ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JUI-LIN LONG

Sur l'espace H^p de martingales régulières $(0 < p \leq 1)$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 1 (1981), p. 123-142

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_1_123_0>

Annales Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVII, n° 1, 1981, p. 123-142.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur l'espace H_p de martingales régulières $(0 < p \leqslant 1)$

par

Jui-lin LONG

Académie des Sciences de Chine,
Institut des Mathématiques,
Pékin (République Populaire de Chine).

RÉSUMÉ. — On va établir plusieurs résultats relatifs aux martingales dans $H_p(0 < p \leq 1)$ sous une hypothèse de régularité, appelée hypothèse (T) (ou sous une hypothèse plus faible (T')) : la décomposition atomique de martingales dans H_p (d'après Coifman); le réarrangement de martingales dans $L^1 \cap H_p$ (d'après Davis), etc.

On va montrer que l'hypothèse (T) est en fait une conséquence de la condition simple de régularité suivante :

$$E(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_n) \leq dE(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_{n-1}), \qquad \text{pour } F \in \mathfrak{F} \text{ quelconque}.$$

On regular H_p*-martingales space* $(0 < p \leq 1)$.

ABSTRACT. — Several results concerning H_p-martingales $(0 < p \leq 1)$ have been obtained under a hypothesis of regularity named hypothesis (T) (or under a weak hypothesis (T')) : the (Coifman) atomic decomposition of H_p-martingales; the (Davis) rearrangement of $L^1 \cap H_p$-martingales, etc.

The hypothesis (T) is in reality a consequence of the following simple condition of regularity:

$$E(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_n) \leq dE(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_{n-1}), \qquad \text{for all } F \in \mathfrak{F}.$$

Soit $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espace mesurable muni d'une mesure μ positive complète σ-finie et d'une famille croissante $\{\mathfrak{F}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ de sous-tribus vérifiant les conditions suivantes : $\mathfrak{F} = \bigvee_n \mathfrak{F}_n$; $\cap \mathfrak{F}_n$ est engendrée par tous les ensembles négligeables, et $\forall n \in \mathbb{Z}$, μ est σ-finie sur $\mathfrak{F}_n$. Quand $|\Omega| < \infty$ (*), on prend $|\Omega| = 1$ et $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_0$ pour $n \leq 0$. Pour fixer les idées, supposons que $|\Omega| = \infty$.

Comme Edwards et Gaudry [*1*] l'ont montré, on peut définir l'opérateur d'espérance conditionnelle $f_n = \mathrm{E}(f \mid \mathfrak{F}_n)$ pour $f \in \bigcup_{1 \leq r < \infty} \mathrm{L}^r(\Omega)$, et cet opérateur satisfait aux propriétés habituelles (voir [*1*] § 5.1.4).

On dit qu'une suite $(f_n)_{-\infty}^{\infty}$ de fonctions dans $\bigcup_{1 \leq r < \infty} \mathrm{L}^r(\Omega)$ est une martingale, si (f_n) est adapté à $\{ \mathfrak{F}_n \}$, et $\mathrm{E}(f_n \mid \mathfrak{F}_m) = f_m$ pour $m \leq n$. On dit qu'une application τ de Ω dans $\overline{\mathbb{Z}}$ est un temps d'arrêt (t. d'a. en abrégé), si $\{ \tau = n \} \in \mathfrak{F}_n$. Pour un t. d'a. τ quelconque, désignons par $\mathfrak{F}_\tau$ la sous-tribu $\{ \mathrm{F} \in \mathfrak{F} : \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{F} \cap \{ \tau \leq n \} \in \mathfrak{F}_n \}$. Évidemment, les propriétés fondamentales concernant τ et $\mathfrak{F}_\tau$ ont encore lieu comme dans le cas où $|\Omega| < \infty$.

Dans la théorie des martingales, l'introduction de t. d'a. constitue un outil puissant. Aussi, dans ce papier, nous faisons une hypothèse concernant t. d'a. comme suit : pour tous les processus positifs $(\gamma_n)_{-\infty}^{\infty}$ et tous les $\lambda > 0$, vérifiant $|\{ \gamma^* > \lambda \}| < \infty$, il existe un t. d'a. τ_λ tel que

(1) $$|\{ \tau_\lambda < \infty \}| \leq d\, |\{ \gamma^* > \lambda \}|, \qquad d \geq 1 \text{ une constante},$$

(2) $$\{ \gamma^* > \lambda \} \subset \{ \tau_\lambda < \infty \} \qquad \text{(modulo mesure de zéro)},$$

(3) $$\gamma_{\tau_\lambda} \mathbb{1}(\{ \tau_\lambda < \infty \}) \leq \lambda,$$

(4) $$\text{si } \lambda_1 \geq \lambda_2, \qquad \text{alors } \tau_{\lambda_1} \geq \tau_{\lambda_2}.$$

Dans la suite, on dit qu'on a l'hypothèse (T) si les conditions (1), (2), (3), (4) sont satisfaites, qu'on a l'hypothèse (T′) si seulement les conditions (1), (2), (3) sont satisfaites.

Dans notre papier [2], on a étudié les Φ-inégalités avec poids sous l'hypothèse (T′). Ici, on étudie quelques autres problèmes concernant les martingales dans H_p aussi sous cette hypothèse, soit (T), soit (T′).

Le paragraphe 1 est consacré à la décomposition atomique de martingales dans H_p sous l'hypothèse (T). Après C. S. Herz et R. R. Coifman, Bernard et Maisonneuve [*3*] ont obtenu la décomposition atomique de H_c^1 (continue), H_d^1 (dyadique) et H_g^1 (gauche, c'est-à-dire prévisible). Nous étudions cette décomposition pour H_p $(0 < p \leq 1)$ et sous l'hypothèse (T).

Dans le paragraphe 2, nous considérons le réarrangement f_d de $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{H}_p$ d'après Davis [*4*]. Sous l'hypothèse (T′), nous établissons la L^p-intégrabilité de $\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} f_d(t)\,dt$ pour $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{H}_p$ que Davis a établie dans le cas classique.

(*) Dans ce papier, $|\mathrm{F}|$ désigne la μ-mesure d'un ensemble mesurable F ; C, avec des indices ou non, désigne une constante qui varie de place en place.

Dans le paragraphe 3, on donne quelques résultats concernant des martingales dans H_1, sous l'hypothèse (T') aussi.

Dans le paragraphe 4, on montre que l'hypothèse (T) est une conséquence directe d'une condition simple de régularité appelée condition « R » dans [*2*].

1. DÉCOMPOSITION ATOMIQUE DE MARTINGALES DANS H_p SOUS L'HYPOTHÈSE (T)

Définissons $H_p = \{ \text{martingale } f = (f_n)_{-\infty}^{\infty} : \ f^* = \sup_n |f_n| \in L^p(\Omega) \}$, $0 < p \leq 1$, avec la norme $\| f \|_{H_p} = \| f^* \|_p$. C'est un espace vectoriel métrique.

