ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL WEBER

Analyse asymptotique des processus gaussiens stationnaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, n° 2 (1980), p. 117-176
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_2_117_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré Section B :
Vol. XVI, n° 2, 1980, p. 117-176. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Analyse asymptotique des processus gaussiens stationnaires

par

Michel WEBER
Université Louis-Pasteur, Département de Mathématique,
Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 1, Strasbourg

CONTENU

I. INTRODUCTION

Soit $X(t)$, $t \geq 0$ un processus gaussien centré stationnaire de covariance $r(h) = E[X(t).X(t + h)]$ continue avec $r(0) = 1$, nous supposons que

(H_1) X est presque sûrement majoré sur toute partie bornée,
(H_2) $r(t) = 0(1/\text{Log } t)$ $t \to \infty$.

Nous nous proposons sous ces hypothèses d'étudier le comportement à l'infini des trajectoires de X. L'analyse asymptotique de celles-ci comprend deux aspects principaux : la représentation des classes, du processus X au moyen de tests intégraux et le problème de la stabilité des trajectoires de X relativement à une fonction g sur $\mathbb{R}_+$ croissante, notions que nous précisons dès maintenant.

DÉFINITION 1.1. — *La classe* $\mathcal{U}_\infty(X)$ *(resp.* $\mathcal{L}_\infty(X)$*) d'un processus gaussien centré* $X(t)$, $t \geq 0$, *est l'ensemble de fonctions* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *croissantes telles que* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$ *et,*

$$P\{\exists t_\omega < \infty \text{ tel que } \forall t > t_\omega, \ |X(\omega, t)| \leq \varphi(t)\} = 1 \text{ (resp. 0).}$$

DÉFINITION 1.2. — *Un processus gaussien centré,* $X(t)$, $t \geq 0$, *est stable relativement à g où g* : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est croissante et* $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$, *lorsque*

$$P\left\{\omega : 0 < \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|X(\omega, t)|}{g(t)} < \infty\right\} = 1$$

La nature même des énoncés soulève aussitôt la question de savoir si les événements figurant dans ceux-ci ont une probabilité égale à 0 ou 1. On peut tout d'abord constater à ce propos que si $\operatorname{Sup}_{t\geq 0} E[X_t^2]$ est fini, l'expression $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(\omega, t)}{g(t)}$ correspond à la moitié de l'oscillation au point $t = +\infty$ du prolongement par continuité en moyenne quadratique du processus gaussien $Y(t) = \frac{X(t)}{g(t)}$ au point $t = +\infty$ en $Y(+\infty) = 0$ p. s., et que cette oscillation étant purement déterministe, on a par conséquent

$$P\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(t)}{g(t)} = \text{Const.}\right\} = 1.$$

Dans la première définition, il est nécessaire de supposer la stationnarité de X sur $\mathbb{R}_+$ pour pouvoir répondre à cette question, dans ce cas, celle-ci est de type ergodique. Ce problème est traité dans [*18*]; disons simplement que (H_2) suffit pour obtenir la loi du 0-1 et que dans [*18*], ce résultat est établi sous l'hypothèse nettement affaiblie $r(u) \to 0$, $u \to \infty$.

Les résultats acquis dans un passé proche sont de deux types, le premier (étude des classes) s'est traduit par l'élaboration de bons tests intégraux lorsque le processus gaussien centré X vérifie non seulement (H_1) et (H_2), mais a une fonction de covariance présentant de fortes propriétés de régularité en 0 ($\sqrt{1 - r(t)}$ est une fonction de Karamata d'exposant strictement positif). Cela oblige dans la pratique à se restreindre au cas très particulier où $\sqrt{1 - r(t)}$ se comporte en t^α, $(0 < \alpha < 1)$, au point $t = 0$. Le second type (stabilité des trajectoires), s'il recourt à une notion moins précise que celle des classes, a le grand avantage de fournir de très bonnes évaluations de g lorsque X est très irrégulier (cas des séries trigonométriques aléatoires gaussiennes).

Ces résultats ont été obtenus par Marcus, quant à ceux du premier type ils ont pour auteurs principaux Qualls, Pickands, Watanabe, Kôno.

Dans cet article, nous suivons presque toujours les hypothèses (H_1) et (H_2) sauf mention expresse (p. ex. § 2, 3, 8). Au paragraphe 5, nous construisons un processus μ sur $\mathbb{R}_+$ centré défini par

$$\mu(\omega, t) = \operatorname{sgn}(X(\omega, t))m(t)$$

où *a*) $\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a > 0 \\ -1 & \text{si} \quad a \leq 0 \end{cases}$

b) m dépend de X et $m(t) \to 0$, $t \to \infty$,

et nous caractérisons pour tout Δ assez grand les classes à l'infini des processus $X - \Delta\mu$ à l'aide d'un test intégral commun. Dans le paragraphe 4, nous indiquons un moyen de modifier le processus X, en faisant intervenir des perturbations non plus de type additif comme avant, mais multiplicatives, donc nettement moins fines, celles-ci permettant de faire coïncider ses classes avec celles de toute suite gaussienne normale.

Nous mettons aussi en évidence des parties $\theta_X \subset \mathbb{R}_+$ telles que

— $\forall n \geq 1$, $\#(\theta_X \cap [n, n + 1]) < \infty$,
— $\forall n \geq 1$, $\#(\theta_X \cap [n, \infty]) = \infty$,

et $\pi_X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante telle que $\lim_{t\to\infty} \pi_X(t) = 0$, pour lesquelles

1) les classes du processus $\{ X(s), s \in \theta_X \}$ sont caractérisées par un test intégral,

2) si $\varphi \in \mathscr{U}_\infty(\{ X(s), s \in \theta_X \})$ alors $\varphi + \pi_X \in \mathscr{U}_\infty(X)$,

3) la classe $\mathscr{L}_\infty(\{ X(s), s \in \theta_X \}) \subset \mathscr{L}_\infty(X)$ diffère très peu de $\mathscr{L}_\infty(X)$ dans les cas « réguliers ».

Au paragraphe 6, nous illustrons les résultats précédents en traitant quatre exemples typiques pour ce genre d'étude (où $\sigma(t) = \sqrt{2(1 - r(t))}$ est à croissance régulière d'exposant nul pour les trois derniers)

$$- \sigma(t) = t^\alpha \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

$$- \sigma(t) = \left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{-\beta}, \quad \beta > \frac{1}{2},$$

$$-\ \sigma(t) = \exp\left(-\left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{\gamma}\right) \qquad 0 < \gamma < 1,$$

$$-\ \sigma(t) = \left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{Log}\log\frac{1}{t}\right)^{-b}, \quad b > 1,$$

au voisinage de 0.

Dans le paragraphe 7, nous étudions la nature de l'ensemble

$$A_{\varphi}(\omega) = \{ t \geq 0 : X(\omega, t) > \varphi(t) \}$$

pour certaines fonctions φ continues de classe $\mathscr{L}_{\infty}(X)$. Nous montrons que $\lambda(A_{\varphi}(\omega))$ est infinie presque sûrement (λ est la mesure de Lebesgue) et plus précisément pour tout $S > 0$,

$$P\left\{ \varlimsup_{T\to\infty} \frac{\lambda(A_{\varphi}(\omega) \cap [S, T])}{\int_S^T \psi \circ \varphi(u)du} \geq 1 \right\} = 1$$

lorsque l'intégrale $\int^{+\infty} \psi \circ \varphi(u)du$ est divergente et $\varphi(t) \underset{\cap}{\cup} \sqrt{\log t}$, t tendant vers l'infini. Sous cette dernière condition seulement, nous établissons aussi pour tout $S > 0$

$$P\left\{ \varlimsup_{T\to\infty} \frac{\lambda(A^c_{\varphi}(\omega) \cap [S, T])}{T} = 1 \right\} = 1.$$

Les hypothèses sur X sont (H_1) et (H_2).

Ce dernier résultat montre que l'étude des classes associées à un processus gaussien ne suffit pas pour décrire le comportement à l'infini des trajectoires de X.

Le paragraphe 8 traite de la stabilité des trajectoires de X à l'infini, il contient un test non publié dû à X. Fernique sur l'oscillation locale ou globale de celles-ci.

Nous établissons à présent un théorème de loi lequel fournira un bon encadrement de $P\{ \| X - \mu_{\lambda} \|_T > \lambda \}$ (où μ_{λ} est du type défini plus haut) exprimé en termes de fonctions d'entropie métrique. Ceci fait l'objet du paragraphe 2. La démonstration de ce résultat est relativement compliquée. Aussi pour l'illustrer, nous en donnons immédiatement après, une application en établissant un théorème sur l'intégrabilité des processus gaussiens stationnaires à trajectoires continues qui montre que pour toute partie bornée T de $\mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, les variables aléatoires

$$\exp\left[\frac{1}{2}(\| X \|_T - \varepsilon)^2\right]$$

sont intégrables.

Ce théorème montre aussi que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction

$$\varphi_\varepsilon(t) = \sqrt{2 \log t} + \varepsilon$$

appartient à la classe $\mathcal{U}_\infty(X)$.

Je remercie vivement M. le Professeur X. Fernique pour l'intérêt constant qu'il a porté à mes travaux, ses critiques, ses conseils m'ont toujours été précieux et m'ont stimulé.

