ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GUY JUMARIE

# Sur une nouvelle méthode d'introduction des facteurs de subjectivité dans les problèmes d'estimation statistique

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 16, nº 4 (1980), p. 349-369
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_4_349_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section B :
Vol. XVI, n° 4, 1980, p. 349-369. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Sur une nouvelle méthode d'introduction des facteurs de subjectivité dans les problèmes d'estimation statistique (*)

par

**Guy JUMARIE**

Université du Québec à Montréal, Département de Mathématiques,
C. P. 8888, Montréal, H3C 3P8

SOMMAIRE. — Le but de cet article est de proposer un modèle permettant d'évaluer la fiabilité d'un résultat statistique obtenu à partir d'un questionnaire qui n'élimine pas complètement les facteurs de subjectivité dus aux répondants.

Après un bref rappel de la méthode Bayesienne et de la méthode basée sur la théorie des ensembles flous, nous donnons les principaux éléments d'un nouveau calcul subjectiviste basé essentiellement sur une exploitation de la transformation de Lorentz qui, croyons-nous, a une interprétation subjectiviste, lorsqu'on l'utilise en dehors de la physique relativiste.

Ce calcul est ensuite appliqué au cas de l'estimation statistique de la moyenne d'une population de variance connue.

ABSTRACT. — The purpose of this article is to describe a new approach to the estimation of subjectivity in sampling techniques.

After a brief background on the Bayesian approach and on the fuzzy approach, we give the basic elements of a new subjectivistic calculus which is essentially based upon the Lorentz transformation which does have a subjectivistic meaning when applied outside relativistic physics.

This calculus is then used in the statistical estimation of the mean of a population whose the standard deviation is known.

(*) Travail subventionné par le « Conseil National de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada ».

## 1. INTRODUCTION

La subjectivité se situe à deux niveaux dans les processus d'observation (voir fig. 1) d'un observable

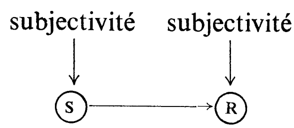


FIG. 1. — Processus d'observation de S par R.

S par un observateur R. Il y a la subjectivité due à l'observateur lorsqu'il émet son jugement subjectif au sujet de S, et il y a la subjectivité au niveau de S lui-même lorsque ce dernier répond aux questions qui lui sont posées par R. Nous pensons évidemment au cas où S et R sont tous les deux des êtres humains comme dans les problèmes de sondages statistiques, par exemple.

Alors que la probabilité se réfère à la génération physique même du processus, la subjectivité concerne plutôt le phénomène d'observation lui-même, et dans ce sens, il convient de faire la différence entre les deux, afin de pouvoir quantifier leurs effets respectifs.

### 1.1. L'école Bayesienne des subjectivistes.

Savage [*1*] fut le premier, sinon à introduire (Bayes l'avait déjà fait avant) tout au moins à systématiser l'utilisation de la subjectivité en statistique. D'après son école dite « des subjectivistes », il n'est nullement nécessaire de croire que la nature suit effectivement les lois de probabilité *a priori* que l'on se fixe, mais il suffit de voir celle-ci comme la matérialisation de ce que pense le statisticien sur les vrais états de cette nature. En fait, dans cette ligne de pensée, il n'y a pas vraiment de différence entre probabilité et subjectivité et les deux forment un tout indissociable dans la *probabilité a priori*. On ne cherchera pas vraiment à évaluer l'influence propre à la subjectivité dans le processus d'observation. Simplement, le statisticien changera son opinion après avoir observé les vraies valeurs des paramètres du système en question, ce qui le conduira à une *probabilité objective* ou *probabilité a posteriori*.

L'objection que l'on peut émettre à l'encontre de cette attitude peut être formulée en la question suivante : « Comment estimer l'effet propre de la subjectivité lorsque, précisément, pour des raisons d'ordre pratique, il est impossible d'exploiter une suite récurrente de « probabilités *a priori* » et de « probabilités *a posteriori* ».

### 1.2. **La théorie des ensembles flous.**

La théorie des ensembles flous imaginée par Zadeh [*2*] (voir aussi Kaufman [*3*]) est l'autre modèle qui se propose d'introduire les facteurs subjectifs dans la description des processus d'observation, en général, et dans le calcul des probabilités en particulier.

Rappelons que si $X = \{ x \}$ est une collection d'objets dont l'élément générique est représentée par $x$, un *ensemble flou* A dans X est un ensemble de couples

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in X \};$$

$\{ \mu_A : X \to [0, 1], x \mapsto \mu_A(x) \}$ est la *signature* de $x$ et représente en quelque sorte le « degré de vérité » de l'énoncé « $x$ appartient à A ». C'est une généralisation immédiate de la notion de *fonction caractéristique* $\Phi_A(x)$ d'un ensemble, au sens usuel du terme.

A partir de ce concept, Zadeh [*4*] définit la probabilité $p(A)$ d'un événement flou par l'expression

$$p(A) \triangleq \int \mu_A(x) dp(x)$$

où $dp(x)$ est une distribution de probabilités. La moyenne de $f(x)$ est alors

$$\langle f(x) \rangle \triangleq \int \mu_A(x) f(x) dp(x)$$

Les critiques que soulève cette approche sont nombreuses.

*a*) Globalement, ce modèle donne l'impression d'être une généralisation formelle des théories classiques obtenue en remplaçant partout l'ensemble $\{ 0, 1 \}$ par l'intervalle $[0, 1]$ le tout motivé par une simple intuition, mais sans support expérimental réel (ce qui n'est pas le cas des probabilités).

*b*) Il est clair que la signature $\mu_A(x)$ dépend de l'observateur qui examine $x$, et ce fait n'est introduit nulle part dans la théorie : on devrait avoir des lois de compositions permettant de passer d'un observateur à un autre.

*c*) Ce caractère arbitraire même de la définition des ensembles flous a engendré plusieurs types « d'algèbres flous » et, au stade actuel du développement de la théorie, en l'absence d'expérimentation systématique, on ne sait encore laquelle d'entre elles est la bonne ou si elles ont chacune leurs domaines spécifiques d'application.

*d*) La signature est le résultat du processus d'observation de la fonction caractéristique de l'ensemble par un observateur extérieur R, et, donc, est une conséquence de la subjectivité de R, mais elle ne saurait être en elle-même une mesure de ce subjectivisme. Si on ajoute à cela que l'élément fondamental en analyse est, non pas l'ensemble, mais l'élément de l'ensemble, on en arrive à ce que ce modèle est incapable de fournir une méthode efficace permettant d'évaluer la part de subjectivité qui intervient dans l'observation d'une probabilité, d'où certaines limites préjudicielles dans les problèmes de statistique, par exemple.