D'après [*3*], on dit qu'une fonction $a \in L^\infty(\Omega)$ est un p-atome, s'il existe un t. d'a. τ tel que $a\mathbb{1}(\{ \tau = \infty \}) = 0$, $|\{ \tau < \infty \}| < \infty$, et

$$(5) \quad a_n \mathbb{1}(\{ n \leq \tau \}) = 0 \quad (a_n = E(a \mid \mathfrak{F}_n)) \quad \text{et} \quad \| a \|_\infty \leq |\{ \tau < \infty \}|^{-\frac{1}{p}}.$$

THÉORÈME 1. — *Soit $f \in L^1 \cap H_p (0 < p \leq 1)$, alors il existe une suite $\{ \lambda_j \}$ de réels positifs et une suite $\{ a_j \}$ de p-atomes, telles que $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$, où la série converge ponctuellement et dans H_p. On a de plus*

$$(6) \qquad \| f \|_{H_p}^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p \leq C_p d \| f \|_{H_p}^p .$$

Preuve. — Pour le processus $(|f_n|)_{-\infty}^{\infty}$ et pour $\lambda = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$, définissons t. d'a. τ_k vérifiant (1), (2), (3), (4). D'après (1), (4), on a $\lim_{k \to \infty} \tau_k = \infty$, et donc $\lim_{k \to \infty} f_{\tau_k} = f$; d'après (3), on a $\lim_{k \to -\infty} f_{\tau_k} = 0$. Alors on obtient la décomposition suivante :

$$(7) \qquad f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}),$$

où la série converge ponctuellement.

Désignons

$$\lambda_k = 2^{k+1} |\{ \tau_{k-1} < \infty \}|^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad a_k = \frac{1}{\lambda_k}(f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}})\mathbb{1}(\{ \tau_{k-1} < \infty \}|).$$

Alors a_k sont tous p-atomes. En effet, d'après (2), (3), (4), on a

$$\| a_k \|_\infty \leq |\{ \tau_{k-1} < \infty \}|^{-1/p}$$

et

$$(a_k)_n \mathbb{1}(\{ n \leq \tau_{k-1} \}) = \frac{1}{\lambda_k}(f_{\tau_k \wedge n} - f_{\tau_{k-1} \wedge n}) \mathbb{1}(\{ n \leq \tau_{k-1} \}) = 0 .$$

Désignons $\sigma(\lambda) = | \{ f^* > \lambda \} |$, on a

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k^p \leq d \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)p} | \{ f^* > 2^{k-1} \} |$$

$$\leq C_p d \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \lambda^{p-1} \sigma(\lambda) d\lambda = C_p d \| f \|_{H_p}^p ,$$

c'est la deuxième inégalité de (6).

Maintenant, démontrons la première inégalité de (6) et la convergence dans H_p de la série $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$.

D'abord, remarquons que pour tout p-atome a, on a $\int_\Omega a^{*p} d\mu \leq 1$. Ensuite, remarquons que nous avons non seulement (7), mais encore

$$(7') \qquad f_n = \sum_{-\infty}^{\infty} (f_{\tau_k \wedge n} - f_{\tau_{k-1} \wedge n}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k (a_k)_n , \qquad -\infty < n < \infty ,$$

avec les séries convergeant ponctuellement, car $\lim_{k \to \infty} \tau_k = \infty$ et

$$\lim_{k \to \infty} | f_{\tau_k \wedge n} | \leq \lim_{k \to -\infty} 2^k = 0$$

(parce que $f_{\tau_k} \in L^1$, $\| f_{\tau_k} \|_\infty \leq 2^k$ et $f_{\tau_k \wedge n} = E(f_{\tau_k} | \mathfrak{F}_n)$). Alors on a

$$f^* = \sup_n | f_n | \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k^* ,$$

et donc

$$\| f \|_{H_p}^p \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k^p \int_\Omega a_k^{*p} d\mu \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k^p .$$

Pour la même raison, on a

$$(f - f_{\tau_{N-1}})_n = \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k (a_k)_n \quad \text{et} \quad (f_{\tau_M})_n = \sum_{k=-\infty}^{M} \lambda_k (a_k)_n , \qquad -\infty < n < \infty ,$$

et donc

$$\lim_{N \to \infty} \| f - f_{\tau_{N-1}} \|_{H_p}^p \leq \lim_{N \to \infty} \sum_{N}^{\infty} \lambda_k^p = 0 ,$$

et

$$\lim_{M \to -\infty} \| f_{\tau_M} \|_{H_p}^p \leq \lim_{M \to -\infty} \sum_{-\infty}^{M} \lambda_k^p = 0 .$$

Ce qui montre que $\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge dans H_p vers f.

Enfin, on réarrange $\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$ en $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j b_j$, on obtient ainsi la forme définitive que nous voulons. Ce qui termine la décomposition du théorème.

COROLLAIRE 1. — *Désignons*

$$\tilde{H}_p = \left\{ \textit{martingales } f = (f_n)_{-\infty}^{\infty} : S(f) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} | \Delta f_n |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \in L^p \right\} ,$$

avec la norme $\| f \|_{\tilde{H}_p} = \| S \|_p$. *Alors on a* $H_p \subset \tilde{H}_p$ *et*

$$\| f \|_{\tilde{H}_p} \leq C_p d \| f \|_{H_p} \qquad (0 < p \leq 1) .$$

Preuve. — il suffit de remarquer que pour tout p-atome a, on a

$$\int_{\Omega} S(a)^p d\mu \leq 1 ,$$

et que pour toute

$$f = \sum_{1}^{\infty} \lambda_j a_j \in L^1 \cap H_p ,$$

on a

$$| f_i - f_{i-1} | \leq \sum_{j} \lambda_j | (a_j)_i - (a_j)_{i-1} | ,$$

et que

$$S(f) \leq \sum_{j} \lambda_j S(a_j) .$$

Remarque. — En imitant [*2*], on peut démontrer $H_p = \tilde{H}_p$ dans le cas où $| \Omega | = \infty$, sous l'hypothèse (T').

Maintenant, étudions la décomposition plus fine de martingales dans H_p atomique régulier. Pour cela, on se place dans le cas où $\mathfrak{F}_n$ est engendrée par des atomes $\{ I_i^{(n)} \}$ vérifiant

$$I_i^{(n)} = \bigcup_{j=l_i}^{m_i} I_j^{(n+1)} ;$$

$| I_j^{(n+1)} | \geq \alpha \, | I_i^{(n)} |$ (quand $I_j^{(n+1)} \subset I_i^{(n)}$), $0 < \alpha < 1$; et $0 < \alpha_n \leq | I_i^{(n)} | < \infty$, pour tous i, où α, α_n sont constantes. Dans ce cas, pour toute martingale $(f_n)_{-\infty}^{\infty}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $r \in]1, \infty[$, tel que $f^{(n)} = (f_{m \wedge n}) \in H_r$, car il existe $r_0 \in [1, \infty[$, tel que $f_n \in L^{\infty} \cap L^{r_0}$. Alors quand $f \in H_p$, $0 < p \leq 1$, on a $f^{(n)} \in H_1 \cap H_p$. Donc, il nous suffit de considérer la décomposition atomique pour $f \in H_1 \cap H_p$.

