n' \cdot \mu = \mu\mu' , \qquad \text{ou} \qquad n \cdot \mu = \mu\mu' \qquad \text{avec} \qquad : \mu \text{ divise } \mu' .$$

Alors, comme dans [*2*], cette relation de convolution appliquée dans $\dot{X} = X/G$ à un atome-point a de μ ($a = Gx$, $\mu(Gx)$ supposé > 0) tel que $n \cdot \mu(a^n)$ ou $n' \cdot \mu(a^{n'})$ égale η maximum donne

$$(11) \qquad \mu(a^n b_i^{-1}) = \eta , \quad \sum_1^I \mu'(b_i) = 1 , \qquad i = 1, \ldots, I .$$

Ainsi μ' est discrète, de support B fini, donc μ également (puisque μ divise μ') : μ ayant au plus I atomes en a I exactement, ceux tous égaux de (11) (et $\eta = 1/I$). Ce point est assuré dans les trois cas du théorème.

b) Soit X abélien et $\nu = \mu\bar{\mu}$ la loi symétrisée de μ. On a

$$\mu\bar{\mu}(G) \geq [\mu(Gx)]^2 > 0 ,$$

et ν est strictement stable (de même exposant p). Ce qui précède donne, *pour* ν, dans $\dot{X}$, un support symétrique fini A contenant l'unité ε de $\dot{X}$. Posant $A^2 = C$, on a

$$(12) \qquad A = Ca = aC \text{ pour tout } a \text{ (donc } a^{-1}) \text{ de } A ,$$

car μ^2 étant un facteur de $n \cdot \mu$, $A^2 a$ exactement I éléments (comme $n \cdot A = \{ a^n, a \in A \}$).

Donc (faire $a = \varepsilon$) $A = C$ et le demi-groupe fini $A = A^2$ est un groupe $\dot{G}$. $\dot{G}$ est un produit de groupes cycliques d'ordre $p'_j = p_j^{l_j}$ (p_j premier), avec $I = \Pi p'_j$.

Si (2) (ou (2′)) vaut pour *un autre* $n' = n^l$ (ou n) divisible par un de ces p_j, $n' \cdot \dot{G}$ (ou $n \cdot \dot{G}$) a au plus I/p_j éléments ce qui contredit le fait que n'' ou n^p étant ≥ 1, le support $n' \cdot \dot{G}$ (ou $n \cdot \dot{G}$) de $n' \cdot \mu$ (ou $n \cdot \mu$) divisible par μ doit avoir au moins I éléments. Ceci prouve *i*).

ii) Est prouvé dans [*4*] (la preuve est moins simple, surtout dans le cas $p > 1$, les trois cas $p > 1$, $p < 1$ et $p = 1$ sont à étudier séparément), la restriction, implicite dans [*4*], $p \leq 2$ n'intervenant pas dans la preuve.

c) Soit X non abélien mais μ symétrique. Nous revenons à A support de μ dans $\dot{X}$, obtenu en *a*). Posons encore $A^2 = C$. A étant symétrique A^2 l'est et contient l'unité ε de $\dot{X}$. Pour la même raison qu'en *b*) on a (12). Alors

$$C \subset C^2 = aAAa = aCa \Rightarrow C^2 = C , \qquad C \text{ est un groupe } \dot{G} .$$

On a $a^{2I} = \varepsilon$ pour tout a de A, et si 2I divise un autre n vérifiant (2′), $n \cdot A$ est réduit à ε et ne saurait être le support de $\mu^{n^p}\delta(a_n)$ avec $n^p \geq 1$, ou $\mu^{n''}\delta(a_n)$ (il est équivalent de dire les n de (2) ou (2′) multiples de tout entier n ou de tout entier pair).

REMARQUE 3. — La définition d'une loi gaussienne dans le groupe localement compact *non abélien* X (cf. [*1*], p. 427) est assez restrictive. Elle correspond à celle de Parthasarathy dans le cas abélien, en impliquant qu'un demi-groupe continue μ^t (au moins) existe, et que μ soit sans facteur idempotent. Il est clair que ces lois sont 2-stables, au moins dans le cas où μ est symétrique (: la partie linéaire de la fonctionnelle génératrice — cf. le Théorème 4.5.9 page 308 de [*1*] — est identiquement nulle).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] H. HEYER, Probability measures on locally compact groups. Springer-Verlag, *Ergebnisse der Math.*, t. **94**, 1977.

[*2*] W. KRAKOWIAK, Zero-one laws for stable and semi-stable measures on Banach spaces.

[*3*] PARTHASARATHY, Ranga RAO, VARADHAN, Probability distributions on locally compact abelian groups. *Illinois J. Math.*, t. **7**, 1963, p. 337-369.

[*4*] RAJPUT et TORTRAT, Un théorème de Probabilité zéro ou un dans un groupe mesurable ou topologique quelconque. *C. R. A. S.*, Paris, t. **290 A,** 1980, p. 251-254.

[*5*] A. TORTRAT, Lois de zéro-un pour des probabilités semi-stables ou plus générales, dans un espace vectoriel ou un groupe (abélien ou non). *Publications du C. N. R. S.*, Colloque de Saint-Flour, 1980.

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1980).