Dans ce qui suit nous allons précisément proposer un nouveau calcul subjectiviste qui procède à partir de la notion de subjectivité elle-même et non plus à partir de la notion de fonction caractéristique. Après un bref rappel sur les équations de Lorentz, nous montrons que celles-ci semblent particulièrement convenir à la description de processus d'observation avec subjectivité, ensuite nous obtiendrons les ensembles subjectifs et leurs lois de composition, et enfin la notion de variable subjective nous conduira directement à un calcul subjectiviste. Comme application, nous montrerons comment cette approche pourrait permettre de déterminer la quantité de subjectivité qui est contenue dans certains résultats d'enquête statistique.

## 2. SUR LA SUBJECTIVITÉ

Nous dirons que le jugement, l'appréciation d'un individu sur quelqu'un ou quelque chose est subjectif s'il ne repose sur aucune expérience quantitative, ce qui le rend par là même, affectif, arbitraire, partial. Lorsqu'un individu donné n'émet qu'un jugement unique sur un seul événement, on ne peut strictement parler de la subjectivité du jugement ou du subjectivisme du rapporteur. Il y a subjectivité lorsqu'on passe d'un individu à un autre ou lorsqu'un même individu est amené à redonner son jugement à des instants distincts sur un même événement.

La subjectivité est essentiellement différente de la probabilité en ce sens qu'un individu ne tire pas au sort son jugement avant de l'exprimer. Ce jugement global est la résultante de divers facteurs d'appréciation partielle, il obéit à une certaine « logique » propre à l'individu, et bien qu'il y ait certaines fluctuations de jugement chez un même individu sur un même sujet, on constate néanmoins l'existence d'une tendance principale qui pourrait caractériser le subjectivisme de l'individu.

Il ne faut pas se cacher la difficulté qu'il y a à représenter quantitativement la notion de subjectivité. Alors que le concept de probabilité part de la définition fréquentielle bien connue, il en est tout au contraire de celui de subjectivité qui est le résultat d'une modélisation *a priori*, sans résultats expérimentaux préalables, et c'est d'ailleurs là l'une des faiblesses essentielles de la théorie des ensemble flous.

Néanmoins, en attendant une meilleure définition expérimentale, il semble, d'après certaines expériences conduites avec l'aide de psychologues, qu'une mesure fréquentielle, analogue à celle des probabilités, soit convenable dans certains cas, du fait précisément du caractère répétitif du subjectivisme chez certains sujets.

Toute la question, dès lors, est de représenter formellement cette subjectivité et d'en définir les lois.

Pour l'ensemble $\{ A : x \geq x_0 \}$ de la figure 2 *a* dont la fonction caractéristique est $\Phi_A(x)$, Zadeh suggère d'utiliser une signature comme $\mu_A(x)$ pour tenir compte de la subjectivité de l'observateur qui a à décider si $x$ appartient ou n'appartient pas à A. Mais $\mu_A(x)$ ne peut à elle seule définir la subjectivité en question puisque cette dernière est très certainement nulle

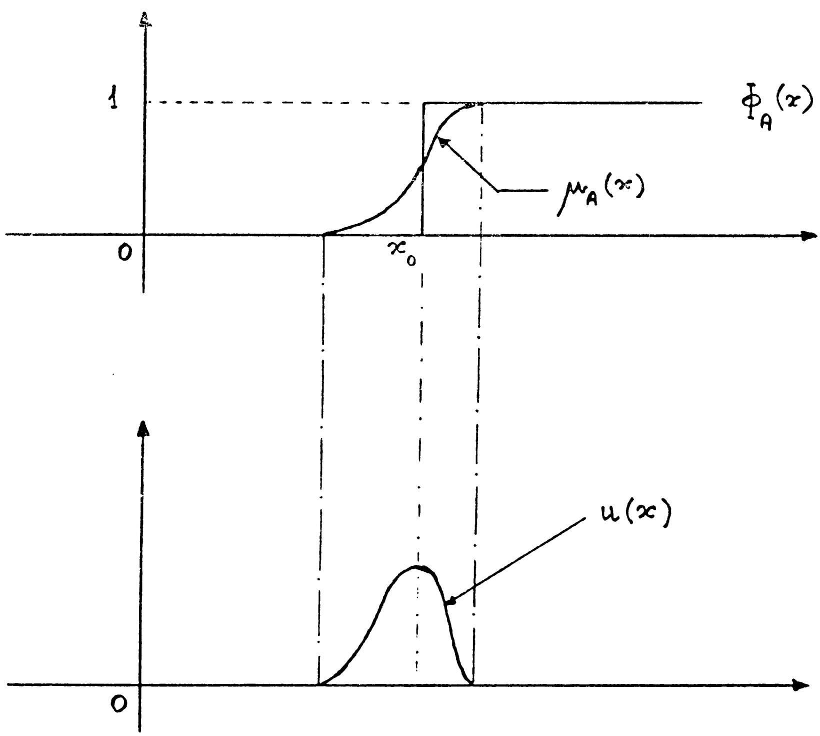


FIG. 2. — Signature et fonction de subjectivité.

lorsque $x$ est très inférieur ou au contraire très supérieur à $x_0$. Cette subjectivité pourrait être par exemple une fonction de l'écart

$$e(x) \triangleq \Phi_A(x) - \mu_A(x),$$

qui s'annule lorsque cet écart est nul. Ce pourrait être aussi une fonction qui s'apparente quelque peu à la dérivée $\mu'_A(x)$. En tout état de cause la subjectivité de A sera caractérisée non pas par $\mu_A(x)$ mais par une fonction $u(x)$ dont l'allure est donnée par la figure 2 *b*. De plus cette fonction de subjectivité devrait dépendre explicitement de l'observateur R, ce que nous écrirons $u_A(x/R)$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons voir comment le formalisme de la relativité restreinte et plus particulièrement les équations de Lorentz, convenablement interprétées, permettent de préciser la signification physique de $u_A(x/R)$ et de construire une algèbre par rapport à A et R.

## 3. PROCESSUS D'OBSERVATION SUBJECTIVE

Notre hypothèse de base est l'utilisation du formalisme de la relativité restreinte pour représenter certains phénomènes subjectifs au niveau de l'observation.

### 3.1. Rappels sur la relativité restreinte.

Dans un modèle simplifié qui sera suffisant pour notre propos, considérons deux axes $C \equiv Ox$ et $C' \equiv O'x'$ qui remplissent les conditions suivantes : l'origine O se déplace sur l'axe $O'x'$ avec une vitesse constante $u$, tandis que C et C′ restent confondus. O′ est fixe. Soit M un point qui se déplace sur C avec une vitesse constante $v$ par rapport à O.