Dans ce cas, désignons

$$\mathfrak{I} = \{ \text{tous les atomes } I_i^{(n)}, \; -\infty < n < \infty, \; i = 1, 2 \ldots \} .$$

Nous disons qu'une fonction $a \in L^{\infty}(\Omega)$ est un p-atome strict, s'il existe un $I \in \mathfrak{I}$ tel que

$$(8') \qquad a\mathbb{1}(\{ \Omega - I \}) = 0, \quad \int_{\Omega} a d\mu = 0, \quad \| a \|_{\infty} \leq | I |^{-1/p} .$$

THÉORÈME 2. — *Soit* $f \in H_1 \cap H_p$. *Alors il existe une suite* $\{ \lambda_j^{(r)} \}$ *de réels positifs et une suite* $\{ a_j^{(r)} \}$ *de r-atomes stricts avec* $r = 1$ *ou* $r = p$, *telles que* $\lambda_j^{(1)} a_j^{(1)} = \lambda_j^{(p)} a_j^{(p)}$, *et* $f = \sum_1^{\infty} \lambda_j^{(r)} a_j^{(r)}$, *où la série converge dans* H_r. *De plus, on a les inégalités* (6).

Preuve. — Comme dans la démonstration du théorème 1, on a

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} (f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}) \mathbb{1}(\{ \tau_{k-1} < \infty \}) .$$

Remarquons que

$$\{ \tau_{k-1} < \infty \} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^{(l_{k,j})} ,$$

avec $I_j^{(l_{k,j})} \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{F}_{l_{k,j}} \cap \mathfrak{F}_{\tau_{k-1}}$ disjoints deux à deux, pour k fixé. Désignons

$$a_{k,j}^{(r)} = \frac{1}{\lambda_{k,j}^{(r)}} (f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}) \mathbb{1}(I_j^{(l_{k,j})}) ,$$

et $\lambda_{k,j}^{(r)} = 2^{k+1} \mid I_j^{(l_{k,j})} \mid^{1/r}$. Alors chaque $a_{k,j}^{(r)}$ est un r-atome strict associé à $I_j^{(l_{k,j})}$. En effet, puisque $I_j^{(l_{k,j})} \in \mathfrak{F}_{\tau_{k-1}}$, on a

$$\frac{1}{\mid I_j^{(l_{k,j})} \mid} \int_{I^{(l_{k,j})}} a_{k,j}^{(r)} d\mu = E\big(a_{k,j}^{(r)} \mid \mathfrak{F}_{\tau_{k-1}}\big) \mathbb{1}\big(I_j^{(l_{k,j})}\big)$$
$$= \frac{1}{\lambda_{k,j}^{(r)}} E\big((f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}) \mid \mathfrak{F}_{\tau_{k-1}}\big) \mathbb{1}\big(I_j^{(l_{k,j})}\big) = 0 .$$

Alors on obtient la décomposition atomique de f suivante

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)} .$$

D'abord, démontrons la deuxième inégalité de (6). On a

$$(8) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \big(\lambda_{k,j}^{(r)}\big)^r = \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)r} \mid \{ \tau_{k-1} < \infty \} \mid \leq C_r d \parallel f \parallel_{H_r}^r .$$

Maintenant, démontrons que la série double $\sum_{k,j} \lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)}$ converge vers f dans H_r et que $\parallel f \parallel_{H_r}^r \leq \sum_{k,j} \big(\lambda_{k,j}^{(r)}\big)^r$.

Remarquons que tous les r-atomes stricts sont dans la boule unité de H_r. Alors, d'après (8), on a

$$\lim_{n,m,l\to\infty} \int_\Omega \sum \sum_{(k,j)\notin[-n,m]\times[1,l]} \big(\lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)*}\big)^r d\mu \leq \lim_{n,m,l\to\infty} \sum \sum_{(k,j)\notin[-n,m]\times[1,l]} \big(\lambda_{k,j}^{(r)}\big)^r = 0 .$$

Prenant $r = 1$, on a que

$$g_{n,m,l} = \sum_{k=-n}^{m} \sum_{j=1}^{l} \lambda_{k,j}^{(1)} a_{k,j}^{(1)}$$

converge vers une limite g dans H_1 (parce que H_1 est complet), et donc dans L^1 aussi. Alors

$$(g - g_{n,m,l})_i = \sum \sum_{(k,j)\notin[-n,m]\times[1,l]} \lambda_{k,j}^{(p)} \big(a_{k,j}^{(p)}\big)_i , \qquad -\infty < i < \infty ,$$

avec la série convergeant dans L^1. Quitte à extraire une sous-suite, on a

$$(g - g_{n,m,l})^* \leq \sum \sum_{(k,j)\notin[-n,m]\times[1,l]} \lambda_{k,j}^{(p)} a_{k,j}^{(p)*} ,$$

alors $g_{n,m,l}$ converge vers g dans H_p aussi. Puisque f est la limite ponctuelle, on a $g = f$, et que

$$\| f \|_{H_r}^r \leq \lim_{n,m,l \to \infty} \| g_{n,m,l} \|_{H_r}^r \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} (\lambda_{k,j}^{(r)})^r .$$

En réarrangeant $\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)}$ en $\sum_{1}^{\infty} \lambda_j^{(r)} a_j^{(r)}$, on termine la démonstration.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $\{ \mathfrak{F}_n \}_{-\infty}^{\infty}$ *atomique et régulière, avec tous les atomes* $I_i^{(n)}$ *étant des cubes de* $\mathbb{R}^k$ *dont les côtés sont parallèles aux axes. Alors pour* $\frac{k}{k+1} < p \leq 1$, *on a* $H_p \subset H_{p,c}$ *(l'indice c désigne « classique » selon Stein-Weiss).*

Preuve. — D'après le théorème 2, pour $f \in H_1 \cap H_p$, on a $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ où la série converge dans H_1 (et donc dans L^1) et dans H_p, et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p \leq d C_p \| f \|_{H_p}^p .$$

Alors pour les transformées R_i de Riesz, on a

$$\text{(9)} \qquad R_i(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j R_i(a_j) , \qquad i = 1, \ldots, k ,$$

où la série converge dans $L^\alpha(D)$ avec $0 < \alpha < 1$ et D ensemble compact quelconque de $\mathbb{R}^k$. Quitte à extraire une sous-suite, on a

$$| R_i(f) | \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j | R_i(a_j) | , \qquad i = 1, \ldots, k ,$$

sur tout ensemble compact, donc sur $\mathbb{R}^k$ tout entier. Alors on a

$$\text{(10)} \qquad \| f \|_{H_{p,c}}^p \leq C_p \sum_{i=0}^{k} \| R_i(f) \|_p^p \leq C_p \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p \leq C_p d \| f \|_{H_p}^p .$$

car $\| R_i(a_j) \|_p \leq C_p$ pour $\frac{k}{k+1} < p \leq 1$ (voir Coifman et Weiss [5], p. 586).

Comme $H_1 \cap H_p$ est dense dans H_p et que $H_{p,c}$ est complet, alors on peut prolonger l'opérateur continu d'identité $I : H_1 \cap H_p \to H_{p,c}$ en un opérateur continu sur H_p dans $H_{p,c}$. D'où le corollaire.

Remarque. — On a aussi le même résultat pour $\mathbb{T}^k$, en se référant à Stein [*6*]. Davis [*4*] a montré $H_p(\mathbb{T}) \subset H_{p,c}(\mathbb{T})$, $\frac{1}{2} < p \leq 1$.