II. ENCADREMENT DE $P\{\|X - \mu_t\| > t\}$

On considère un processus gaussien centré $\{X(t),\ t \in T\}$ où T est un ensemble arbitraire muni de deux écarts d et

$$d_X(s, t) = \|X(s) - X(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

liés par la relation

(h_0) $\exists 0 < \gamma \leq C < \infty$ tels que : $\gamma d \leq d_X \leq Cd$ sur T,

on suppose aussi,

(h_1) $\forall t \in T,\ \|X(t)\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

(h_2) $\displaystyle\int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} M_d(T, u)}\,du < \infty$, où pour tout $u > 0$, $M_d(T, u)$ définit le cardinal maximal des suites $S \subset T$, vérifiant

$$* \qquad - \forall s, t \in S,\ s \neq t,\ d(s, t) > u.$$

On constate aisément que la condition intégrale (h_2) assure la finitude des nombres $M_d(T, u)$ pour tout $u > 0$. De plus, la fonction $M_d(T, u)$ est continue à droite et possède une limite finie à gauche (cadlag). Enfin, on note $S_d(T, u)$ une des suites maximales pour la relation *; on a donc $\displaystyle\bigcup_{s \in S_d(T,u)} B_d^f(s, u) = T$.

Introduisons la fonction suivante

$$\forall u \in]0, H_0] \quad , \quad h(u) = \frac{1}{u}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{M_d(T, u)}{u}},$$

où

$$H_0 = \inf\{0 < u \leq 1 : M_d(T, u) < 2\},$$

alors h est continue à droite, décroissante sur $]0, H_0]$ et $\lim_{h \to 0} h(u) = +\infty$. Nous définissons sur l'intervalle $[h(H_0), \infty)$ une de ses inverses en posant

$$\forall t \in [h(H_0), \infty) \quad , \quad v(t) = \inf\{0 < u \leq H_0 : h(u) \leq t\}$$

Cette fonction jouera un rôle clé dans la suite. Remarquons immédiatement que la continuité à droite de h montre

— $h(v(t)) \leq t$ pour tout $t \geq h(\mathrm{H}_0)$ et,
— $h(x) > t$ pour tout $x < v(t)$.

Nous choisissons $\rho \in]0, 1[$ que nous fixons une fois pour toutes. Soient alors $\delta > 0$, $1 > \varepsilon \geq 0$, $\Delta > 0$, $t > 0$, $\lambda > 0$, liés entre eux par les conditions suivantes,

a) $\Delta > \mathrm{C}\sqrt{2} \vee \dfrac{1+\varepsilon}{\rho\delta}\mathrm{C}^2$,

b) $v(\delta t) < \dfrac{\sqrt{1-\rho}}{\mathrm{C}}$ et $t > h(\mathrm{H}_0) \vee \dfrac{\Delta}{(1-\varepsilon)\rho(1-\rho)} \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u)}{u}}\,du$,

c) $1 - \varepsilon \leq \dfrac{\lambda}{t} \leq 1 + \varepsilon$,

où nous avons noté $x \wedge y = \inf(x, y)$, $x \vee y = \sup(x, y)$.

Mettons en place pour tout entier $k \geq 0$ les éléments

$$
\begin{aligned}
&- u_k = \rho^k v(\delta t),\\
&- \beta_k = \mathrm{S}_d(\mathrm{T}, u_k),\\
&- \mathrm{S}_t = \bigcup_{k \geq 0} \beta_k \text{ et si } s \in \mathrm{S}_t,\\
&- \eta_t(s) = \inf\{k \geq 0 : s \in \beta_k\},\\
&- x_k = u_{k-1}\sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u_k)}{u_k}},\ k \geq 1.
\end{aligned}
$$

Convergence de la série $\sum_{k \geq 1} x_k$.

Pour tout $k \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
\int_{u_{k+1}}^{u_k} \sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u)}{u}}\,du &\geq (u_k - u_{k+1})\sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u_k)}{u_k}}\\
&= \rho(1-\rho)u_{k-1}\sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u_k)}{u_k}} = (1-\rho)\rho x_k\,;
\end{aligned}
$$

par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} x_k &\leq \frac{1}{(1-\rho)\rho}\left(\int_0^{u_1} \sqrt{\mathrm{Log}\,\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u) + \mathrm{Log}\,\frac{1}{u}}\,du\right)\\
&\leq \frac{1}{(1-\rho)\rho}\left[\int_0^{u_1} \sqrt{\mathrm{Log}\,\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u)}\,du + \int_0^{u_1} \sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{1}{u}}\,du\right] < \infty,
\end{aligned}
$$

par (h_2).

On construit $m_t : \mathrm{T} \to \mathbb{R}_+$ en posant,

$$m_t(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \in \mathrm{S}_t \quad \text{et} \quad \eta_t(s) = 0, \\ x_1 + \ldots + x_{\eta_t}(s) & \text{si} \quad s \in \mathrm{S}_t \quad \text{et} \quad \eta_t(s) > 0, \\ x_1 + \ldots + x_\nu + \ldots & \text{si} \quad s \in \mathrm{T}\backslash\mathrm{S}_t. \end{cases}$$

Alors μ_t est défini par,

$$\mu_t(\omega, s) = m_t(s) \operatorname{sgn}(\mathrm{X}(\omega, s)).$$

On pose enfin

$$\pi_t(\omega, s) = \pi_t \operatorname{sgn}(\mathrm{X}(\omega, s)),$$

où

$$\pi_t = \frac{1}{(1-\rho)\rho} \int_0^{\rho v(\delta t)} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u)}{u}}\, du,$$

et pour toute $f : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$, on notera $\| f \|_{\mathrm{T}} = \| f \| = \sup_{t \in \mathrm{T}} | f(t) |$.

THÉORÈME 2.1. — 1) *Sous les hypothèses* (h, 0-2), *et avec les notations précédentes, pour tout* $\delta > 0$ *et tout* Δ, t, λ, ε *vérifiant* a), b) *et* c) *et tout* $d \geq \pi_t$,

$$(1.1) \qquad \frac{\mathrm{P}\{ \| \mathrm{X} - \Delta\mu_t \| > \lambda \}}{2\Psi(\lambda)\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))} \leq 1 + 0(1)\,(^1)\, \frac{\rho}{1-\rho} [\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))]^{-\nu_1} v(\delta t),$$

$$(1.2) \qquad \frac{\mathrm{P}\{ \| \mathrm{X} - \Delta d \operatorname{sgn}(\mathrm{X}) \| > \lambda \}}{2\Psi(\lambda)\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))} \leq 1 + 0(1) \frac{\rho}{1-\rho} [\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))]^{-\nu_1} v(\delta t)$$

2) *si de plus* $\delta < \dfrac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\sqrt{2}}$.

$$(2.1) \qquad 1 - 0(1)[\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))]^{-\nu_2} v(\delta t) \leq \frac{\mathrm{P}\{ \| \mathrm{X} - \Delta\mu_t \| > \lambda \}}{2\Psi(\lambda)\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))} \leq 1 + 0(1) \frac{\rho}{1-\rho} [\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))]^{-\nu_1} v(\delta t),$$

$$(2.2) \qquad \frac{\mathrm{P}\{ \| \mathrm{X} \| > \lambda \}}{2\Psi(\lambda)\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))} \geq 1 - 0(1)[\mathrm{M}_d(\mathrm{T}, v(\delta t))]^{-\nu_2} v(\delta t),$$

où,

$$\nu_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\mathrm{C}}\right)^2 > 0 \quad , \quad \nu_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\delta}\right)^2 - 1 > 0 \quad \text{et} \quad \Psi(\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}.$$

Remarques. — Lorsque λ est suffisamment proche de t (c. f. *c*)), l'ordre du recouvrement ne dépend que de t, on verra plus l'utilité de cette réduction;

---

(1) Nous convenons de noter par 0(1) toute constante positive absolue.

— l'alinéa (2.1) de l'énoncé montre, en posant $\lambda = t$, que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{P\{\|X - \Delta\mu_\lambda\| > \lambda\}}{2\Psi(\lambda)M_d(T, v(\delta\lambda))} = 1.$$

LEMME 2.2. — 1) ([*20*], p. 731). *Soient* λ_1 *et* λ_2 *deux v. a. gaussiennes centrées réduites et* $\rho = E\lambda_1 . \lambda_2$, $a > 0$,

$$P\{\lambda_1 > a, \lambda_2 > a\} \leq 0(1)\Psi(a)\Psi\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} . a\right),$$

2) ([*7*], p. 70) *pour tout* $t \geq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t+1} e^{-\frac{1}{2}t^2} \leq \Psi(t) \leq \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t+1} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Démonstration du théorème 2.1.

A) *Majorations 1.1 et 1.2* (ε, t, λ, Δ, δ fixés).

Nous commençons par établir

$$\begin{aligned}(1)\quad & \max\{P\{\operatorname{Sup}\{|X(s) - \Delta\mu_t(s)|, s \in T\} > \lambda\},\\ & P\{\operatorname{Sup}\{|X(s) - \Delta\pi_t(s)|, s \in T\} > \lambda\}\},\\ & \leq 2P\{\operatorname{Sup}\{X(s) - \Delta m_t(s), s \in S_t\} > \lambda\}.\end{aligned}$$

En effet $\forall s \in T$, $\lambda \pm \Delta\mu_t(s) > 0$ et $\lambda \pm \Delta\pi_t(s) > 0$, car

$$|\Delta\mu_t(s)| = \Delta m_t(s) \leq \Delta \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \Delta\pi_t < (1-\varepsilon)t < \lambda,$$

et

$$\begin{aligned}\bigcup_{s \in T}\{|X(s) - \Delta\mu_t(s)| > \lambda\} &= \bigcup_{s \in T}\{X(s) > \lambda + \Delta\mu_t(s)\} \cup \{-X(s) > \lambda - \Delta\mu_t(s)\},\\ &\subset \bigcup_{s \in T}\{X(s) > \lambda + \Delta m_t(s)\} \cup \{-X(s) > \lambda + m_t(s)\},\\ &= \bigcup_{s \in T} A_s = \bigcup_{s \in S_t} A_s \cup \bigcup_{s \in T\backslash S_t} A_s.\end{aligned}$$

Si $\omega \in A_s$, $s \in T\backslash S_t$, la d-séparabilité de X relativement à S_t montre qu'il existe dans S_t une suite $\{s_n(\omega), n \geq 1\}$ convergeant vers s telle que, hors d'un ensemble négligeable,

$$X(\omega, s) = \lim_{n \to \infty} X(\omega, s_n(\omega)).$$

et puisque,

$$(\pm)X(\omega, s) > \lambda + m_t(s) = \lambda + \sum_{1}^{\infty} x_k;$$

à partir d'un certain rang, nous aurons

$$(\pm)\, X(\omega, s_n(\omega)) > \lambda + \sum_{1}^{\infty} x_k > \lambda + m_t(s_n(\omega))$$

et, *a fortiori*,

$$\sup_{s \in S_t} X(\omega, s) - m_t(s) > \lambda,$$

d'où,

$$\bigcup_{s \in T \setminus S_t} A_s \subset \bigcup_{s \in S_t} A_s \text{ p. s.}$$

Ces remarques, et la symétrie de X établissent (1) pour $\mu_t(.)$ et également pour $\pi_t(.)$ de la même façon.