En mécanique classique, la vitesse de M par rapport à un observateur R′ placé en O′ est $(v + u)$.

En mécanique relativiste restreinte, la vitesse de M par rapport à R′ est $v'$ défini par

$$v' = \frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}}, \tag{3.1}$$

où $c$ représente la vitesse de la lumière. Ce résultat est une conséquence directe des équations de Lorentz, soit

$$x' = \rho(u)(x + ut) \tag{3.2}$$

$$t' = \rho(u)\left(t + \frac{u}{c^2}x\right) \tag{3.3}$$

avec

$$\rho(u) \triangleq \left[1 - \frac{u^2}{c^2}\right]^{-1/2} \tag{3.4}$$

où $x$ représente la position du point M sur C, et $t$ l'instant correspondant, tandis que $x'$ et $t'$ sont les variables analogues dans C'.

### 3.2. **Processus d'observation subjective.**

On peut donner aux équations (3.2) et (3.3) de Lorentz la signification suivante, en terme d'observation. Si on considère $(x, t)$ comme le vecteur de coordonnées qui est mesuré par un observateur R situé en O, pour localiser M; $(x', t')$ est alors le vecteur de coordonnées obtenu par R', mais dans un processus de mesure dans lequel R' utilise R pour observer M, de telle sorte que R' se sert du résultat $(x, t)$ de la mesure par R pour définir sa propre mesure $(x', t')$ : R' observe M par l'intermédiaire de R, ce que l'on écrira (M/R/R').

Notre postulat essentiel est que ce modèle pourrait s'appliquer à n'importe quel processus d'observation d'un système S par un observateur R, pourvu qu'il fasse intervenir des facteurs subjectifs dus à l'observateur, de telle sorte qu'il puisse être considéré comme relativiste dans sa nature même.

Avec cette interprétation, supposons donc que S soit décrit par deux variables scalaires $\xi$ et $\eta$, et supposons que $\eta$ soit le paramètre qui joue un rôle analogue à celui du temps en mécanique. R observe S, mesure ainsi les valeurs $\xi$ et $\eta$ pour les paramètres de S, ce que nous écrirons $\xi(S/R)$ et $\eta(S/R)$. Ensuite, R transmet les résultats de sa mesure à R', qui ainsi obtient $\xi(S/R/R')$ et $\eta(S/R/R')$. Mais R lui-même est un système par rapport à R', et est donc défini par deux variables $\xi(R/R')$ et $\eta(R/R')$. Définissons $u(R/R')$ par l'expression

$$u(R/R') \triangleq d\xi(R/R')/d\eta(R/R'). \tag{3.5}$$

Dans ces conditions, d'après les équations de Lorentz, il existerait une constante $\tilde{c}$, dont la signification physique et la valeur reste à déterminer, telle que l'on ait

$$\xi(S/R/R') = \rho(u)[\xi(S/R) + u(R/R')\eta(S/R)] \tag{3.6}$$

$$\eta(S/R/R') = \rho(u)\left[\eta(S/R) + \frac{1}{\tilde{c}^2}\, u(R/R')\xi(S/R)\right], \tag{3.7}$$

où $\rho(u)$ est encore donné par l'équation (2.4) dans laquelle on a remplacé $c$ par $\tilde{c}$.

Nous définirons ce modèle comme le « processus d'observation subjective (S/R/R') », représenté sur la figure 3.

$$\mathrm{R}' \xleftarrow{(\mathrm{S/R/R'})} \mathrm{R} \xleftarrow{(\mathrm{S/R})} \mathrm{S}$$

FIG. 3. — Processus d'observation subjective (S/R/R').

## 4. ENSEMBLES SUBJECTIVISTES

### 4.1. Construction des ensembles subjectivistes.

Nous allons construire les ensembles subjectivistes de la façon suivante :

*i*) Soit U un ensemble (discret ou continu) d'objets dont l'élément générique est noté $x$, et soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ une classe, un ensemble de U au sens mathématique de ce terme, c'est-à-dire un ensemble bien défini par ses caractéristiques. Un observateur R' considère un élément $x$ de U et se propose de déterminer si $x$ est dans A ou s'il est à l'extérieur de A. On suppose que l'observation de $x$ par R' est entachée d'une certaine subjectivité. Comment modéliser ce processus d'observation subjective?

*ii*) En fait, la classe A est définie par un ensemble de caractéristiques (par exemple, *taille*, *âge*...) et R' essaie de retrouver ces caractéristiques dans $x$. En d'autres termes, nous avons le processus d'observation $(\mathrm{A}/x/\mathrm{R}')$ dans lequel, c'est A qui est observé par R' à travers l'élément $x$.

*iii*) L'expérience montre que, plus ou moins inconsciemment, R' examine simultanément et plus ou moins indépendamment l'un de l'autre, si $x \in \mathrm{A}$ ou si $x \notin \mathrm{A}$. Autrement dit R' détermine la valeur de la fonction caractéristique de A au point $x$, soit $\Phi_{\mathrm{A}}(x)$; et de même il détermine la valeur de la fonction caractéristique $\Phi_{\bar{\mathrm{A}}}(x)$ du complément de A, en ce même point $x$. Mais les déterminations de $\Phi_{\mathrm{A}}(x)$ et $\Phi_{\bar{\mathrm{A}}}(x)$ étant plus ou moins simultanées et indépendantes, nous sommes donc amené à admettre que, dans ce contexte subjectif, les valeurs « $\Phi_{\mathrm{A}}(x)$ observée » et « $\Phi_{\bar{\mathrm{A}}}(x)$ observée » auront une somme généralement différente de l'unité.

Il en résulte donc que, pour l'observateur R', A est défini de façon absolue, par les deux fonctions caractéristiques $\Phi_{\mathrm{A}}(x)$ et $\Phi_{\bar{\mathrm{A}}}(x)$.

*iv*) Les valeurs $\Phi'_{\mathrm{A}}(x/\mathrm{R}')$ et $\Phi'_{\bar{\mathrm{A}}}(x/\mathrm{R}')$ observées par R', pour $\Phi_{\mathrm{A}}(x)$ et $\Phi_{\bar{\mathrm{A}}}(x)$ respectivement, sont alors données par les équations de Lorentz

$$\Phi'_{\mathrm{A}}(x/\mathrm{R}') = \rho(u)[\Phi_{\mathrm{A}}(x) + u(x/\mathrm{R}')\Phi_{\bar{\mathrm{A}}}(x)] \tag{4.1}$$

$$\Phi'_{\bar{A}}(x/R') = \rho(u)\left[\Phi_{\bar{A}}(x) + \frac{1}{c^2}u(x/R')\Phi_A(x)\right] \tag{4.2}$$

où la fonction $u(x/R')$ et la constante $c$ doivent être explicitement définies.