2. LE RÉARRANGEMENT DE FONCTIONS DANS $L^1 \cap H_1$ D'APRÈS DAVIS

Récemment, Davis [*4*] a caractérisé la fonction de distribution de $f \in L^1 \cap H_{p,c}$, $0 < p \leq 1$, en montrant le résultat suivant.

PROPOSITION. — *Soit* $f \in L^1(T) \cap \operatorname{Re} H_{p,c}$, $E(f) = 0$, *alors*

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^x f_d(t)dt \right|^p dx \leq C_p \| f \|_{H_p}^p, \tag{11}$$

où f_d *est le réarrangement de* f *qui est décroissant sur* $[0, 2\pi]$.

Réciproquement, soit $f \in \operatorname{Re} L^1(\mathbb{T})$ telle que

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^x f_d(t)dt \right|^p dx < \infty ,$$

alors $f_d \in H_{p,c}$ et on a

$$\| f_d \|_{H_{p,c}}^p \leq C_p \left(\int_0^\pi \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^x f_d(t)dt \right|^p dx + \| f \|_p^p \right), \qquad \frac{1}{2} < p \leq 1 . \tag{12}$$

Il l'a aussi montré pour $H_{p,c}(\mathbb{R}^k)$.

La première assertion de cette proposition peut avoir lieu pour des martingales générales. Nous voulons l'établir sous l'hypothèse (T').

Soit f une fonction réelle définie sur Ω, on désigne par f_d la fonction réarrangée de f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$f_d \geq 0$, décroissante sur $[0, \infty[$;
$f_d \leq 0$, décroissante sur $]-\infty, 0[$.

THÉORÈME 3. — *Supposons que l'hypothèse* (T') *soit vérifiée. Soit*

$$f \in L^1(\Omega) \cap \operatorname{Re} H_p , \qquad 0 < p \leq 1 ,$$

alors on a

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^x f_d(t)dt \right|^p dx \leq C_{p,d} \| f \|_{H_p}^p . \tag{11'}$$

Preuve. — Désignons $f_n = \mathrm{E}(f \mid \mathfrak{F}_n)$, $f^* = \sup_n |f_n|$, $g_n = (f_n)^+$, $g^* = \sup_n g_n = (\sup_n f_n)^+$, $h = (f_n)^-$, $h^* = \sup_n h_n = (-\inf f_n)^+$. Alors $f^* = \max(g^*, h^*) \in \mathrm{L}^p$, $f_n \to f$, p. p., et $\mathrm{E}(f) = 0$. Pour le processus $(g_n)_{-\infty}^{\infty}$ et pour $\lambda > 0$, définissons le t. d'a. τ_λ vérifiant (1), (2), (3), c'est-à-dire

$$|\{\tau_\lambda < \infty\}| \leq d\,|\{g^* > \lambda\}|,$$
$$\{f > \lambda\} \subset \{\sup_n f_n > \lambda\} = \{g^* > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\},$$
$$f_{\tau_\lambda} \mathbb{1}(\{\tau_\lambda < \infty\}) \leq g_{\tau_\lambda} 1(\{\tau_\lambda < \infty\}) \leq \lambda.$$

Alors, on a

$$(13) \quad \int_{\{\tau_\lambda < \infty\}} f d\mu = \int_{\{\tau_\lambda < \infty\}} f_{\tau_\lambda} d\mu \leq \lambda\,|\{\tau_\lambda < \infty\}| \leq d\lambda\,|\{g^* > \lambda\}| = d\lambda\sigma(\lambda).$$

Désignons $\theta_\lambda = \sup\{x : f_d(x) > \lambda\}$. Les deux fonctions $\int_\varphi^{\theta_\lambda} f_d(x)dx$ et $\lambda(\theta_\lambda - \varphi)$ sont continues en $\varphi \in]-\infty, 0]$, et respectivement décroissante, croissante par rapport à $|\varphi|$ $(\varphi < 0)$. Puisque

$$\int_0^{\theta_\lambda} f_d(x)dx > \lambda\theta_\lambda \qquad \text{et} \qquad -\int_{-\infty}^{0} f_d(x)dx = \int_0^{\infty} f_d(x)dx \geq \int_0^{\theta_\lambda} f_d(x)dx,$$

il existe $\varphi_\lambda < 0$ uniquement tel que

$$(14) \qquad \int_{\varphi_\lambda}^{\theta_\lambda} f_d(x)dx = \lambda(\theta_\lambda - \varphi_\lambda).$$

Désignons $\psi_\lambda = \theta_\lambda - \varphi_\lambda$, alors ψ_λ est une fonction décroissante en $\lambda \in]0, \infty[$. En effet, soit $\lambda > \lambda'$, alors $\theta_\lambda \leq \theta_{\lambda'}$, et $\varphi_{\lambda'} \leq \varphi_\lambda$, la dernière inégalité est obtenue par l'inégalité suivante

$$\int_\varphi^{\theta_{\lambda'}} = -\int_{\varphi_\lambda}^{\varphi} + \int_{\varphi_\lambda}^{\theta_\lambda} + \int_{\theta_\lambda}^{\theta_{\lambda'}} > \lambda(\theta_\lambda - \varphi_\lambda) + \lambda'(\theta_{\lambda'} - \theta_\lambda) > \lambda'(\theta_{\lambda'} - \varphi),$$
$$\text{pour } \varphi \in [\varphi_\lambda, 0[.$$

D'après (14), on peut contruire

$$\mathrm{E} = \{f > \lambda\} \cup \{f < \beta\} \cup \mathrm{F}, \quad \mathrm{F} \subset \{f = \beta\}, \qquad \beta \leq 0,$$

tel que $|\{f < \beta\} \cup \mathrm{F}| = -\varphi_\lambda$, alors on a

$$(14') \qquad \int_{\mathrm{E}} f d\mu = \lambda\psi_\lambda = \lambda\,|\mathrm{E}|,$$

$$(15) \qquad \int_{\mathrm{E}} f d\mu = \inf_{\mathrm{F}:\mathrm{F} \supset \{f > \lambda\}, |\mathrm{F}| \leq |\mathrm{E}|} \int_{\mathrm{F}} f d\mu.$$

Alors, de (13), (14′) et (15), on peut déduire

$$\psi_\lambda \leq d \,|\, \{ g^* > \lambda \} \,| = d\sigma(\lambda) . \tag{16}$$

En effet, quand $\int_E f d\mu \leq \int_{\{\tau_\lambda < \infty\}} f d\mu$, alors (16) est déduit de (13) et (14′); sinon, (16) est déduit de (15), car $\{ f > \lambda \} \subset \{ \tau_\lambda < \infty \}$.

Désignons $\alpha_n = \left(\frac{1}{2^{n+1}} \int_{-2^n}^{2^n} f_d(t) dt \right)^+$. D'abord on montre que $\psi_{\alpha_n} \geq 2^n$ lorsque $\alpha_n > 0$. En effet, quand $\theta_{\alpha_n} \geq 2^n$, on a $\psi_{\alpha_n} = \theta_{\alpha_n} - \varphi_{\alpha_n} \geq 2^n$; quand $0 < \theta_{\alpha_n} < 2^n$, on a

$$\int_{-2^n}^{\theta_{\alpha_n}} f_d(t) dt = \int_{-2^n}^{2^n} - \int_{\theta_{\alpha_n}}^{2^n} \geq 2^{n+1} \alpha_n - \alpha_n (2^n - \theta_{\alpha_n}) = \alpha_n (\theta_{\alpha_n} + 2^n) ,$$

ce qui entraîne $\varphi_{\alpha_n} \leq - 2^n$, et donc $\psi_{\alpha_n} \geq 2^n$.