Pour tout $k \geq 0$, nous posons

$$A_k(t) = \{ \operatorname*{Sup}_{s \in \beta_k} (X(s) - \Delta m_t(s)) > \lambda \},$$

alors clairement

$$\text{(2)} \quad P\{ \sup \{ X(s) - \Delta m_t(s), s \in S_t \} > \lambda \} = P\left\{ \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right\}, \\ = P\{ A_0 \} + R_0,$$

où

$$R_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P\{ A_k \cap A_{k-1}^c \ldots \cap A_0^c \},$$

Notons pour tout $k > 0$, $\tau_k : \beta_k \to \beta_{k-1}$ une des applications définies par

$$d(s, \tau_k(s)) \leq u_{k-1},$$

nous montrons d'abord

$$\text{(3)} \qquad R_0 \leq \sum_{\substack{k>0 \\ s \in \beta_k \cap \beta_{k-1}^c \cap \ldots \cap \beta_0^c}} \alpha_k(s)$$

où

$$\alpha_k(s) = P\{ X(s) > \lambda + \Delta m_t(s), X(\tau_k(s)) \leq \lambda + \Delta m_t(\tau_k(s)) \}.$$

Comme

$$R_0 \leq \sum_{\substack{k>0 \\ s \in \beta_k}} P\{ \{ X(s) > \lambda + \Delta m_t(s) \} \cap A_{k-1}^c \cap \ldots \cap A_0^c \},$$

et puisque si $s \in \beta_k \cap \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \beta_i \right)$ (ce qui équivaut à $0 \leq \eta_t(s) < k$), alors

$$\{ X(s) > \lambda + \Delta m_t(s) \} \cap A_{\eta_t(s)}^c = \phi,$$

($m_t(s)$ ne dépendant de $\eta_t(s)$), il s'ensuit (3).

Fixons un instant $k > 0$ et s dans $\beta_k \cap \beta_{k-1}^c \cap \ldots \cap \beta_0^c$; alors

$$- \ m_t(s) = \sum_{i=1}^{k} x_i,$$

$$- \ m_t(\tau_k(s)) \begin{cases} \leq \sum_{i=1}^{k-1} x_i & \text{si} \quad k \geq 2, \\ = 0 & \text{si} \quad k = 1, \end{cases}$$

$$- \ d_X(s, \tau_k(s)) \leq Cd(s, \tau_k(s)) \leq Cu_{k-1} \leq Cv(\delta t) \leq 1.$$

Il vient

$$\eta = EX(s).X(\tau_k(s)) = 1 - \frac{1}{2} d_X^2(s, \tau_k(s)) \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Décomposant $X(\tau_k(s))$ suivant $X(s)$ en

$$X(\tau_k(s)) = \eta X(s) + \sqrt{1 - \eta^2}.Z,$$

où Z est indépendante de $X(s)$, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient

$$\alpha_k(s) \leq P\{X(s) > \lambda + \Delta m_t(s)\}.P\{-Z\sqrt{1-\eta^2} > \eta(\lambda + \Delta m_t(s)) - (\lambda + \Delta m_t(\tau_k(s)))\} ;$$

mais alors

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \Delta m_t(s)) - (\lambda + \Delta m_t(\tau_k(s))) &= \Delta(m_t(s) - m_t(\tau_k(s))) \\ &\quad - \frac{1}{2} d_X^2(s, \tau_k(s))(\lambda + \Delta m_t(s)), \\ &\geq \Delta x_k - \frac{1}{2} C^2 u_{k-1}^2 \left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right) = \theta_1 + \theta_2, \end{aligned}$$

où $\theta_1 = \frac{1}{2}(\Delta x_k - C^2 u_{k-1}^2 \lambda)$ et $\theta_2 = \frac{1}{2}\Delta\left(x_k - C^2 u_{k-1}^2 \sum_{i=1}^{k} x_i\right)$.

Nous montrons que $\theta_1 + \theta_2 > 0$,

– pour θ_1, $\forall k > 0$, $u_k < v(\delta t)$ et $\Delta > \frac{C^2(1 + \varepsilon)}{\delta \rho}$, donc

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta u_{k-1}^2} \theta_1 &= \frac{x_k}{u_{k-1}^2} - \frac{C^2 \lambda}{\Delta} = \rho h(u_k) - \frac{C^2 \lambda}{\Delta} \\ &\geq \rho \delta t - \frac{C^2 \lambda}{\Delta} \geq \lambda\left(\frac{\rho \delta}{1 + \varepsilon} - \frac{C^2}{\Delta}\right) > 0, \\ &\Rightarrow \theta_1 > 0 ; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
- \text{ pour } \theta_2, \ C^2 u_{k-1}^2 \sum_{i=1}^{k} x_i &= C^2 u_{k-1}^2 \sum_{i=1}^{k} u_{i-1} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M_d(T, u_i)}{u_i}}, \\
&\leq C^2 u_{k-1}^2 \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M_d(T, u_k)}{u_k}} \sum_{i=1}^{k} u_{i-1}, \\
&= x_k C^2 \rho^{k-1} v^2(\delta t) \sum_{i=0}^{k-1} \rho^i, \\
&\leq x_k C^2 \rho^{k-1} \frac{v^2(\delta t)}{1-\rho} \leq x_k, \\
&\Rightarrow \theta_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Z étant symétrique et puisque $\sqrt{1-\gamma^2} \leq d_X(s, \tau_k(s)) \leq Cu_{k-1}$, il suit

$$
\alpha_k(s) \leq \Psi\left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right) \Psi\left(\frac{\Delta x_k}{Cu_{k-1}} - \frac{1}{2} Cu_{k-1}\left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right),
$$

mais aussi (Lemme 2.2)

$$
\alpha_k(s) \leq 0(1) \frac{e^{-\frac{1}{2}Q^2}}{\left(1 + \lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right)\left(1 + \frac{\Delta x_k}{Cu_{k-1}} - \frac{1}{2} Cu_{k-1}\left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right)},
$$

où

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= \left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_k}{Cu_{k-1}} - \frac{1}{2} Cu_{k-1}\left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right)^2 \\
&= \left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right) \Delta x_k + \left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right)\left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right) + \left(\frac{\Delta x_k}{Cu_{k-1}}\right)^2 \\
&\quad - \Delta x_k \left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right) + \frac{1}{4} C^2 u_{k-1}^2 \left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 \\
&\geq \left(\lambda + \Delta \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_k}{Cu_{k-1}}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
(4) \quad \alpha_k(s) &\leq 0(1) \Psi(\lambda + \Delta \Sigma_k') e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_k}{Cu_{k-1}}\right)^2}, \\
&\leq 0(1) \Psi(\lambda + \Delta \Sigma_k') (M_d(T, u_k))^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{C}\right)^2} (u_k)^{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{C}\right)^2}, \\
(5) \quad &\leq 0(1) \Psi(\lambda) M_d(T, u_k)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{C}\right)^2} \rho^k v(\delta t),
\end{aligned}
$$

puisque
$$u_k = \rho^k v(\delta t) \leq 1$$
$$\text{et } \frac{\Delta}{C} > \sqrt{2},$$

$$\left(\text{on a posé momentanément } \Sigma'_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} x_i & \text{si} \quad k > 1 \end{cases}\right).$$

De (3) et (5), on déduit,

$$R_0 \leq 0(1)\Psi(\lambda)v(\delta t) \sum_{\substack{k>0 \\ s \in \beta_k \cap \beta_{k-1}^c \cap \ldots \cap \beta_0^c}} \rho^k M_d(T, u_k)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{C}\right)^2},$$

$$\leq 0(1)\Psi(\lambda)v(\delta t) \sum_{k>0} \rho^k M_d(T, u_k)^{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{C}\right)^2},$$

$$\leq 0(1)M_d(T, v(\delta t))^{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{C}\right)^2} \frac{\rho}{1-\rho} v(\delta t), \tag{6}$$

puisque $\#(\beta_k \cap \beta_{k-1}^c \ldots \cap \beta_0^c) \leq \#(\beta_k) = M_d(T, u_k)$, $M_d(T, u)$ est décroissante et $\frac{\Delta}{C} > \sqrt{2}$.