Au stade actuel de notre construction, nous avons sans raisons solides, assigné à $\Phi'_{\bar{A}}(x/R')$ le rôle analogue à celui du temps de la mécanique. Fort heureusement, nous verrons dans quelques lignes qu'il y a une complète symétrie entre $\Phi_A(x/R')$ et $\Phi_{\bar{A}}(x/R')$.

On a le lemme suivant :

LEMME 1. — Les deux processus d'observation $(A/x/R')$ et $(\bar{A}/x/R')$ font intervenir la même fonction $u(x/R')$ et la même constante $c = 1$. ∎

*Démonstration.* — Supposons que le modèle $(\bar{A}/x/R')$ ait pour équations

$$\Phi'_{\bar{A}}(x/R') = \rho(u_1)[\Phi_{\bar{A}}(x) + u_1(x/R')\Phi_A(x)] \tag{4.3}$$

$$\Phi'_A(x/R') = \rho(u_1)\left[\Phi_A(x) + \frac{1}{c^2}u_1(x/R')\Phi_{\bar{A}}(x)\right] \tag{4.4}$$

où $c$ est évidemment la même constante que précédemment.

*a*) Lorsque $x \in A$, les équations (4.1) et (4.4) procurent

$$\rho(u) - \rho(u_1) \equiv 0 \quad , \quad \forall x \in A,$$

d'où

$$u(x/R') = u_1(x/R') \quad , \quad \forall x \in A.$$

De là (4.2) et (4.3) donnent

$$c = 1.$$

*b*) Maintenant on suppose $x \in \bar{A}$; alors les équations (4.2) et (4.3) donnent

$$u(x/R') = u_1(x/R') \quad , \quad \forall x \in \bar{A},$$

tandis que (4.1) et (4.4) donnent à nouveau $c = 1$. ∎

Nous arrivons ainsi à la définition suivante :

DÉFINITION 1. — Ensembles subjectivistes ES. Soit $A \subset U = \{x\}$ un ensemble donné dont l'élément générique est dénoté $x$; et soit $\Phi_A(x)$ et $\Phi_{\bar{A}}(x)$ la fonction caractéristique de A et celle de son complément $\bar{A}$. Un observateur R' qui observe A, observera $\Phi_A(x)$ et $\Phi_{\bar{A}}(x)$ sous la forme de *signatures subjectivistes* (SR dans la suite) $\Phi'_A(x/R')$ et $\Phi'_{\bar{A}}(x/R')$ définies par les équations

$$\Phi'_A(x/R') = \rho(u_A)[\Phi_A(x) + u_A(x/R')\Phi_{\bar{A}}(x)] \tag{4.5}$$

$$\Phi'_{\bar{A}}(x/R') = \rho(u_A)[\Phi_{\bar{A}}(x) + u_A(x/R')\Phi_A(x)] \tag{4.6}$$

où $u_A(./R') : U \to [0, M] \subset [0, 1]$, $x \to u_A(x/R') \geq 0$ est la *fonction de flou de l'ensemble* A *étant donné l'observateur* R′ ou encore la *fonction de subjectivité de l'observateur* R′ *par rapport à l'ensemble* A, et où $\rho(u_A)$ est défini par l'expression (3.4). ■

La fonction $u_A(x/R')$ dépend à la fois de l'ensemble A et de l'observateur R′ : deux observateurs R′ et R″ différents peuvent observer un même ensemble A avec des fonctions de flou $u_A(x/R')$ et $u_A(x/R'')$ différentes, et c'est dans ce sens que nous pouvons dire que $u_A(x/R')$ tient compte explicitement de la subjectivité de l'observateur R′.

A strictement parler, il n'est pas nécessaire d'imposer la condition

$$0 \leq u_A(x/R') \leq 1,$$

mais celle-ci reste tout à fait en accord avec l'acception usuelle que nous pouvons avoir pour la mesure du flou ou de la subjectivité.

Étant donné que le flou d'un ensemble A est essentiellement variable avec la subjectivité de l'observateur, nous parlerons dans la suite, de *l'ensemble flou subjectiviste* A étant donné l'observateur R′, ou plus simplement de l'ensemble subjectiviste (A/R′).

### 4.2. Quelques définitions immédiates.

DÉFINITION 2. — Ensemble vide. L'ES (A/R′) est vide si et seulement si

$$\Phi'_A(x/R') = 0 \quad , \quad \forall x \in U. \quad ■$$

*Motivation.* — Cette définition se justifie de la façon suivante. Si A est vide pour l'observateur R′, celui-ci n'a donc aucune incertitude de nature subjective sur la définition de A, et par conséquent on a

$$\Phi'_A(x/R') \equiv \Phi_A(x).$$

Inversement, si $\Phi'_A(x/R') \equiv 0$, alors $\Phi_A(x)$ et $u_A(x/R')\Phi_{\bar{A}}(x)$ sont identiques à 0, et par conséquent $\Phi_A(x)$ et $u_A(x/R')$ sont eux-mêmes zéro.

DÉFINITION 3. — Ensemble contenu dans un autre ensemble.

*i*) L'ES(A/R′) est contenu dans l'ES(B/R″), ce que nous écrirons (A/R′) ⊂ (B/R″), si et seulement si

$$\Phi'_B(x/R'') \geq 1$$

pour tout $x$ tel que

$$\Phi'_A(x/R') \geq 1$$

*ii*) (A/R′) et (B/R″) sont égaux, ce qu'on écrira (A/R′) = (B/R″), lorsque (A/R′) ⊂ (B/R″) et (B/R″) ⊂ (A/R′). ■

*Motivation.* — Cette définition se justifie par le fait que nous ne pouvons pas dire que deux ensembles sont identiques simplement parce que leurs signatures subjectivistes sont égales, étant donné que nous pouvons avoir, par exemple

$$u_A(x/R') \neq u_A(x/R'')$$

pour un même A.

## 5. INTERSECTION D'ENSEMBLES SUBJECTIVISTES

### 5.1. Résultat.

On énonce.