Pour tout $N \in \mathbb{Z}^+$, définissons $j_0 = N$, j_1 est le plus grand entier $k < j_0$ vérifiant $\alpha_k > 2\alpha_{j_0}$ (s'il existe), ... j_{i+1} est le plus grand entier $k < j_i$ vérifiant $\alpha_{j_{i+1}} > 2\alpha_{j_i}$, ..., alors on a

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{N} 2^n \alpha_n^p &= \sum_{i=0}^{\infty} \{ 2^{j_i} \alpha_{j_i}^p + 2^{j_i - 1} \alpha_{j_i - 1}^p + \dots + 2^{j_{i+1}+1} \alpha_{j_{i+1}+1}^p \} \\ &\leq (1 + 2^p) \sum_{i=0}^{\infty} 2^{j_i} \alpha_{j_i}^p \leq (1 + 2^p) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{\alpha_{j_i}} \alpha_{j_i}^p \leq C_p \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\frac{\alpha_{j_i}}{\alpha}}^{\alpha_{j_i}} \psi_\lambda \lambda^{p-1} d\lambda \\ &\leq C_{p,d} \| g^* \|_{H_p}^p , \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{-\infty}^{\infty} 2^n \left(\left(\frac{1}{2^{n+1}} \int_{-2^n}^{2^n} f_d(t) dt \right)^+ \right)^p \leq C_{p,d} \| f \|_{H_p}^p .$$

En considérant $- f$, on a aussi

$$\sum_{-\infty}^{\infty} 2^n \left(\left(\frac{1}{2^{n+1}} \int_{-2^n}^{2^n} f_d(t) dt \right)^- \right)^p \leq C_{p,d} \| f \|_{H_p}^p .$$

D'après l'inégalité suivante (voir [4])

$$(17)\quad \mathrm{C}_p \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{n(1-p)} \left| \int_{-2^n}^{2^n} f_d \right|^p - \mathrm{C}_p \| f \|_p^p \leq \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d \right|^p dx$$

$$\leq \mathrm{C}_p \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{n(1-p)} \left| \int_{-2^n}^{2^n} f_d \right|^p + \mathrm{C}_p \| f \|_p^p ,$$

on obtient (11′). Ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque. — Réciproquement, soit $f \in \operatorname{Re} \mathrm{L}^1(\Omega)$ telle que

$$\frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d(t)dt \in \mathrm{L}^p(0, \infty) ,$$

est-ce qu'on peut en déduire qu'il existe un réarrangement f_r de f, défini sur Ω, qui est une martingale dans certain H_p. Pour le cas classique la réponse de Davis [4] est « oui », comme suit :

THÉORÈME 4 (Davis). — *Soit* $f \in \operatorname{Re} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^k)$ (*ou* $f \in \operatorname{Re} \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^k)$) *telle que*

$$\frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d(t)dt \in \mathrm{L}^p(0, \infty)$$

(*ou* $\in \mathrm{L}^p(0, 1)$), $\dfrac{k}{k+1} < p \leq 1$, *alors il existe une fonction réarrangée* f_r *de* f *définie sur* $\mathbb{R}^k$ (*ou* $\mathbb{T}^k$) *telle que* $f_r \in \mathrm{H}_{p,c}$.

Preuve. — Il suffit de considérer $\mathbb{R}^2$. Définissons un réarrangement f_r de f vérifiant

$f_r \geq 0$ pour $y > 0$ et $f_r \leq 0$ pour $y \leq 0$;
$f_r(x_0, y) = f_r(-x_0, y) = f_r(x, \pm x_0) = \mathrm{C}_{x_0}$, pour $0 < |y| \leq x_0$, $-x_0 \leq x \leq x_0$;

C_{x_0} est décroissant en x_0 pour $y > 0$, et croissant pour $y < 0$. Considérons une famille $\{ \mathfrak{F}_n \}_{-\infty}^{\infty}$ croissante de sous-tribus de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ avec $\mathfrak{F}_n$ engendrée par

Pour $n > 0$:

$$\mathrm{I}_0^{(n)} = \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} \right[\times \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} \right[\text{ et tous les } \mathrm{I}_{\mathrm{K},\mathrm{M},k,m}^{(n)}$$

$$\left[\mathrm{K} + \frac{k}{2^n}, \mathrm{K} + \frac{k+1}{2^n} \right[\times \left[\mathrm{M} + \frac{m}{2^n}, \mathrm{M} + \frac{m+1}{2^n} \right[,$$

sauf 4 carrés correspondant à $\mathrm{K} = \mathrm{M} = 0$; $k, m = -1, 0$;

Pour $n \leq 0$:

$$I_0^{(n)} = [-2^{|n|}, 2^{|n|}[\times [-2^{|n|}, 2^{|n|}[\text{ et tous les } I_{k,m}^{(n)} = [k2^{|n|}, (k+1)2^{|n|}[\times [m2^{|n|}, (m+1)2^{|n|}[,$$

sauf 4 carrés correspondant à $k, m = -1, 0$.

Alors, on peut montrer sans peine que $f_r \in H_p$, où H_p est relative à $\{\mathfrak{F}_n\}$. D'après le corollaire 2, on a $f_r \in H_{p,c}$.

Remarque. — Cette démonstration est un peu plus simple que celle de Davis [*4*] qui n'est pas directe.

3. QUELQUES RÉSULTATS SUR L'ESPACE H_1

THÉORÈME 5. — *Supposons que l'hypothèse* (T') *ait lieu. Soit* $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$, *alors pour tout* $\lambda_0 > 0$, *on a*

$$(18) \qquad -\frac{1}{2}\| f \|_1 + \frac{1}{2}\int_{\{f^* > 2\lambda_0\}} f^* d\mu \leq \int_{\{f > \lambda_0\}} f \log \frac{f}{\lambda_0} d\mu \leq d \int_{\{f^* > \lambda_0\}} f^* d\mu.$$

Preuve. — Pour $(f_n)_{-\infty}^{\infty}$ $(f_n = E(f \mid \mathfrak{F}_n))$ et pour $\lambda > 0$, définissons un t. d'a. τ vérifiant (1), (2), (3). Alors on a

$$\int_{\{f > \lambda\}} f d\mu \leq \int_{\{\tau < \infty\}} f d\mu = \int_{\{\tau < \infty\}} f_\tau d\mu \leq d\lambda \,|\{ f^* > \lambda \}| = d\lambda\sigma(\lambda).$$

Donc

$$\int_{\lambda_o}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{\{f > \lambda\}} f d\mu d\lambda \leq d \int_{\lambda_o}^{\infty} \sigma(\lambda) d\lambda$$

$$= d \int_{\{f^* > \lambda_o\}} f^* d\mu - d\lambda_0\sigma(\lambda_0) \leq d \int_{\{f^* > \lambda_o\}} f^* d\mu,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\{f > \lambda_0\}} f \log \frac{f}{\lambda_0} d\mu \leq d \int_{\{f^* > \lambda_o\}} f^* d\mu.$$

La première inégalité de (18) a lieu sans l'hypothèse (T') et la positivité de f. En effet, on a

$$\sigma(\lambda) \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f| d\mu, \qquad \text{pour } f \in L^1.$$

Donc

$$\int_{\lambda_o}^{\infty} \sigma(\lambda) d\lambda \leq 2 \int_{\{|f| > \frac{\lambda_0}{2}\}} |f| \log \frac{2|f|}{\lambda_0} d\mu,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}\| f \|_1 + \frac{1}{2}\int_{\{f^* > 2\lambda_o\}} f^* d\mu \leq \int_{\{|f| > \lambda_o\}} |f| \log \frac{|f|}{\lambda_0} d\mu .$$

Remarque. — Gundy [*7*], Garsia [*8*] et Neveu [*9*] ont aussi obtenu ces résultats avec un peu de différence deux à deux. Stein [*6*] a étudié le cas classique.