Ainsi,

$$\text{Max}\{P\{\sup\{|X(s) - \Delta\mu_t(s)|,\ s \in T\} > \lambda\},$$
$$P\{\text{Sup}\{|X(s) - \Delta\pi_t(s)|,\ s \in T\} > \lambda\}\}$$
$$\leq 2(P\{A_0\} + R_0) \leq 2(\#(\beta_0).\Psi(\lambda) + R_0)$$
$$\leq 2\Psi(\lambda)M_d(T, v(\delta t))\left[1 + 0(1)\frac{\rho}{1-\rho} M_d(T, v(\delta t))^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{C}\right)^2} v(\delta t)\right]. \tag{7}$$

B) *Minoration.* On utilise l'inégalité classique

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right\} \geq \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} P(A_i \cap A_j),$$

laquelle montre

$$P(A'_0) = P\{\sup_{s \in \beta_0} |X(s)| > \lambda\},$$
$$\geq 2M_d(T, v(\delta t))\Psi(\lambda) - \sum_{\substack{s,t \in \beta_0 \\ s \neq t}} P\{|X(s)| \wedge |X(t)| > \lambda\},$$
$$\geq 2M_d(T, v(\delta t))\Psi(\lambda) - 4 \sum_{\substack{s,t \in \beta_0 \\ s \neq t}} P\{X(s) \wedge X(t) > \lambda\}.$$

Mais (lemme 2.2)

$$P\{X(s) \wedge X(t) > \lambda\} \leq 0(1)\Psi(\lambda)\Psi\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}.\lambda\right) \quad \text{où} \quad \rho = E[X(s).X(t)];$$

or

$$\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\lambda \geq \frac{1}{2}\lambda d_X(s,t) \geq \frac{\gamma\lambda}{2}d(s,t) \geq \frac{\gamma\lambda}{2}v(\delta t).$$

Comme

$$h(v(\delta t)) = \frac{1}{v(\delta t)}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{M_d(T, v(\delta t))}{v(\delta t)}} \leq \delta t \leq \frac{\delta\lambda}{1-\varepsilon},$$

nous en déduisons

$$\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}.\lambda \geq \frac{\gamma\lambda}{2}v(\delta t) \geq \frac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\delta}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{M_d(T, v(\delta t))}{v(\delta t)}}.$$

Il suit donc

$$\begin{aligned} P\{X(s) \wedge X(t) > \lambda\} &\leq 0(1)\Psi(\lambda).\Psi\left(\frac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\delta}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{M_d(T, v(\delta t))}{v(\delta t)}}\right), \\ &\leq 0(1)\Psi(\lambda)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\delta}\right)^2.\operatorname{Log}\frac{M_d(T, v(\delta t))}{v(\delta t)}\right\}, \\ &\leq 0(1)\Psi(\lambda)M_d(T, v(\delta t))^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\delta}\right)^2}v(\delta t), \end{aligned}$$

puisque

$$0 < v(\delta t) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\delta} > \sqrt{2}$$

Finalement,

$$2\sum_{\substack{s,t\in\beta_0 \\ s\neq t}} P\{X(s) \wedge X(t) > \lambda\} \leq 0(1)\Psi(\lambda)M_d(T, v(\delta t))^{2-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\delta}\right)^2}v(\delta t),$$

et,

$$\begin{aligned} &P\{\sup\{|X(s) - \Delta\mu_t(s)|, s\in T\} > \lambda\} \\ &\quad \geq P\{A_0'\} \geq 2\Psi(\lambda)M_d(T, v(\delta t))\left[1 - 0(1)M_d(T, v(\delta t))^{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(1-\varepsilon)}{2\delta}\right)^2}v(\delta t)\right], \end{aligned}$$

d'où 2.1 et trivialement 2.2.

Remarques. — Le théorème que nous venons d'établir fournit, moyennant un système de conditions initiales sur plusieurs paramètres qui aura son importance dans les applications, un encadrement correct de la loi du maximum de $|X - \Delta\mu_t|$ où μ_t dépend du seuil t choisi. Pour les grandes valeurs de t qui nous intéressent dans la suite, μ_t est très petit. On peut interpréter μ_t comme un décalage de l'origine de $\mathbb{R}^+$, très voisin de celle-ci. Cependant,

μ_t n'est séparé par aucune suite dénombrable d-dense de T, et donc par S_t entre autres. Ceci empêche donc d'obtenir directement un encadrement idéal (pour l'étude des classes) de $\operatorname{Sup}_T X$. Nous avons pourtant, si nous posons

$$\varepsilon = 0 \quad , \quad \lambda = t \quad ,$$

(1) $$P\{\operatorname{Sup}_T X > \lambda + \pi_\lambda\} \leq 0(1)\Psi(\lambda)M_d(T, v(\delta\lambda))$$

et

(2) $$P\{\operatorname{Sup}_T X > \lambda\} \geq 0(1)\Psi(\lambda)M_d(T, v(\delta\lambda)).$$

Cependant, lorsque $T = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$ et X est gaussien centré stationnaire construit à partir d'une covariance du type croissance régulière avec un exposant positif par exemple,

(3) $$\rho(t) = 1 - |t|^\alpha H(t) + 0(|t|^\alpha H(t)) \qquad t \to 0,$$

où $0 < \alpha \leq 2$ et H est à variation lente, on sait que X est à trajectoires continues et la loi de son maximum est connue, plus exactement

(4) $$P\{\sup_T X > \lambda\} \overset{\cup}{\cap}{}^{(2)} \Psi(\lambda)M_d\left(T, \frac{A}{\lambda}\right),$$

où $A > 0$ ne dépend que de X, ce qui pour (3) donne

$$P\{\operatorname{Sup}_T X > \lambda\} \overset{\cup}{\cap} \Psi(\lambda)\left(\frac{b-a}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ce type de covariance présente aussi la particularité suivante; : posons

$$f_T(\varepsilon) = \operatorname{Sup}_{t \in T} \int_0^\varepsilon \operatorname{Log} \sqrt{M_d(B_d(t, \varepsilon), u)}\,du,$$

alors

$$(\mathscr{P})\begin{cases} f_T(\varepsilon) = 0(\varepsilon) \text{ en } 0, \\ \text{il existe } \alpha > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \overline{\lim_{v \to 0}} \operatorname{Sup}_{s \in T} \displaystyle\int_0^v \frac{du}{uM(B_d(s, v), u)^\alpha} < \infty, \end{cases}$$

. On peut se demander si réciproquement ($\mathscr{P}$) suffit pour établir (4); la réponse est positive et repose sur le théorème (2.1.2) de [*22*] et l'inégalité de minoration utilisée précédemment.

L'énoncé du théorème 2.1 a une forme relativement compliquée, aussi allons-nous, dès à présent, en donner une application en établissant un théorème sur l'intégrabilité des processus gaussiens qui améliore dans le cas stationnaire le théorème bien connu de X. Fernique que nous rappelons

---

(2) $f(t) \overset{\cup}{\cap} g(t)$ en 0 (resp. $+\infty$) si $0 < \underline{\lim}_{t \to 0(+\infty)} \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leq \overline{\lim}_{t \to 0(+\infty)} \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| < +\infty$.

THÉORÈME $\mathfrak{F}$ ([*6*], p. 14). — *Soient* (E, $\mathscr{B}$) *un espace vectoriel mesurable et* X *un vecteur gaussien à valeurs dans* E, *soit de plus* N *une pseudo-semi-norme sur* E *et* (y_n, $n \in \mathbb{N}$) *une suite de formes linéaires mesurables sur* (E, $\mathscr{B}$) *telles que :*

$$P\{ N(X) = \sup_{n \in \mathbb{N}} | \langle X, y_n \rangle | < \infty \} = 1.$$

On note σ *la borne supérieure des écarts-types des variables aléatoires gaussiennes* $\langle X, y_n \rangle$. *Dans ces conditions, l'ensemble* $\{ \alpha : E [\exp \alpha N^2(X)] < \infty \}$ *est l'intervalle* $\left(-\infty, \dfrac{1}{2\sigma^2} \right[$.

Il ressort de cet énoncé que si $X = \{ X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T \}$ est une fonction aléatoire gaussienne sur un espace T, séparable, p. s. majorée sur T, avec pour simplifier,

$$\forall t \in T \quad , \quad E[X^2(t)] = 1,$$

alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$, la variable aléatoire $\exp [\alpha \operatorname{Sup}_T X^2]$ est intégrable tandis que $E\left[\exp\left[\frac{1}{2} \operatorname{Sup}_T X^2\right]\right] = \infty$ trivialement. Dès lors, il est naturel de se demander s'il n'existe pas des fonctions $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissantes telles que $\lim_{t \to \infty} h(t) = 0$ pour lesquelles la variable aléatoire

$$h(\operatorname{Sup}_T | X |) \exp \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sup}_T X^2\right]$$

est intégrable.

Le théorème suivant répond à cette question.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* $\{ X(t), t \in T \}$ *un processus gaussien centré tel que*

1) $\forall t \in T$, $E[X_t^2] = 1$.

2) *Il existe un écart* d *sur* T, *un réel* $C > 0$, *tels que si* d_X *est l'écart induit par* X *sur* T, *on a*

2 *a*) $d_X \leq Cd$ *sur* T,

2 *b*) *l'intégrale* $\int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} M_d(T, u)}\, du$ *est convergente.*

Dans ces conditions, pour tout $\varepsilon > 0$, *les variables aléatoires*

$$\exp\left(\frac{1}{2}(\| X \|_T - \varepsilon)^2\right)$$

sont intégrables (on a noté $\| X \|_T = \operatorname{Sup}_{t \in T} | X(t) |$).

COROLLAIRE 2.3. — *Soit* X(t) *un processus gaussien centré stationnaire sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}_+$, *de covariance* $r(t)$ *continue, avec* $r(0) = 1$, *p. s. majoré sur* *toute partie bornée de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}_+$; *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et toute partie* T *bornée de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}_+$,

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(\| \mathrm{X} \|_{\mathrm{T}} - \varepsilon)^2\right)\right] < \infty .$$

Démonstration du théorème 2.2.