PROPOSITION 1. — Soit $u_B(x/(A, R')/R'')$ la fonction de flou de B étant donné R″, conditionnel au couple (A, R′), qui intervient dans le processus d'observation au cours duquel R″ détermine la signature de $x$ par rapport à l'ensemble B, étant donné que R′ a déjà déterminé la signature de $x$ par rapport à A. Soit (R′, R″) le processus séquentiel au cours duquel R′, le premier, observe, et ensuite seulement, R″ observe. Dans de telles conditions, le processus d'observation de Lorentz appliqué à l'intersection AB avec l'observateur composé (R′, R″) définit un nouvel ES dont les signatures relativistes sont

$$\Phi'_{AB}(x/R', R'') = \rho(u_{AB})[\Phi_{AB}(x) + u_{AB}(x/R', R'')\Phi_{\overline{AB}}(x)] \qquad (5.1)$$

$$\Phi'_{\overline{AB}}(x/R', R'') = \rho(u_{AB})[\Phi_{\overline{AB}}(x) + u_{AB}(x/R', R'')\Phi_{AB}(x)] \qquad (5.2)$$

où $u_{AB}(x/R', R'')$, qui est la fonction de flou de AB étant donné le couple (R′, R″), est défini par l'expression

$$u_{AB}(x/R', R'') = \frac{u_A(x/R') + u_B(x/(A, R')/R'')}{1 + u_A(x/R')u_B(x/(A, R')/R'')} . \quad \blacksquare \qquad (5.3)$$

*Démonstration.* — *a*) Nous revenons au modèle physique d'où est dérivée notre formulation et nous considérons trois axes parallèles $C \equiv Ox$, $C' \equiv O'x'$ et $C'' \equiv O''x''$ comme l'indique la figure 4. $u'$ est la vitesse

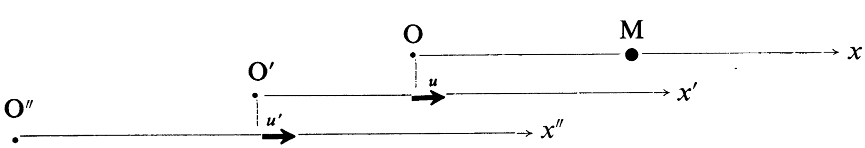


FIG. 4. — Composition des vitesses en relativité.

de O′ sur C″, et $u$ est celle de O sur C′. Dans le cadre de la physique relativiste restreinte, un point M immobile sur O$x$ se déplacera par rapport à O″$x$″ avec la vitesse $u''$,

$$u'' = \frac{u + u'}{1 + (uu'/c^2)} \tag{5.4}$$

Dans notre modèle d'observation subjective, C, C′ et C″ sont trois observateurs R, R′ et R″; et R″ *observe le point* M *par l'intermédiaire de* R *et* R′ *dans la combinaison en cascade* R/R′. Nous dirons (M/R/R′/R″).

*b*) Dans le contexte des ensembles subjectivistes, nous considérons le processus d'observations multiples (B/A/$x$/R′, R″) qui est à prendre comme suit : R″ observe B par l'intermédiaire de $x$, étant donné que R′ a déjà observé A à travers ce même $x$. En comparant ce modèle avec celui du sous-paragraphe *a*) ci-dessus, nous faisons l'identification suivante :

$$\begin{aligned} &\mathrm{M} \equiv \mathrm{B},\ \mathrm{R} \equiv \mathrm{A},\ \mathrm{R}' \equiv x,\ \mathrm{R}'' \equiv (\mathrm{R}', \mathrm{R}'') \\ &u \ \ \equiv u_{\mathrm{A}}(x/\mathrm{R}') \\ &u' \ \equiv u_{\mathrm{B}}(x/(\mathrm{A}, \mathrm{R}')/\mathrm{R}'') \\ &u'' \equiv u_{\mathrm{AB}}(x/\mathrm{R}', \mathrm{R}''), \end{aligned}$$

et l'équation (4.4) donne le résultat final. ■

## 5.2. **Dépendance et indépendance.**

L'intersection de (A/R′) et (B/R″) n'est pas commutative, et généralement on a

$$(\mathrm{AB}/\mathrm{R}', \mathrm{R}'') \neq (\mathrm{BA}/\mathrm{R}'', \mathrm{R}').$$

De façon analogue, on peut avoir

$$u_{\mathrm{A}}(x/(\mathrm{A}, \mathrm{R}')/\mathrm{R}'') \neq u_{\mathrm{A}}(x/\mathrm{R}''),$$

ce qui suggère le concept suivant d'indépendance.

DÉFINITION 4. — Deux ES(A/R′) et (B/R″) sont *indépendants* si on a

$$u_{\mathrm{A}}(x/(\mathrm{B}, \mathrm{R}'')/\mathrm{R}') = u_{\mathrm{A}}(x/\mathrm{R}'), \tag{5.5}$$
$$u_{\mathrm{B}}(x/(\mathrm{A}, \mathrm{R}')/\mathrm{R}'') = u_{\mathrm{B}}(x/\mathrm{R}''). \tag{5.6}$$

On dit que les observateurs R′ et R″ sont *indépendants* si pour tout A ⊂ U, on a

$$u_{\mathrm{A}}(x/(\mathrm{A}, \mathrm{R}'')/\mathrm{R}') = u_{\mathrm{A}}(x/\mathrm{R}')$$
$$u_{\mathrm{A}}(x/(\mathrm{A}, \mathrm{R}')/\mathrm{R}'') = u_{\mathrm{A}}(x/\mathrm{R}''). \quad ■$$

Il est clair que l'indépendance d'observateurs, telle qu'elle est définie, est due essentiellement aux facteurs subjectifs qui interviennent dans tout processus d'observation. Si je considère par exemple la « classe des jolies femmes » mon jugement au sujet de la beauté de telle ou telle femme peut se laisser influencer par l'opinion de mon frère ou de quelqu'un d'autre.

## 6. UNION D'ENSEMBLES SUBJECTIVISTES

On a :

PROPOSITION 2. — On reprend les conditions de la proposition 1. Le processus d'observation de Lorentz appliqué à l'union A + B avec l'observateur composé (R′, R″) définit un ES, dénoté (A + B/R′, R″), par les signatures relativistes

$$\Phi_{A+B}(x/R', R'') = \rho(u_{AB})[\Phi_{A+B}(x) + u_{AB}(x/R', R'')\Phi_{\overline{A+B}}(x)] \qquad (6.1)$$
$$\Phi_{\overline{A+B}}(x/R', R'') = \rho(u_{AB})[\Phi_{\overline{A+B}}(x) + u_{AB}(x/R', R'')\Phi_{A+B}(x)]. \quad \blacksquare \qquad (6.2)$$