Maintenant considérons des réarrangements de fonctions et la classe $L \log^+ L$ lorsque $|\Omega| = 1$.

THÉORÈME 6. — *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu, \{\mathfrak{F}_n\}_{n \geq 0})$ *atomique et régulier avec* $|\Omega| = 1$. *Soit* $f \in \operatorname{Re} H_1$. *On suppose qu'il existe* $n_0 \in Z^+$ *et* $\lambda \in R^+$ *tels que pour tout* $n \geq n_0$ *et pour tout* $I_i^{(n)} \in \mathfrak{F}_n$, *on ait*

$I_i^{(n)} \cap \{ f > \lambda \} = \phi$ *ou bien* $I_i^{(n)} \cap \{ f < -\lambda \} = \phi$ *ou bien tous les deux,*

alors $f \in L \log^+ L$.

Preuve. — Pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $I_i^{(n)}$, au moins une des deux égalités

$$\frac{1}{|I_i^{(n)}|}\int_{I_i^{(n)} \cap \{f > \lambda\}} f d\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{|I_i^{(n)}|}\int_{I_i^{(n)} \cap \{f < -\lambda\}} f d\mu = 0 ,$$

a lieu, alors on a

$$\left| \frac{1}{|I_i^{(n)}|}\int_{I_i^{(n)}} f d\mu \right| \geq \left| \frac{1}{|I_i^{(n)}|}\int_{I_i^{(n)}} f \mathbb{1}(\{ f > \lambda \}) d\mu \right| + \left| \frac{1}{|I_i^{(n)}|}\int_{I_i^{(n)}} f \mathbb{1}(\{ f < -\lambda \}) d\mu \right| - \lambda .$$

Donc

$$\max((f\mathbb{1}(\{f > \lambda\}))^*, (f\mathbb{1}(\{f < -\lambda\}))^*) \leq f^* + \lambda + (\min_{n < n_o, i} |I_i^{(n)}|)^{-1} \| f \|_1 ,$$

ce qui entraîne que $|f| \in H_1$. D'après théorème 5, on a $f \in L \log^+ L$.

Remarque. — 1. Cette considération est valable pour $H_{1,c}(\mathbb{T}^k)$ aussi. En effet, si $\{ f > \lambda \}$ et $\{ f < -\lambda \}$ peuvent être séparés par deux voisinages, alors on a que $f \in H_{1,c} \Rightarrow f \in L \log^+ L$. Pour cela, il suffit de remplacer l'estimation de fonction maximale par celle des transformées de Riesz R_j, $j = 1, \ldots, k$.

2. Soit f_s le réarrangement symétrique et décroissant sur $[0, \pi]$ de $f \in \operatorname{Re} L^1(\mathbb{T})$. M. Essen et D. Shea ont montré que $f_s \in H_{1,c} \Rightarrow f \in L \log^+ L$. C'est une conséquence directe du théorème précédent. En effet, puisque f_s satisfait à la séparabilité dans la remarque 1, alors on a $f_s \in L \log^+ L$, et donc $f \in L \log^+ L$.

Voilà une autre inégalité concernant $H_{1,c}$ qui est analogue à (11).

THÉORÈME 7. — *Pour* $f \in H_{1,c}(\mathbb{R})$ (*ou* $f \in H_{1,c}(\mathbb{T})$), *on a*

$$\left\| \frac{1}{x} \int_0^x (f(x_0 + t) + f(x_0 - t))dt \right\|_1 \leq C \| f \|_{H_1} . \tag{19}$$

Preuve. — Par exemple, considérons $\mathbb{R}$. Définissons deux opérateurs

$$Mf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt, \quad M^*f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^\infty \frac{f(t)}{t} dt, & x > 0 \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{t} dt, & x < 0, \end{cases} \quad \text{pour } f \in \bigcup_{p \geq 1} L^p .$$

Désignons la transformée de Fourier et de Hilbert de f par $\mathfrak{F}f$ et $\tilde{f}$ respectivement.

D'abord nous montrons que

$$\| M\tilde{g} \|_1 \leq C \| g \|_1 , \qquad \text{pour toute fonction impaire } g \in H_1 . \tag{20}$$

En effet, d'après

$$M^*f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(xy) \frac{1}{y} \operatorname{lof} \left| \frac{y-1}{y+1} \right| dy , \tag{21}$$

pour toute fonction paire $f \in L^p$, $1 < p < \infty$.

On a que

$$\| M^*\tilde{f} \|_\infty \leq C \| f \|_\infty , \quad \text{pour toute fonction paire } f \in L^\infty \cap L^p, 1 < p < \infty.$$

Soit g une fonction impaire dans $H_1 \cap H_2$. Prenant une fonction paire $f \in L^\infty$ qui est nulle dans un voisinage de 0, respectivement de ∞. En remarquant que $\tilde{g}$ est paire dans $L^1 \cap L^2$, et que $\mathfrak{F}M^*f = M\mathfrak{F}f$ pour $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} \int_0^x \tilde{g}(t)dt f(x)dx &= \int_{-\infty}^\infty \tilde{g}(t) M^*f(t)dt \\ &= -\int_{-\infty}^\infty \mathfrak{F}^{-1}g(t)(-i \operatorname{sgn} t \mathfrak{F}M^*f(t))dt \\ &= -\int_{-\infty}^\infty \mathfrak{F}^{-1}g(t) M\mathfrak{F}\tilde{f}(t)dt \\ &= -\int_{-\infty}^\infty g(t) M^*\tilde{f}(t)dt = O(\| g \|_1 \| f \|_\infty) . \end{aligned}$$

Donc

$$\| M\tilde{g} \|_1 = \sup_{\text{telles } f : \| f \|_\infty \leq 1} \left| \int_{-\infty}^\infty M\tilde{g}(t) f(t)dt \right| \leq C \| g \|_1 ,$$

pour toute $g \in H_1 \cap H_2$ (impaire).

Dans le cas où $g \in H_1$, prenons $g_m \in H_1 \cap H_2$ telles que $\| g_m - g \|_{H_1} \to 0$. D'après le lemme de Fatou, on a

$$\| M\tilde{g} \|_1 = \| \lim_{m \to \infty} M\tilde{g}_m \|_1 \leq C \| g \|_1 ,$$

ce qui montre (20).