Elle repose sur le lemme suivant

LEMME 2.4. — *Sous les hypothèses du théorème 2.2, pour tout* $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, *si*

$$g_{\varepsilon_0}(u) = \exp\left\{\frac{1}{2}u^2 - \varepsilon_0 u\right\},$$

alors,

$$\mathrm{E}[g_{\varepsilon_0}(\| \mathrm{X} - \varepsilon_1 \operatorname{sgn}(\mathrm{X}) \|)] < \infty .$$

Démonstration. — Fixons $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$; nous allons tout d'abord établir une majoration de

$$\mathrm{P}\{ \| \mathrm{X} - \varepsilon_1 \operatorname{sgn}(\mathrm{X}) \| > \lambda \}$$

pour tout λ suffisamment grand, en utilisant le théorème 2.1.

Dans le cadre de l'énoncé du théorème 2.1, nous effectuons les simplifications suivantes

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_d(\mathrm{T}, u) &= \mathrm{M}(u), \\ \delta &= 1, \\ \lambda &= t \quad (\text{d'où } \varepsilon = 0). \end{aligned}$$

Les conditions sur les paramètres *a*), *b*), *c*) se traduisent alors par

a') $\Delta > \mathrm{C}\sqrt{2} \vee \dfrac{\mathrm{C}^2}{\rho}$ (où $\rho \in]0, 1[$ est arbitrairement fixé),

b') $v(\lambda) < \dfrac{\sqrt{1-\rho}}{\mathrm{C}}$, $\lambda > h(\mathrm{H}_0) \vee \Delta\pi_\lambda$,

où

$$\pi_\lambda = \frac{1}{(1-\rho)\rho} \int_0^{\rho v(\lambda)} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{\mathrm{M}(u)}{u}}\, du .$$

Mais puisque $v(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to \infty$ on a donc aussi $\pi_\lambda \to 0$ quand $\lambda \to \infty$; ainsi, la condition *b'*) exprime simplement le fait que λ ne doit pas être trop petit, ce qui est notre cas. Choisissons donc λ assez grand afin que *b'*) soit réalisé et aussi tel que

$$\pi_\lambda \leq \varepsilon^* \qquad \text{où} \qquad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon_1}{\Delta} \qquad \text{et } \Delta \text{ est fixé par } a').$$

Nous déduisons du théorème 2.1,

$$P\{\ \|X - \varepsilon_1 \operatorname{sgn}(X)\| > \lambda\ \} \leq 2\Psi(\lambda)\ M \circ v(\lambda)[1 + K(\lambda)],$$

avec

$$K(\lambda) = \frac{K_0 . \rho}{1 - \rho} M \circ v(\lambda)^{-\nu_1} v(\lambda),$$

où $K_0 > 0$ est une constante absolue et $\nu_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{C}\right)^2 > 0$; par conséquent

$$\lim_{\lambda \to \infty} K(\lambda) = 0.$$

Donc, il existe $0 < H < \infty$ indépendant de $\lambda > 0$, tel que

$$\forall \lambda > 0,\ P\{\ \|X - \varepsilon_1 \operatorname{sgn}(X)\| > \lambda\ \} \leq H\Psi(\lambda)\ M \circ v(\lambda).$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
E[g_{\varepsilon_0}(\|X - \varepsilon_1 \operatorname{sgn}(X)\|)] &= \int_0^\infty P\{\ \|X - \varepsilon_1 \operatorname{sgn}(X)\| > g_{\varepsilon_0}^{-1}(u)\ \}\, du, \\
&\leq H \int_0^\infty \Psi \circ g_{\varepsilon_0}^{-1}(u) M \circ v \circ g_{\varepsilon_0}^{-1}(u) du, \\
&\leq H' \int_0^\infty \Psi(t) M \circ v(t) g_{\varepsilon_0}(t) t dt, \qquad (u = g_{\varepsilon_0}(t)), \\
&\leq H'' \int_0^\infty e^{-\varepsilon_0 t} M \circ v(t) dt,
\end{aligned}$$

où $H' > 0$, $H'' > 0$ ne dépendent que de H et ε_0.

Mais puisque $\int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} M(u)} du$ est convergente, nous avons

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \sqrt{\operatorname{Log} M(u)} du \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \alpha \to 0.$$

Cela montre que

$$\sqrt{\operatorname{Log} M(u)} = o\left(\frac{1}{u}\right), \qquad u \to 0.$$

Fixons à présent $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $0 < U_\varepsilon < \infty$ tel que pour tout $u > U_\varepsilon$,

$$\sqrt{\operatorname{Log} M(u)} < \frac{\varepsilon}{2u},$$

et

$$u \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{u}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
h(u) = \frac{1}{u} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M(u)}{u}} &\leq \frac{1}{u} \left\{ \sqrt{\operatorname{Log} M(u)} + \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{u}} \right\}, \\
&\leq \frac{1}{u^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} + u \sqrt{\operatorname{Log} u} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{u^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pout tout t assez grand ($t > t_0$), nous avons $v(t) \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}$, puisque

$$\left\{u : 0 < u \leq H_0 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{u^2} \leq t\right\} \subset \{u : 0 < u \leq H_0 \quad \text{et} \quad h(u) \leq t\}$$

et donc

$$\inf\left\{0<u\leq H_0 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{u^2} \leq t\right\} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{t}} \geq \inf\{0<u\leq H_0 \quad \text{et} \quad h(u)\leq t\} = v(t).$$

Mais alors, comme,

$$h \circ v(t) \leq t, \qquad \text{on en déduit} \qquad \sqrt{\operatorname{Log}\frac{M \circ v(t)}{v(t)}} \leq v(t).t = \sqrt{\varepsilon t},$$

il suit

$$\begin{aligned} M \circ v(t) &\leq e^{\varepsilon t} v(t), \\ &\leq e^{\varepsilon t}, \end{aligned}$$

si t est assez grand puisque $v(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

Tout ce développement permet de trouver un nombre $A = A(\varepsilon, \varepsilon_0)$ fini tel que

$$\int_A^\infty M \circ v(t) e^{-\varepsilon_0 t} dt \leq \int_A^\infty e^{-(\varepsilon_0 - \varepsilon)t} dt < \infty,$$

car $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

On a donc montré que

$$E[g_{\varepsilon_0}(\| X - \varepsilon_1 \operatorname{sgn}(X) \|)] < \infty,$$

pour tout $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème 2.2.

Fixons arbitrairement $\varepsilon > 0$; nous allons majorer $g_\varepsilon(\| X \|)$ en faisant intervenir $\| X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \|$. A cet effet, nous rappelons que pour tout $f, g : T \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \| f - g \|^2 = \sup_{t \in T} | f(t) - g(t) |^2 &\leq \sup_{t \in T} f^2(t) + 2 \sup_{t \in T} | f(t) g(t) | + \sup_{t \in T} g^2(t), \\ &\leq \| f \|^2 + 2 \| f.g \| + \| g \|^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(\| X \|) &= \frac{e^{\frac{1}{2} \|[X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X)] + \varepsilon' \operatorname{sgn}(X)\|^2}}{e^{\varepsilon \| [X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X)] + \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \|}}, \\ &\leq \frac{e^{\frac{1}{2} \| X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \|^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon')^2 + \varepsilon' \| X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \|}}{e^{\varepsilon \| X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \| - \varepsilon \varepsilon'}} \\ &\leq e^{\frac{1}{2}(\varepsilon')^2 + \varepsilon\varepsilon'} e^{\frac{1}{2} \| X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \|^2 - (\varepsilon - \varepsilon') \| X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \|} \\ &\leq K(\varepsilon, \varepsilon') g_{\varepsilon - \varepsilon'}(\| X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \|). \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ pour déduire directement du lemme 2.4 que

$$E[g_\varepsilon(\| X \|)] \leq K(\varepsilon, \varepsilon')E[g_{\varepsilon-\varepsilon'}(\| X - \varepsilon' \operatorname{sgn}(X) \|)] < \infty,$$

d'où le théorème.

Démonstration du corollaire 2.3.

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.2 et du théorème ([*6*], p. 89) dont nous rappelons l'énoncé au début du paragraphe 4.

Le corollaire 2.3 a une application directe pour l'étude des classes $\mathcal{U}_\infty(X)$ qui est explicitée dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.5. — *Soit* $X(t)$, $t \geq 0$ *un processus gaussien centré stationnaire sur* $\mathbb{R}_+$ *de covariance* $r(t)$ *continue avec* $r(0) = 1$. *Si* X *est p. s. majoré sur toute partie bornée de* $\mathbb{R}_+$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *les fonctions*

$$\varphi_\varepsilon(t) = \sqrt{2 \operatorname{Log} t} + \varepsilon$$

appartiennent à la classe $\mathcal{U}_\infty(X)$.

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement et notons pour tout entier $n \geq 0$

$$A_n = \{ \sup_{n \leq t \leq n+1} | X(t) | > \varphi_\varepsilon(n) \}$$

Soient $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ et $g_{\varepsilon_0}(u) = \exp \frac{1}{2} u^2 - \varepsilon_0 u$. La stationnarité de X permet d'écrire

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P\{ g_{\varepsilon_0}(\| X \|_{[0,1]}) > g_{\varepsilon_0}(\varphi_\varepsilon(n)) \}, \\ &= P\left\{ g_{\varepsilon_0}(\| X \|_{[0,1]}) > n e^{(\varepsilon-\varepsilon_0)\sqrt{2 \operatorname{Log} n} + \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon_0 \varepsilon} \right\} \\ &\leq P\{ g_{\varepsilon_0}(\| X \|_{[0,1]}) > n \} \end{aligned}$$

pour tout n suffisamment grand, ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq 0(1)E[g_\varepsilon(\| X \|_{[0,1]})] < \infty.$$

On conclut alors de la façon habituelle en appliquant le lemme de Borel-Cantelli à la série de terme général $P(A_n)$.

III. ENCADREMENT DE $P\{ \sup_T X.K_X > t \}$

Nous conservons les hypothèses (h_1) et (h_2) du paragraphe 2, (h_0) étant affaiblie en (h'_0) $\exists 0 < C < \infty$, tel que $d_X \leq Cd$ sur T.