*Démonstration.* — *a*) D'après le lemme du sous-paragraphe (4.1), on a

$$u_{\overline{A}}(x/R') = u_A(x/R'). \qquad (6.3)$$

Cela étant, considérons la fonction de flou $u_B(x/(A, R')/R'')$. Nous ne connaissons pas son expression mathématique exacte, mais nous pouvons affirmer qu'il existe une certaine fonctionnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$u_B(x/(A, R')/R'') = f[u_A(x/R'), x, R'']$$

d'où, d'après (6.3),

$$u_B(x/(A, R')/R'') = u_B(x/(\overline{A}, R')/R''). \qquad (6.4)$$

Il en résulte

$$u_{AB}(x/R', R'') = u_{\overline{A}\,\overline{B}}(x/R', R''). \qquad (6.5)$$

*b*) Cela étant, l'équation (5.2) procure directement

$$\Phi_{\overline{A}+\overline{B}}(x/R') = \rho(u_{AB})[\Phi_{\overline{A}+\overline{B}}(x) + u_{AB}(x/R')\Phi_{AB}(x)]$$

ou encore

$$\Phi'_{A+B}(x/R') = \rho(u_{\overline{A}\,\overline{B}})[\Phi_{A+B}(x) + u_{\overline{A}\,\overline{B}}(x/R')\Phi_{\overline{A}\,\overline{B}}(x)],$$

et de là l'équation (6.5) donne le résultat cherché. ■

## 7. LOI DE COMPOSITION POUR LES OBSERVATEURS

Le problème de composition d'observateurs survient toutes les fois qu'un observateur R″ détermine la signature d'un élément par rapport à A sachant que cette opération a déjà été faite par un autre observateur R′, de telle sorte que le jugement connu de ce dernier peut affecter l'appréciation de R″. En fait, ce modèle n'est rien d'autre que l'intersection des ES(A/R′) et (A/R″), de telle sorte que la proposition 1 donne directement :

COROLLAIRE. — *Fonction de flou ou fonction de subjectivité pour un observateur composé.* On considère le processus d'observation dans lequel un observateur R″ détermine la signature d'un élément $x$ par rapport à A, sachant qu'un autre observateur R′ a déjà réalisé la même opération (c'est-à-dire détermination de la signature de $x$ par rapport à A). D'après la proposition 1, la fonction de subjectivité résultante $u_A(x/R', R'')$ est

$$u_A(x/R', R'') = \frac{u_A(x/R') + u_A(x/(A, R')/R'')}{1 + u_A(x/R')u_A(x/(A, R')/R'')} . \quad \blacksquare \tag{7.1}$$

Évidemment, lorsque les observateurs sont indépendants, on a

$$u_A(x/R', R'') = \frac{u_A(x/R') + u_A(x/R'')}{1 + u_A(x/R')u_A(x/R'')} .$$

## 8. VARIABLES SUBJECTIVISTES

Cette approche relativiste à la subjectivité fournie une définition directe du concept de variable flou relativiste ou plus exactement de variables subjectivistes, en utilisant la fonction de subjectivité elle-même plutôt que la signature relativiste.

### 8.1. Variable subjectiviste.

DÉFINITION 5. — Une *variable subjectiviste* X *étant donné l'observateur* R′, dénotée (X/R′), est une application $u_X(./R') : \mathbb{R} \to [0, M] \subset [0, 1]$, $x \mapsto u_X(x/R')$, qui est positive et telle que

$$\begin{aligned} u_X(-\infty/R') &= u_X(+\infty/R') \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Les événements $(X \leq x)$ et $(X \geq x)$ sont alors des événements subjectivistes pour l'observateur R′ qui les observe avec la fonction de subjectivité $u_X(x/R')$, soit

$$S_u(X \leq x; R') = S_u(X \geq x; R') \tag{8.2}$$

$$= u_X(x/R'). \tag{8.3}$$

$u_X(x/R')$ est la *fonction de flou de la variable X étant donné l'observateur* R′

ou encore la *fonction de subjectivité de l'observateur* R′ *par rapport à la variable X.* ■

La notation $S_u(.;R')$ est à prendre comme « Subjectivité sur l'événement (.) étant donné R′. »

### 8.2. **Quelques remarques.**

*a*) La symétrie de l'équation ((8.2) provient du fait que $u_X(x/R')$ est la fonction de flou de l'ensemble $(-\infty, x]$ pour l'observateur R′. Quant à la condition (8.1), elle signifie simplement que l'observateur R′ n'a aucune incertitude de nature subjective quant aux événements $(X \geq -\infty)$ et $(X \leq +\infty)$.

*b*) $u_X(x/R')$ est essentiellement attaché à la subjectivité de l'observateur R′ et ne traite aucunement des probabilités elles-mêmes. C'est ainsi qu'une variable pourra être à la fois subjective et aléatoire.

*c*) D'après la loi de composition des ensembles flous relativistes on a

$$S_u(a \leq X \leq b\,;\, R') = \frac{u_X(a/R') + u_X(b/R')}{1 + u_X(a/R')u_X(b/R')} \tag{8.4}$$

d'où, en faisant $a = b = x$,

$$S_u(X = x\,;\, R') = \frac{2u_X(x/R')}{1 + u_X^2(x/R')} \tag{8.5}$$

$$\triangleq v_X(x/R'). \tag{8.6}$$

Cette fonction $v_X(x/R')$ sera de quelque utilité par la suite, et on l'appellera *seconde fonction de flou* de X étant donné R′, ou encore *seconde fonction de subjectivité de* R′ par rapport à X.

*d*) L'équation (8.4) s'applique au cas d'observateurs R′ et R″ différents, pourvu qu'ils soient indépendants. C'est ainsi qu'on a

$$S_u\{(a \leq X\,;\, R')\cdot(X \leq b\,;\, R'')\} = \frac{u_X(a/R') + u_X(b/R'')}{1 + u_X(a/R')u_X(b/R'')} \tag{8.7}$$

d'où

$$S_u(X = x\,;\, R', R'') = \frac{u_X(x/R') + u_X(x/R'')}{1 + u_X(x/R')u_X(x/R'')} \tag{8.8}$$

## 9. VECTEUR SUBJECTIVISTE

La définition 3 se généralise immédiatement aux vecteurs de variables subjectivistes.