Revenons à la démonstration du théorème. Désignons

$$F_{x_o}(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t),$$

on a $F_{x_o}(t) = - \tilde{\tilde{F}}_{x_o}(t)$, $\tilde{F}_{x_o}$ impaire et $\tilde{F}_{x_o} \in H_1$. Alors

$$\| MF_{x_o} \|_1 \leq C \| \tilde{F}_{x_o} \|_1 \leq C \| f \|_{H_1} ,$$

d'où le théorème.

Remarques. — 1. Ce théorème peut être utilisé pour démontrer que $f_s \in H_1 \Rightarrow f \in L \log^+ L$. En effet, prenant $x_0 = 0$, on a $(f_s)^+ \log \frac{1}{t} \in L^1$; prenant $x_0 = \pi$, on a $(f_s)^- \log \frac{1}{\pi - t} \in L$. Ce qui montre que f^+ et f^- sont dans $L \log^+ L$.

2. Long (Acta Math. Sinica 20 (1977), 215-221) et M. Kinukawa et S. Igari (Tôhoku Math. J. 13 (1961), 274-280) ont étudié des problèmes relatifs.

4. SUR L'HYPOTHÈSE (T)

Maintenant montrons que l'hypothèse (T) est une conséquence de la condition « R » de [*2*] :

(22) condition « R » : $E(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_n) \leq d E(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_{n-1})$,

$$- \infty < n < \infty , \quad \text{pour tout } F \in \mathfrak{F}, \ | F | < \infty .$$

PROPOSITION 1. — *La condition « R » implique l'hypothèse* (T).

Preuve. — Soit $(\gamma_n)_{-\infty}^{\infty}$ un processus positif adapté à $\{ \mathfrak{F}_n \}$, et soit $\lambda > 0$, vérifiant $| \{ \gamma^* > \lambda \} | < \infty$. Définissons le t. d'a. τ_λ comme suit

$$\tau_\lambda = \inf \left\{ n : \omega \in \left\{ E(\mathbb{1}(\{ \gamma_{n+1} > \lambda \}) \mid \mathfrak{F}_n) \geq \frac{1}{d} \right\} \right\} = \inf \{ n : \omega \in G_{n+1} \} .$$

a) On a $| \{ \tau_\lambda < \infty \} | \leq d \, | \{ \gamma^* > \lambda \} |$.

En effet, pour $N \in \mathbb{Z}^+$, définissons t. d'a. $\tau_\lambda^{(N)} = \inf \{ n \geq - N : \omega \in G_{n+1} \}$, on a

$$\{ \tau_\lambda^{(N)} = n \} = \{ \omega : \omega \notin G_{j+1}, \ - N \leq j < n, \ \text{et } \omega \in G_{n+1} \} \subset G_{n+1} , \quad n > - N ,$$

$$\{ \tau_\lambda^{(N)} = - N \} = \{ \omega : \omega \in G_{-N+1} \} = G_{-N+1} ,$$

alors

$$\{ \tau_\lambda^{(N)} = n \} = G_{n+1} \cap \{ \tau_\lambda^{(N)} = n \} = \left\{ \begin{aligned} &E(\mathbb{1}(\{ \gamma_{n+1} > \lambda \} \cap \{ \tau_\lambda^{(N)} = n \}) \mid \mathfrak{F}_n) \\ &= E(\mathbb{1}(\{ \gamma_{n+1} > \lambda \}) \mid \mathfrak{F}_n)\mathbb{1}(\{ \tau_\lambda^{(N)} = n \}) \geq \frac{1}{d} \end{aligned} \right\}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^{\infty} | \{ \tau_\lambda^{(N)} = n \} | &\leq d \sum_{-N}^{\infty} E(E(\mathbb{1}(\{ \gamma_{n+1} > \lambda \} \cap \{ \tau_\lambda^{(N)} = n \}) \mid \mathfrak{F}_n)) \\ &= d \sum_{-N}^{\infty} | \{ \gamma_{n+1} > \lambda \} \cap \{ \tau_\lambda^{(N)} = n \} | \\ &\leq d \sum_{-N}^{\infty} | \{ \gamma^* > \lambda \} \cap \{ \tau_\lambda^{(N)} = n \} | \leq d \, | \{ \gamma^* > \lambda \} | . \end{aligned}$$

Puisque

$$\{ \tau_\lambda = \infty \} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \{ \tau_\lambda^{(N)} = \infty \} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \{ \omega : \omega \notin G_{n+1}, \ n \geq -N \}$$

avec les termes décroissants, alors

$$\{ \tau_\lambda < \infty \} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{ \tau_\lambda^{(N)} < \infty \}$$

avec les termes croissants, et donc

$$| \{ \tau_\lambda < \infty \} | = \lim_{N \to \infty} | \{ \tau_\lambda^{(N)} < \infty \} | \leq d \, | \{ \gamma^* > \lambda \} | .$$

En particulier, $| \{ \tau_\lambda = -\infty \} | = 0$, parce que

$$\{ \tau_\lambda = -\infty \} \in \bigcap_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_n \qquad \text{et} \qquad | \{ \gamma^* > \lambda \} | < \infty .$$

b) On a $\{ \gamma^* > \lambda \} \subset \{ \tau_\lambda < \infty \}$.

En effet, soit $\omega \in \{ \gamma^* > \lambda \}$, alors il existe $n < \infty$ tel que $\omega \in \{ \gamma_{n+1} > \lambda \}$. Puisque

$$\mathbb{1}(\{ \gamma_{n+1} > \lambda \}) = E(\mathbb{1}(\{ \gamma_{n+1} > \lambda \} \mid \mathfrak{F}_{n+1}) \leq d E(\mathbb{1}(\{ \gamma_{n+1} > \lambda \}) \mid \mathfrak{F}_n),$$

alors $\{ \gamma_{n+1} > \lambda \} \subset G_{n+1}$, et donc $\tau_\lambda(\omega) \leq n < \infty$.

c) On a $\gamma_{\tau_\lambda}^* \mathbb{1}(\{ \tau_\lambda < \infty \}) \leq \lambda$.

En effet,

$$\tau_\lambda = n \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{j \leq n} G_j \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{j \leq n} \{ \gamma_j > \lambda \} \Rightarrow \gamma_n^* \leq \lambda ,$$

alors $\gamma_{\tau_\lambda}^* \mathbb{1}(\{ \tau_\lambda < \infty \}) \leq \lambda$.

d) On a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \Rightarrow \tau_{\lambda_1} \geq \tau_{\lambda_2}$, car

$$\begin{aligned} &E(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda_2\}) \mid \mathfrak{F}_n) \\ &\qquad = E(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda_1\}) \mid \mathfrak{F}_n) + E(\mathbb{1}(\{\lambda_1 \geq \gamma_{n+1} > \lambda_2\}) \mid \mathfrak{F}_n). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition.

On peut démontrer que la condition « R » est équivalente à la condition suivante (on a donné dans [*2*] des indications de la démonstration) :

(22′) condition « R′ » : pour tout $F_n \in \mathfrak{F}_n$, il existe au moins un $G_n \in \mathfrak{F}_{n-1}$, tel que $F_n \subset G_n$ et $|G_n| \leq d|F_n|$, $-\infty < n < \infty$.