Soient $\rho \in]0, 1[$ fixé et $k \geq 0$, nous plaçons aussi

— $u_n = \rho^n \frac{1}{C}$,

— $\beta_n = S_d(T, u_n)$,

— $S_N = \bigcup_{p \geq N} \beta_p$ où $N > 0$ est fixé plus loin et pour tout $s \in S_N$,

— $\eta_N(s) = \inf \{ k \geq N : s \in \beta_k \}$,

— $y_k = \rho^{k-1} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M_d(T, u_k)}{\rho^k}}$, $k \geq 1$.

On constate comme avant que $\sum_{k \geq 1} y_k < \infty$. Nous définissons $m_N : T \to \mathbb{R}_+$ en posant

$$m_N(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in S_N \text{ et } \eta_N(s) = N, \\ y_{N+1} + \ldots + y_{\eta_N(s)} & \text{si } s \in S_N \text{ et } \eta_N(s) > N \\ y_{N+1} + \ldots + y_v + \ldots & \text{si } s \in T \backslash S_N, \end{cases}$$

m_N atteint son maximum sur $T \backslash S_N$, $M(N)$ et $M(N) \to 0$ quand $N \to \infty$; posons alors

$$K_{X,N}(t) = \frac{1}{1 + m_N(t)}, \; t \in T.$$

THÉORÈME 3.1. — *Sous les hypothèses* (h_0'), (h_1), (h_2), *pour tout* N *tel que*

$$y_N \rho^{2(1-N)} > 1 \quad , \quad \rho^{2N} \leq (1 - \rho),$$

il existe une constante $C(N) > 0$, *telle que,*

$$\forall \lambda > \sqrt{2} \quad , \quad 1 \leq \frac{P\{\operatorname{Sup}_T XK_{X,N} > \lambda\}}{\Psi(\lambda)} \leq C(N)$$

Démonstration. — Elle recopie dans ses grandes lignes la première partie de celle du théorème 2.1; on a tout d'abord

$$\operatorname{Sup}_{s \in T} X(s) K_{X,N}(s) = \operatorname{Sup}_{s \in T \backslash S_N} X(s) K_{X,N}(s) \vee \operatorname{Sup}_{s' \in S_N} X(s') K_{X,N}(s');$$

si $\operatorname{Sup}_{s \in T \backslash S_N} X(\omega, s) K_{X,N}(s) > \lambda$, alors il existe $s \in T \backslash S_N$ tel que

$$X(\omega, s) > \lambda \left(1 + \sum_{k > N} y_k \right).$$

Puisque S_N est *d*-dense, il sépare X. Donc, en dehors d'ensemble négligeable ne dépendant que de S_N, il existe une suite $(s_n(\omega)) \subset S_N$ telle que

$$\left.\begin{array}{l} — s_n(\omega) \to s \\ — X(\omega, s_n(\omega)) \to X(\omega, s) \end{array}\right. \quad (n \to \infty).$$

A partir d'un certain rang n_ω, on aura donc

$$\forall n > n_\omega \quad , \quad X(\omega, s_n(\omega)) > \lambda\left(1 + \sum_{j>N} y_j\right) > \lambda(1 + m_N(s_n(\omega))$$

d'où $\operatorname{Sup}_{s \in S} X(\omega, s).K_{X,N}(s) > \lambda$, et, par suite,

$$(1) \qquad P\{\operatorname{Sup}_T X.K_{X,N} > \lambda\} = P\{\operatorname{Sup}_{S_N} X.K_{X,N} > \lambda\}.$$

Posons à présent pour tout $k \geq N$, N et λ fixés par l'énoncé,

$$A_k = \{\operatorname{Sup}_{s \in \beta_k} X(s)K_{X,N}(s) > \lambda\}\ ;$$

clairement

$$(2) \qquad \begin{aligned} P\{\operatorname{Sup}_{s \in S_N} X(s)K_{X,N}(s) > \lambda\} = P\left\{\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right\} &= P(A_N) + R_N, \\ &\leq \Psi(\lambda)M_d(T, u_N) + R_N, \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} R_N &= \sum_{k>N} P\{A_k \cap A_{k-1}^c \cap \ldots \cap A_N^c\}, \\ (3) \qquad &\leq \sum_{\substack{k>N \\ s \in \beta_k \cap \beta_{k-1}^c \cap \ldots \cap \beta_N^c}} \pi_k(s), \end{aligned}$$

avec

$$\pi_k(s) = P\{X(s) > \lambda(1 + m_N(s)), X(\tau_k(s)) \leq \lambda(1 + m_N(\tau_k(s))\},$$

et $\tau_k : \beta_k \to \beta_{k-1}$ est une des applications définies par $d(s, \tau_k(s)) \leq u_{k-1}$. Pour tout $k > N$ et s dans $\beta_k \cap \beta_{k-1}^c \ldots \cap \beta_N^c$, on a les relations,

— $m(s) = \sum_{i=N+1}^{k} y_i \quad , \quad m(\tau_k(s)) \begin{cases} \leq \sum_{i=N+1}^{k-1} y_i & \text{si} \quad k > N + 1 \\ = 0 & \text{si} \quad k = N + 1 \end{cases}$

— $d_X(s, \tau_k(s)) \leq Cd(s, \tau_k(s)) \leq \rho^{k-1} \leq 1 \quad (k > N > 0)$,

donc

$$\eta = E[X(s).X(\tau_k(s))] = 1 - \frac{1}{2} d_X^2(s, \tau_k(s)) \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Décomposant $X(\tau_k(s))$ suivant $X(s)$, nous obtenons donc,

$$\pi_k(s) \leq \Psi\left(\lambda\left(1 + \sum_{i=N+1}^{k} y_i\right)\right)\Psi\left(\frac{\theta}{\rho^{k-1}}\right),$$

où

$$\theta = \lambda\left(y_k - \frac{1}{2}\rho^{2(k-1)}\left(1 + \sum_{i=N+1}^{k} y_i\right)\right) = \theta_1 + \theta_2,$$

avec

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{2}(y_k - \rho^{2(k-1)}),$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda}{2}\left(y_k - \rho^{2(k-1)}. \sum_{i=N+1}^{k} y_i\right),$$

le choix de N suffit donc pour établir que $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 \geq 0$ ($\forall k > N$). Il s'ensuit

(4) $$\pi_k(s) \leq 0(1)\Psi(\lambda)e^{-\frac{1}{2}(\lambda y_k . \rho^{1-k})^2},$$
$$\leq 0(1)\Psi(\lambda)M_d(T, u_k)^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \rho^k} \quad (\lambda > \sqrt{2}),$$

d'où, par (3) et (4), la majoration

$$R_N \leq 0(1)\Psi(\lambda)\sum_{k>N} M_d(T, u_k)^{1-\frac{1}{2}\lambda^2 \rho^k} \leq 0(1)\Psi(\lambda)\frac{\rho^{N+1}}{1-\rho} M_d(T, u_N)^{1-\frac{1}{2}\lambda^2}.$$

Finalement, pour tout $\lambda > \sqrt{2}$,

$$P\{\sup_T XK_{X,N} > \lambda\} \leq \Psi(\lambda)\left[M_d(T, u_N) + 0(1)\frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}\right] = \Psi(\lambda)C(N);$$

et puisque $K_{X,N}(s) = 1$ sur β_N, on a trivialement,

$$P\{\sup_T X.K_{X,N} > \lambda\} \geq \Psi(\lambda).$$

IV. CLASSES A L'INFINI DE $X.K_X$

4.1. Soit donc $X(t)$; $t \geq 0$ un processus gaussien centré stationnaire de covariance $r(h) = E[X(t).X(t+h)]$ continue avec $r(0) = 1$, vérifiant (H_1) et (H_2).

Notons pour tout voisinage V de l'origine, tout $\varepsilon > 0$, $N(V, \varepsilon)$ le cardinal minimal d'un recouvrement de V par des d_X boules ouvertes de rayon ε où $d_X(s, t) = \| X(s) - X(t) \|_{L^2(\Omega)} = [2(1 - r(|s-t|))]^{\frac{1}{2}}$. Le théorème suivant identifie (H_1) :

THÉORÈME ($\mathfrak{F}$) ([6], p. 89). — *Soit* X *un processus gaussien stationnaire centré séparable sur* $\mathbb{R}^n$ *à covariance continue. Pour que* X *soit presque sûre-*

ment majoré sur toute partie bornée T *de* $\mathbb{R}^n$, *il faut et il suffit qu'il existe* $q > 1$ *et un voisinage* V *de l'origine de* $\mathbb{R}^n$ *pour la topologie usuelle tels que la série* $\sum_k q^{-k}\sqrt{\operatorname{Log} N(V, q^{-k})}$ *soit convergente. Les trajectoires de* X *sont alors presque sûrement continues.*

4.2. Construction de K_X.

Puisque H_1 est supposée, X est continu presque sûrement et il existe $V \in \mathscr{V}(0)$ tel que

$$\int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} N(V, u)}\,du < \infty ;$$

mais alors

$$\int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} N([0, 1], u)}\,du < \infty.$$

Or, pour tout $u > 0$,

$$M_{d_X}([0, 1], 2u) \leq N([0, 1], u) \leq M_{d_X}([0, 1], u),$$

d'où, si nous notons $M(u) = M_{d_X}([0, 1], u)$; on a aussi

$$\int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} M(u)}\,du < \infty. \tag{1}$$

Considérons le processus $X_1(t) = \{ X(t), 0 \leq t \leq 1 \}$. Les hypothèses ($h'_0$, h_1, h_2) du paragraphe III sont satisfaites si on choisit $d = d_X$, $C = 1$. Soit $\rho \in]0, 1[$, nous posons avec les notations du paragraphe III, pour tout $n \geq 0$

$$\beta_n = S([0, 1], \rho^n),$$
$$y_n = \rho^{n-1}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{M(\rho^n)}{\rho^n}},\ n \geq 1,$$

et pour tout N tel que $y_N \rho^{2(1-N)} > 1$, $\rho^{2N} \leq 1 - \rho$, $(N \geq N(\rho))$.

$$S_N = \bigcup_{k \geq N} \beta_k \quad , \quad \eta_N(s) = \inf \{ k \geq N : s \in \beta_k \},\ s \in S_N,$$

alors m_N, $K_{\rho,N}$ sont définies comme avant à partir de la suite $(y_k)_{k \geq N}$ dont la série converge par (1). Rappelons cependant que

$$K_{\rho,N}(s) = \frac{1}{1 + m_N(s)},\ 0 \leq s \leq 1,$$

On prolonge $K_{\rho,N}$ sur $\mathbb{R}_+$ en une fonction de période 1 de même notation. Le théorème suivant montre que les processus $\{ X.K_{\rho,N}, N \geq N(\rho), 0 < \rho < 1 \}$

$$d(s, t) = d(|s - t|) = [2(1 - r(|s - t|))]^{\frac{1}{2}}$$

et les suites gaussiennes normales ont les mêmes classes, $nb\mathrm{K}_{\rho,\mathrm{N}}$ dépend évidemment de X.