Par exemple, dans le cas du vecteur (X, Y/R′, R″) où X est observé par R′ tandis que Y est observé par R″, la fonction de flou de (X, Y/R′, R″) est une application $u_{XY}(\,.\,/R', R'') : \mathbb{R}^2 \to [0, M] \subset [0, 1]$, $(x, y) \mapsto u_{XY}(x, y/R', R'')$ qui a la signification pratique suivante

$$u_{XY}(x, y/R', R'') = S_u\{ X \leq x, Y \leq y ; R', R'' \} \tag{9.1}$$
$$= S_u\{ X \geq x, Y \geq y ; R', R'' \} \tag{9.2}$$

$u_{XY}(x, y/R', R'')$ est la fonction de flou du couple (X/R′) et (Y/R″), et on a évidemment

$$u_{XY}(\infty, \infty/R', R'') = 0. \tag{9.3}$$

Un calcul analogue à celui qui nous a conduit à l'équation (8.5) donne

$$S_u\{ X \leq x, Y = y ; R', R'' \} = \frac{2u_{XY}(x, y/R', R'')}{1 + u_{XY}^2(x, y/R', R'')} \tag{9.4}$$

et

$$S_u\{ X = x, Y = y ; R', R'' \} = \frac{4u_{XY}(x, y/R', R'')[1 + u_{XY}^2(x, y/R', R'')]}{1 + 6u_{XY}^2(x, y/R', R'') + u_{XY}^4(x, y/R', R'')}$$
$$\triangleq v_{XY}(x, y/R', R'').$$

$v_{XY}(x, y/R', R'')$ est la *seconde fonction de flou du couple* (XY/R′, R″) ou encore la *seconde fonction de subjectivité des observateurs* R′ et R″ *par rapport aux variables* X et Y.

### 9.2. **Fonction de subjectivité marginale.**

Définition 6. — La *fonction de subjectivité marginale* de (X/R′) est

$$u_{XY}(x, \infty/R', R'') = S_u\{ X \leq x, Y \leq \infty ; R', R'' \}. \tag{9.7}$$

C'est la subjectivité de l'observateur R′ par rapport à X, indépendamment de (Y/R′). ∎

On en déduit

$$S_u\{ X = x ; R', R'' \} = \frac{2u_{XY}(x, \infty/R', R'')}{1 + u_{XY}^2(x, \infty/R', R'')}. \tag{9.8}$$

### 9.3. **Fonction de subjectivité conditionnelle.**

Étant donné deux événements subjectifs (A/R′) et (B/R″), l'événement subjectif conditionnel (A/R′)/(B/R″), c'est-à-dire l'événement (A/R′) étant donné (B/R″) a la fonction de subjectivité $S_u\{ (A/R')/(B/R'') \}$, c'est-à-dire

$$S_u\{ (A/R')/(B/R'') \} = \frac{S_u(B/R'') + S_u\{ (A/R')/(B/R'') \}}{1 + S_u(B/R'') \cdot S_u\{ (A/R')/(B/R'') \}}.$$

En termes de variables subjectivistes, nous posons

$$(A/R') \equiv (X \leq x;\, R'),$$
$$(B/R'') \equiv (Y = y;\, R''),$$

d'où

$$\{(A/R')/(B/R'')\} \equiv \{X \leq x/Y = y = y;\, R',\, R''\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} S_{u_{X/Y}}\{X \leq x/Y = y;\, R',\, R''\} \\ &= \frac{S_u\{X \leq x,\, Y = y\,;\, R',\, R''\} - S_u\{Y = y\,;\, R',\, R''\}}{1 - S_u\{X \leq x,\, Y = y\,;\, R',\, R''\}\, S_u\{Y = y\,;\, R',\, R''\}} \quad (9.9) \\ &\triangleq u_{X/Y}(x,\, y/R',\, R'') \quad (9.10) \end{aligned}$$

La fonction $u_{X/Y}(x, y/R', R'')$ ainsi définie est la *fonction de flou conditionnel* de la variable $(X/R')$ étant donné que $(Y/R'') = (y/R'')$; ou encore la *fonction de subjectivité* de $R'$ *par rapport* à $x$ étant donné que $(Y/R'') = (y/R'')$.

### 9.4. Dépendance et indépendance de variables subjectivistes.

Nous reprenons à nouveau le couple de variables $(X, Y/R', R'')$ avec sa fonction de flou $u_{XY}(x, y/R', R'')$.

DÉFINITION 7. — On dira que les variables subjectivistes $(X/R')$ et $(Y/R'')$ sont indépendantes si on a

$$u_{XY}(x,\, y/R',\, R'') = \frac{u_{XY}(x,\, \infty/R',\, R'') + u_{XY}(\infty,\, y/R',\, R'')}{1 + u_{XY}(x,\, \infty/R',\, R'')u_{XY}(\infty,\, y/R',\, R'')}. \quad \blacksquare \quad (9.11)$$

Cette définition est tout à fait naturelle si on la compare à la définition de l'intersection d'ensembles subjectivistes et à la définition de la fonction de subjectivité marginale. En effet, si $(X/R')$ et $(Y/R'')$ sont indépendants, on a

$$S_u\{X \leq x,\, Y \leq y\,;\, R',\, R''\} = \frac{S_u\{X \leq x\,;\, R'\} + S_u\{Y \leq y\,;\, R''\}}{1 + S_u\{X \leq x\,;\, R'\}.S_u\{Y \leq y\,;\, R''\}} \quad (9.12)$$

d'où la relation (9.11).

## 10. PERSPECTIVES EN STATISTIQUES

### 10.1 Un cas particulier.

Dans ce paragraphe, nous voulons avant tout montrer comment notre modèle pourrait permettre d'évaluer les effets propres au phénomène de subjectivité dans les problèmes d'estimation statistique; aussi, nous limiterons-nous à un cas extrêmement simple qui sera néanmoins suffisant pour notre propos.

Il est bien connu que, sous certaines hypothèses, l'intervalle de confiance de la moyenne $\mu$ d'une population est donné par l'équation

$$Pr\left\{\overline{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha \tag{10.1}$$

où $\overline{X}$ est la moyenne de l'échantillon prélevée, $n$ est la taille de cet échantillon, $\sigma$ est l'écart-type connu de la population, tandis que $Z_{\alpha/2}$ est défini par la condition

$$Pr\{ Y \geq Z_{\alpha/2} \} = \alpha/2$$

où Y suit la loi normale N(0, 1).

Supposons alors que la variable $\overline{X}$ soit entachée d'une certaine subjectivité due à des facteurs humains. Il est alors tout à fait naturel d'essayer de calculer la subjectivité de cette estimation, autrement dit la subjectivité

$$S_u\{ L \leq \mu \leq M \}$$

où on a posé

$$L \triangleq \overline{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{10.2}$$

et

$$M \triangleq \overline{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} . \tag{10.3}$$

L'utilité d'un tel calcul est évident. Si la subjectivité est très faible, le résultat statistique garde toute sa signification, par contre, si cette subjectivité est de l'ordre de $(1 - \alpha)$, il n'a plus grande valeur.