PROPOSITION 2. — *Les conditions « R » et « R′ » sont équivalentes.*

Preuve. — Pour tout $F_n \in \mathfrak{F}_n$, en posant

$$G_n = \left\{ E(1(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) \geq \frac{1}{d} \right\},$$

on peut montrer que « R » $\Rightarrow$ « R′ ». Pour la réciproque, il suffit de démontrer que pour tout $F_n \in \mathfrak{F}_n$, $|F_n| < \infty$, on a

$$\mathbb{1}(F_n) \leq dE(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}). \tag{23}$$

Soit $F_n \in \mathfrak{F}_n$, alors il existe $G_n \in \mathfrak{F}_{n-1}$ tel que $F_n \subset G_n$ et $|G_n| \leq d|F_n|$. Mais on peut montrer que

$$F_n \subset \{ E(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) > 0 \} \subset G_n. \tag{24}$$

En effet, en posant $F_0 = \{ E(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = 0 \}$, on a

$$|F_n \cap F_0| = \int_{F_0} \mathbb{1}(F_n) d\mu = \int_{F_0} E(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) d\mu = 0,$$

ce qui entraîne que

$$F_n \subset F_0' \qquad (' \text{ désigne le complément d'ensemble}).$$

Puisque

$$E(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) \mathbb{1}(G_n') = E(\mathbb{1}(F_n \cap G_n') \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = 0,$$

on a

$$G_n' \subset F_0, \qquad F_0' \subset G_n.$$

Ce qui démontre (24), qui entraîne que sous la condition « R′ », on a

$$|\{ E(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) > 0 \}| \leq d|F_n|, \qquad \text{pour tout } F_n \in \mathfrak{F}_n, |F_n| < \infty. \tag{25}$$

Maintenant, pour $F_n \in \mathfrak{F}_n$ étant donné, posons

$$H_n = \left\{ E(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) < \frac{1}{d} \right\} \cap F_n.$$

Puisque

$$E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1})\mathbb{1}(H_n) \leq E(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1})\mathbb{1}(H_n) < \frac{1}{d},$$

alors on a

$$H_n \subset \{ 0 < E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) \} \cap \left\{ E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) < \frac{1}{d} \right\} = K_n \in \mathfrak{F}_{n-1}.$$

Donc, en utilisant (25), on obtient

$$| K_n | \leq | \{ E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) > 0 \} | \leq d \mid H_n \mid.$$

On en déduit que

$$| H_n | = \int_{K_n} \mathbb{1}(H_n) d\mu = \int_{K_n} E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) d\mu < \frac{1}{d} | K_n | \leq | H_n |,$$

donc $| H_n | = 0$. Ce qui implique que $F_n \subset \left\{ E(1(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) \geq \frac{1}{d} \right\}$, c'est-à-dire (23).

Ce qui termine la démonstration de la proposition.

Remarques. — 1. La condition « R » est déjà connue. Par exemple, sous cette condition, Brossard [*10*] a obtenu l'inégalité $\| S(f) \|_p \leq C_p \| f^* \|_p$ $(0 < p < \infty)$ pour des martingales à deux indices.

2. On peut montrer aisément que $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu, \{ \mathfrak{F}_n \}_{-\infty}^{\infty})$ atomique régulier avec la constante α, satisfait à (22) avec $d = \frac{1}{\alpha}$; et que $(\mathbb{T}, \mathscr{B}, d\theta, \{ \mathfrak{F}_n \}_{n \geq 0})$ de Gundy-Varopoulos [*11*] avec l'entier r satisfait à (22) avec $d = r$. Mais il n'est pas tellement évident de vérifier qu'ils satisfont à la condition de régularité de Burkholder-Gundy (pour cette condition, voir [*12*]). D'ailleurs, si on suppose que toutes les martingales positives satisfont à la condition de régularité de B-G, alors la condition « R » est satisfaite. En effet, si pour toute $f \in L^1$, $f \geq 0$, on a

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} = \sum_{j=1}^{N} V_n^{(j)} \gamma_n^{(j)},$$

où $V_n^{(j)}$ est mesurable par rapport à $\mathfrak{F}_{n-1}$, et $\gamma_n^{(j)}$ vérifie

$$\| \gamma_n^{(j)} \|_\infty \leq B, \qquad E(\gamma_n^{(j)} \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = 0, \qquad E(\gamma_n^{(j)} \bar{\gamma}_n^{(l)} \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = \delta_{j,l},$$

alors on peut montrer que pour toute $f \in L^1$, $f \geq 0$, on a

$$f_n \leq f_{n-1} + | \Delta f_n | \leq f_{n-1} + NB^2 E(| \Delta f_n | | \mathfrak{F}_{n-1}) \leq (1 + 2\, NB^2) f_{n-1}.$$

3. Quand $\{ \mathfrak{F}_n \}_{n \geq 0}$ est une famille décroissante, la situation est pareille. Tous les résultats restent encore vrais. Dans ce cas, dans (1), (2), (3), (4), (22) et (22′), il faut remplacer $\{ \tau_\lambda < \infty \}$ par $\{ \tau_\lambda > 0 \}$; « $\lambda_1 \geq \lambda_2 \Rightarrow \tau_{\lambda_1} \geq \tau_{\lambda_2}$ » par « $\lambda_1 \geq \lambda_2 \Rightarrow \tau_{\lambda_1} \leq \tau_{\lambda_2}$ » et $n - 1$ par $n + 1$.

RÉFÉRENCES

[*1*] R. E. EDWARDS, G. I. GAUDRY, Littlewood-Paley and multiplier theory. *Ergebnisse der Math.*, t. **90**, 1977, Springer-Verlag.

[*2*] JUI-LIN LONG, Martingale régulière et Φ-inégalités avec poids entre f^*, $S(f)$ et $\sigma(f)$. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **291**, 1980, p. 31-34.

[*3*] A. BERNARD, B. MAISONNEUVE, Décomposition atomique de martingales de la classe H_1. Sém. Prob. XI, *Lect. Notes*, t. **581**, 1977, p. 303-323. Springer-Verlag.

[*4*] B. DAVIS, Hardy spaces and rearrangements. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **261**, 1980, p. 211-233.

[*5*] R. R. COIFMAN, G. WEISS, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **83**, 1977, p. 569-645.

[*6*] E. M. STEIN, Note on the class L log L. *Studia Math.*, t. **32**, 1969, p. 305-310.

[*7*] R. F. GUNDY, On the class L log L, martingales and singular integrals. *Studia Math.*, t. **33**, 1969, p. 109-118.

[*8*] A. M. GARSIA, *Martingale inequalities*. Sem. Notes on Recent Progress. W. A. Benjamin Inc, 1973.

[*9*] J. Neveu, *Martingales à temps discret*. Masson, Paris, 1972.

[*10*] J. BROSSARD, Généralisation des inégalités de Burkholder et Gundy aux martingales régulières à deux indices. *C. Acad. Sci.* (Paris), t. **288**, 1979, p. 267-270.

[*11*] R. F. GUNDY, N. TH. VAROPOULOS, A martingale that occurs in harmonic analysis. *Ark. for Math.*, t. **14**, 1976, p. 179-187.

[*12*] R. F. GUNDY, Inégalités pour martingales. *Lect. Notes in Math.*, t. **774**, 1980, p. 252-334. Springer-Verlag.

(Manuscrit reçu le 7 novembre 1980).