THÉORÈME 4.1. — *Si* $\mathrm{X}(t)$, $t \geq 0$ *est un processus gaussien stationnaire centré vérifiant* (H_1) *et* (H_2), *alors on a les équivalences*

$$\left(\int^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{\varphi(t)}\, dt < \infty\right) \Leftrightarrow (\forall \rho \in]0, 1[, \forall \mathrm{N} > \mathrm{N}(\rho), \varphi \in \mathscr{U}_\infty(\mathrm{X}.\mathrm{K}_{\rho,\mathrm{N}})),$$

$$\left(\int^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{\varphi(t)}\, dt = \infty\right) \Leftrightarrow (\forall \rho \in]0, 1[, \forall \mathrm{N} > \mathrm{N}(\rho), \varphi \in \mathscr{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathrm{K}_{\rho,\mathrm{N}})).$$

Par conséquent l'intégrale $\int_{+0} \sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}(u)}{u}}\, du$ converge. Nous constatons donc que le processus $\mathrm{X}_1 = \{\, \mathrm{X}(t),\ 0 \leq t \leq 1 \,\}$ vérifie les hypothèses h_0, h_1 et h_2 du théorème en prenant pour écart unique l'écart d défini plus haut. Dans ces conditions, (h_1) est trivialement vérifiée et $\mathrm{C} = \gamma = 1$.

5.2. Construction de μ.

Nous commençons par poser successivement,

— $h(u) = \dfrac{1}{u}\sqrt{\mathrm{Log}\,\dfrac{\mathrm{M}(u)}{u}}$, $0 < u \leq \mathrm{H}_0$ où

— $\mathrm{H}_0 = \inf\{\, 0 < u \leq 1 : \mathrm{M}(u) < 2 \,\}$,

— $v(x) = \inf\{\, 0 < u \leq \mathrm{H}_0 : h(u) \leq x \,\}$, $h(\mathrm{H}_0) \leq x < \infty$.

Pour tout $0 < \rho < 1$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $\delta > 0$, soient

— $u_{k,\rho}^{l,\delta} = \rho^k v(\delta\sqrt{\mathrm{Log}\, l})$,

— $\beta_{k,\rho}^{l,\delta} = \mathrm{S}_d([0, 1[, u_{k,\rho}^{l,\delta})$,

— $\mathrm{S}_{l,\rho}^{\delta} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \beta_{k,\rho}^{l,\delta}$, et pour tout $s \in \mathrm{S}_{l,\rho}^{\delta}$,

— $\eta_{l,\rho}^{\delta}(s) = \inf\{\, k \geq 0 : s \in \beta_{k,\rho}^{l,\delta} \,\}$,

— $x_{k,\rho}^{l,\delta} = u_{k-1,\rho}^{l,\delta}\sqrt{\mathrm{Log}\,\dfrac{\mathrm{M}(u_{k,\rho}^{l,\delta})}{u_{k,\rho}^{l,\delta}}}$, $k \geq 1$.

Convergence des séries $\sum\limits_k x_{k,\rho}^{l,\delta}$:

$$\int_{u_{k+1,\rho}^{l,\delta}}^{u_{k,\rho}^{l,\delta}} \sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{M}(u)}{u}}\, du \geq \rho(1-\rho)x_{k,\rho}^{l,\delta},$$

d'où

Répétant la même chose avec $-$ X, on déduit de la symétrie de X

$$\forall N \geq N(\rho) \quad , \quad \forall 0 < \rho < 1 \quad , \quad \varphi \in \mathscr{U}_{\infty}(XK_{X,N})$$

et, en outre,

$$\text{(1)} \qquad P\left\{ \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(t)}{\varphi(t)} \leq 1 + \sum_{k>N} y_k \right\} = 1.$$

Posons maintenant $\varphi_n(t) = \sqrt{(2 + \varepsilon_n) \operatorname{Log} t}$, $(\varepsilon_n \downarrow 0,\ n \to \infty)$; puisque $J(\varphi_n) < \infty$ pour tout n, on déduit de (1),

$$P\left\{ \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|X(t)|}{\sqrt{2 \operatorname{Log} t}} \leq 1 \right\} = 1,$$

en faisant simultanément tendre n et N vers l'infini.

B) $J(\varphi) = \infty$. Fixons $\rho \in]0, 1[$ et $N > N(\rho)$; pour tout n, il existe $s_n \in [n, n + 1]$ tel que

$$K_{X,N}(s_n) = 1.$$

Posons alors $\eta'_n = X(s_n)$, la suite η'_n vérifie les conditions a) et b) du lemme $\mathscr{Q}$; par conséquent,

$$\varphi \in \mathscr{L}_{\infty}(\eta'_n) = \mathscr{L}_{\infty}(X(s_n)) \subset \mathscr{L}_{\infty}(X.K_{X,N}),$$

d'où le théorème 4.1. Enfin, si $\varphi_0(t) = \sqrt{2 \operatorname{Log} t}$, alors $J(\varphi_0) = \infty$. Par conséquent, $\varphi_0 \in \mathscr{L}_{\infty}(X)$, d'où

$$P\left\{ \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(t)}{\sqrt{2 \operatorname{Log} t}} \geq 1 \right\} = 1,$$

et le corollaire 4.2.

V. CLASSES A L'INFINI DE $X - \Delta\mu$

5.1. Considérons comme au paragraphe IV un processus gaussien centré $X(t)$, $t \geq 0$ stationnaire sur $\mathbb{R}_+$, de covariance $r(h) \equiv E[X(t).X(t + h)]$ continue avec $r(0) = 1$, vérifiant (H_1) et (H_2). Nous notons

$$d(s, t) = d(|s - t|) = [2(1 - r(|s - t|))]^{\frac{1}{2}}$$

et pour toute partie bornée non vide T de $\mathbb{R}_+$, tout $u > 0$

$$M(T, u) = M_d(T, u),$$
$$M(u) \quad = M_d([0, 1], u).$$

Le théorème ($\mathfrak{F}$) (cf. § IV) montre que (H_1) se traduit sur $M(u)$ par le fait que

$$\text{(1)} \qquad \int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} M(u)}\,du < \infty.$$

Par conséquent l'intégrale $\int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M(u)}{u}}\, du$ converge. Nous constatons donc que le processus $X_1 = \{ X(t),\ 0 \leq t \leq 1 \}$ vérifie les hypothèses h_0, h_1 et h_2 du théorème en prenant pour écart unique l'écart d défini plus haut. Dans ces conditions, (h_1) est trivialement vérifiée et $C = \gamma = 1$.

5.2. Construction de μ.

Nous commençons par poser successivement,

— $h(u) = \frac{1}{u}\sqrt{\operatorname{Log} \frac{M(u)}{u}}$, $0 < u \leq H_0$ où

— $H_0 = \inf \{ 0 < u \leq 1 : M(u) < 2 \}$,

— $v(x) = \inf \{ 0 < u \leq H_0 : h(u) \leq x \}$, $h(H_0) \leq x < \infty$.

Pour tout $0 < \rho < 1$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $\delta > 0$, soient

— $u_{k,\rho}^{l,\delta} = \rho^k v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} l})$,

— $\beta_{k,\rho}^{l,\delta} = S_d([0, 1[, u_{k,\rho}^{l,\delta})$,

— $S_{l,\rho}^{\delta} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \beta_{k,\rho}^{l,\delta}$, et pour tout $s \in S_{l,\rho}^{\delta}$,

— $\eta_{l,\rho}^{\delta}(s) = \inf \{ k \geq 0 : s \in \beta_{k,\rho}^{l,\delta} \}$,

— $x_{k,\rho}^{l,\delta} = u_{k-1,\rho}^{l,\delta}\sqrt{\operatorname{Log} \frac{M(u_{k,\rho}^{l,\delta})}{u_{k,\rho}^{l,\delta}}}$, $k \geq 1$.