Nous opérerons de la façon suivante :

*i*) Une remarque préliminaire. Soit une variable X dont la seconde fonction de subjectivité est $v_X(x)$; et supposons que l'observation de X ait fourni la valeur $x_0$. Nous pouvons en conclure que cette valeur $x_0$ a été mesurée avec la subjectivité $v_X(x_0)$. De façon analogue, on dira que la vraie valeur de X est inférieure (ou supérieure) à $x_0$ avec la subjectivité $u_X(x_0)$.

*ii*) Cela étant, pour une variable subjectiviste X, la relation

$$S_u(X - r \leq \tilde{x} \,;\, R') = S_u(X \leq \tilde{x} + r \,;\, R')$$

donne

$$u_{X-r}(\tilde{x}/R') = u_X(\tilde{x} + r/R') \,; \tag{10.4}$$

autrement dit, la fonction de subjectivité de la variable X $-$ $r$ est la translatée de la fonction de subjectivité de la variable X dans le changement d'axe

$$x = \tilde{x} + r.$$

Ainsi, si nous posons, d'une part

$$X \equiv \overline{X} \qquad \text{et} \qquad r \equiv Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

et d'autre part

$$X = \overline{X} \qquad \text{et} \qquad r \equiv - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

on pourra obtenir les fonctions de subjectivité des variables L et M respectivement, moyennant la connaissance préalable de la fonction de subjectivité de $\overline{X}$.

*iii*) Supposons alors qu'on ait obtenu les valeurs $L_0$ et $M_0$ pour L et M respectivement; d'après l'équation (8.5), la subjectivité de l'intervalle $[L_0, M_0]$ est

$$\frac{u_L(L_0/R') + u_M(M_0/R')}{1 + u_L(L_0/R')u_M(M_0/R')} \tag{10.5}$$

qui est le résultat cherché.

*iv*) Il nous reste donc à déterminer la fonction de subjectivité de la moyenne $\overline{X}$.

Nous poserons

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \tag{10.6}$$

et nous désignerons par $u_{X_n}(x/R_n)$ la fonction de subjectivité de la variable $X_n$ étant donné l'observateur ou le répondeur $R_n$.

Chaque variable $X_i$ étant observée séparément (par opposition à ce qui se passe lorsqu'on observe simplement le résultat global $\overline{X}_n$) la fonction d'incertitude résultante est celle de l'ensemble $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, et d'après la loi de composition de la subjectivité, on a

$$u_{n\overline{X}_n}(x) = \frac{u_{(n-1)\overline{X}_{n-1}}(x) + u_{X_n}(x/R_n)}{1 + u_{(n-1)\overline{X}_{n-1}}(x) \cdot u_{X_n}(x/R_n)}, \tag{10.7}$$

qui est la formule de récurrence permettant de calculer $u_{N\overline{X}}(x)$ où N désigne la taille de l'échantillon. De là on passe à $u_{\overline{X}}(x)$ au moyen de la relation générale

$$u_{rX}(x) = u_X\left(\frac{x}{r}\right) \quad , \quad r > 0.$$

## 10.2. **Commentaires.**

*i*) Il est facile de voir que la subjectivité sur $\overline{X}$ croît avec la taille N de l'échantillon, d'où il résulte une embarrassante contradiction.

En effet, d'après le théorème limite central, il est souhaitable que cet échantillon soit aussi grand que possible, mais ce faisant, nous accroissons la subjectivité sur le résultat.

*ii*) Si la subjectivité sur $\overline{X}$ est réduite à une tache sur l'axe des $x$, on peut espérer sortir de celle-ci en choisissant $Z_{\alpha/2}$ aussi grand que possible, mais ce faisant, on diminue la précision de l'estimation.

*iii*) Il est clair qu'un questionnaire bien élaboré supprime tout effet de subjectivité; mais le but de ce travail est précisément d'essayer d'évaluer la fiabilité d'un résultat obtenu à partir d'un questionnaire mal construit.

## 11. CONCLUSION

Notre hypothèse fondamentale de travail a été de donner une interprétation en terme de subjectivité à la transformation de Lorentz; ce qui n'est pas si surprenant qu'il puisse sembler à première vue.

*a*) En effet, la transformation de Lorentz exprime le changement de vitesse d'un référentiel à un autre; par ailleurs la subjectivité est variable d'un observateur à un autre; et nous postulons simplement que les lois de ces changements de la vitesse et de la subjectivité sont les mêmes.

*b*) De plus, pour des subjectivités faibles par rapport à l'unité, l'équation (5.3) fournit

$$u_{AB}(x/R', R'') \cong u_A(x/R') + u_B(x/A, R')/R''),$$

et nous avons là une loi additive tout à fait analogue à la loi de composition d'une incertitude, ou encore de l'entropie au sens de Shannon.

*c*) L'utilisation de la transformation de Lorentz suppose implicitement que la subjectivité a une valeur maximale qu'elle ne peut dépasser, ce qui traduit simplement l'effet de saturation qui se manifeste dans des expressions comme « très, très, très, très belle ».

*d*) Plus généralement, nous avons montré [*5*] [*6*] que ce modèle lorentzien fournit une description adéquate des systèmes informationnels toutes les fois que la sémantique propre à l'observateur devient importante.

La difficulté principale dans notre modèle de subjectivité est la suivante. Au contraire des probabilités qui sont définies expérimentalement au moyen d'une fréquence, notre fonction de subjectivité a été obtenue formellement à partir d'un formalisme déjà existant à d'autres fins. Le problème reste donc de déterminer expérimentalement ces fonctions. Des premières expériences réalisées avec des psychologues laissent à penser qu'une définition fréquentielle de la subjectivité puisse fournir une première approche satisfaisante. Il reste à approfondir les recherches dans ce sens.

## RÉFÉRENCES


[1] L. J. SAVAGE, *The foundation of Statistics*, Wiley, New York, 1954.

[2] L. A. ZADEH, Fuzzy sets. *Information and Control*, t. **8**, n° 3, 1965, p. 338-353.

[3] A. KAUFMANN, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*, Masson, Paris, 1973.

[4] L. A. ZADEH, Probability measures of fuzzy events. *J. Math.-Analysis and Applications*, t. **10**, 1968, p. 421-427.

[5] G. JUMARIE, *Subjectivité, information, systèmes. Synthèse pour une cybernétique relativiste*. Édition Univers, Montréal, 1979.

[6] G. JUMARIE, Théorie relativiste de l'information et télécommunication. Perspectives. *Annales des Télécommunications*, t. **33**, n° 1-2, 1978, p. 13-27.

[7] G. JUMARIE, Théorie relativiste de l'information. IV. Sur l'introduction de facteurs subjectifs dans les processus de communication. *Annales des Télécommunications*, t. **35**, n° 7-8, 1980, p. 281-296.