Convergence des séries $\sum_k x_{k,\rho}^{l,\delta}$:

$$\int_{u_{k+1,\rho}^{l,\delta}}^{u_{k,\rho}^{l,\delta}} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M(u)}{u}}\, du \geq \rho(1 - \rho) x_{k,\rho}^{l,\delta},$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{k,\rho}^{l,\delta} \leq \frac{1}{\rho(1 - \rho)} \int_0^{\rho v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} l})} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M(u)}{u}}\, du < \infty.$$

Cette dernière inégalité montre aussi, indépendamment de δ et ρ, que

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{k,\rho}^{l,\delta} = 0.$$

Nous définissons à présent $m_{l,\delta,\rho} : [0, 1[\to \mathbb{R}_+$ en posant,

$$m_{l,\delta,\rho}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \in S^{\delta}_{l,\rho} \quad \text{et} \quad \eta^{\delta}_{l,\rho}(s) = 0, \\ \sum_{k=1}^{\eta^{\delta}_{l,\rho}(s)} x^{l,\delta}_{k,\rho} & \text{si} \quad s \in S^{\delta}_{l,\rho} \quad \text{et} \quad \eta^{\delta}_{l,\rho}(s) > 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} x^{l,\delta}_{k,\rho} & \text{si} \quad s \in [0, 1[\backslash S^{\delta}_{l,\rho}. \end{cases}$$

Alors μ, qui dépend de X mais aussi de ρ et δ, est défini comme suit :

$$\forall s \geq 0,\ \mu_{\delta,\rho}(\omega, s) = \operatorname{sgn}(X(\omega, s)) \sum_{j=0}^{\infty'} I_{[j,j+1[}(s) m_{j,\delta,\rho}(\tau_{-j}(s)),$$

où τ_x est la translation par x.

Nous notons enfin

— $\forall t \geq 0,\ \pi_{\delta,\rho}(t) = \dfrac{1}{\rho(1-\rho)} \displaystyle\int_0^{\rho v(\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} t})} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M(u)}{u}}\, du$

et

$$\pi_{\delta,\rho}(\omega, t) = \operatorname{sgn}(X(\omega, s)) \pi_{\delta,\rho}(t),$$

— pour tout $\delta > 0$,

$$\Theta(\delta) = \bigcup_{l=0}^{\infty} \tau_l(\beta^{l,\delta}_{0,\rho}) = \bigcup_{l=0}^{\infty} \tau_l(S([0, 1[, v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} l}))).$$

La proposition suivante résume les propriétés principales de μ et Θ, sa démonstration est immédiate.

PROPOSITION 5.1. — 1) $\sup_{s \geq n} | \mu_{\delta,\rho}(\omega, s) | \leq \pi_{\delta,\rho}(n)$ *pour tout* $0 < \rho < 1$ et $\delta > 0$ *et* $\lim_{s \to \infty} | \mu_{\delta,\rho}(\omega, s) | = 0$.

2) *Les ensembles* $\Theta(\delta)$ *ne dépendent que de* δ *(et de* X *évidemment); de plus, pour tout* $n \geq 1$, $\delta > 0$

— $\# ([n, n+1[) \cap \Theta(\delta)) = M \circ v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} n}) < \infty$,
— $\# ([n, \infty[) \cap \Theta(\delta)) = \infty$.

3) $\pi_{\rho,\delta}(.)$ *est décroissante en* δ, *tandis que*

$$\# ([n, n+1[) \cap \Theta(\delta)) = M \circ v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} n})$$

croît avec δ.

nature du terme ajouté à $\sqrt{2 \log t}$. Nous déterminons celui-ci dans plusieurs

Nous définissons notre test intégral, soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante et $\delta > 0$; nous posons

$$I(\varphi, \delta) = \int^{+\infty} \Psi \circ \varphi(u) M \circ v\left(\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} u}\right) du.$$

THÉORÈME 5.2. (Majoration). — *Soit* $X(t)\, t \geq 0$, *un processus gaussien centré stationnaire de covariance* $r(t)$ *continue avec* $r(0) = 1$, *vérifiant* (H_1) *et* (H_2); *dans ces conditions, s'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $I(\varphi, \delta) < \infty$, *alors*

de X coïncident exactement avec celles de $\{ X(u),\, u \in \theta(X) \}$ où $\theta(X) \subset \mathbb{R}_+$ est tel que

1) Si $\gamma_n = \#([n, n+1]) \cap \theta(X))$, tous les γ_n sont finis; de plus, la suite (γ_n) est croissante et $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$.

2) Pour tout n, $\#([n, \infty] \cap \theta(X)) = \infty$.

On peut donc se demander si cette propriété reste vraie sous (H_1) et (H_2) seulement. Le corollaire 5.4 apporte un élément de réponse. Il établit l'existence d'une famille d'ensembles $\{ \Theta_X(\delta) \}_{\delta > 0}$, telle que :

a) 1) et 2) sont vérifiés par chaque $\Theta_X(\delta)$, $\delta > 0$;

b) lorsque δ croît, $\gamma_n(\delta) = \#([n, n+1] \cap \Theta_X(\delta))$ croît;

c) il existe $\pi_{X,\delta,\rho}(t) \to 0$, $t \to \infty$, tel que si φ appartient à $\mathscr{U}_\infty(\{ X(s), s \in \Theta_X(\delta) \})$ pour un certain $\delta > 0$, alors $\varphi + K(\delta, \rho)\pi_{X,\delta,\rho}$ appartient à $\mathscr{U}_\infty(X)$, où $K(\delta, \rho) > 0$;

d) soit $A_X(\varphi, \omega) = \{ t \geq 0 : X(\omega, t) > \varphi(t) \}$. Si φ appartient à $\mathscr{L}_\infty(\{ X(s), s \in \Theta_X(\delta) \})$ pour $\delta > 0$ assez petit, alors

$$P\{ \omega : \#(A_X(\varphi, \omega) \cap \Theta_X(\delta)) = \infty \} = 1,$$

en outre $\varphi \in \mathscr{L}_\infty(X)$ trivialement.

Le corollaire 5.5 fournit un test concernant cette fois des familles de processus obtenus en perturbant X de façon additive. Les processus de perturbation $\mu_{\delta,\rho}$ qui dépendent de X ont une forme très simple, mais leur construction reste compliquée. Ces perturbations permettent cependant de posséder un bon test intégral général, mais abstrait.

Avant de procéder aux démonstrations, nous énonçons plusieurs lemmes nécessaires.

LEMME 5.8 ([9], p. 122). — *Soient* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *décroissante*, $h : [A, \infty) \to [0, \infty)$, $A > 0$, *borélienne et*

$$\Phi_A = \{ \varphi : [A, \infty) \to [0, \infty) \text{ croissante} \},$$

posons

$$F(\varphi) = \int_A^\infty g \circ \varphi(t) h(t)\, dt.$$

COROLLAIRE 5.6. — *Sous les hypothèses du théorème 5.2, pour tout*

$$0 < \delta < \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\varphi_\delta(t) = \sqrt{2 \log t + 2 \log \mathrm{M} \circ v(\delta\sqrt{2 \log t}) + \mathrm{Log} \log t} \in \mathscr{L}_\infty(\mathrm{X})$$

COROLLAIRE 5.7. — *Sous les hypothèses du théorème 5.2, pour tout* $\delta > 0$, $0 < \rho < 1$, *et pour tout* $\Delta > \sqrt{2} \vee \frac{1}{\rho\delta}$, $c > 1$

$$\sqrt{2 \log t + 2 \log \mathrm{M} \circ v(\delta\sqrt{2 \log t}) + c \log \log t} \\ + \frac{\Delta}{\rho(1-\rho)} \int_0^{\rho v(\delta\sqrt{2 \log t})} \sqrt{\mathrm{Log} \frac{\mathrm{M}(u)}{u}}\, du \in \mathscr{U}_\infty(\mathrm{X}).$$

Ces deux derniers corollaires permettent de construire dans la pratique des fonctions appartenant aux classes $\mathscr{L}$ ou $\mathscr{U}$ lorsque la covariance $r(t)$ du processus X vérifie seulement les hypothèses (H_1) et (H_2); on ne requiert donc aucune autre condition sur $r(t)$ au voisinage de $t = 0$ que celle qui assure la continuité des trajectoires de X, ce qui est bien naturel. Auparavant, on ne connaissait les classes $\mathscr{L}$ et $\mathscr{U}$ que lorsque $d(t) = [2(1 - r(t))]^{\frac{1}{2}}$ vérifiait la condition supplémentaire

* $d(t) = t^\alpha \mathrm{H}(t)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, où $\mathrm{H}(t)$ est une fonction à variation lente, pour tout $t > 0$ suffisamment petit.

En dehors de ce cas bien particulier, on savait seulement, du moins à notre connaissance, que

a) si X vérifie (H_2), alors $\sqrt{2 \log t}$ appartient à $\mathscr{L}_\infty(\mathrm{X})$,

b) si X est stationnaire, $r(0) = 1$ et presque sûrement majoré, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sqrt{(2 + \varepsilon) \log t}$ appartient à $\mathscr{U}_\infty(\mathrm{X})$.

Notons que le théorème 2.5 renforce nettement *b*) puisque nous avons montré *b'*) pour tout $\varepsilon > 0$, $\sqrt{2 \log t} + \varepsilon$ appartient à $\mathscr{U}_\infty(\mathrm{X})$.

Ces deux corollaires fournissent des renseignements précieux sur la nature du terme ajouté à $\sqrt{2 \log t}$. Nous déterminons celui-ci dans plusieurs cas importants de façon satisfaisante au paragraphe VI. Nous verrons aussi que nos résultats restent proches de ceux que l'on connaissait lorsque d est du type *, bien que nos évaluations de $\mathrm{P}\{\sup_{0 \le t \le 1} \mathrm{X}(t) > \lambda\}$ soient moins fines que celles établies dans ce cas par Pickands (cf. [*15*]).

Plusieurs auteurs ont constaté, lorsque d est du type *, que les classes de X coïncident exactement avec celles de $\{ X(u), u \in \theta(X) \}$ où $\theta(X) \subset \mathbb{R}_+$ est tel que

1) Si $\gamma_n = \#([n, n+1]) \cap \theta(X))$, tous les γ_n sont finis; de plus, la suite (γ_n) est croissante et $\lim_{n \to \infty} \gamma_n = +\infty$.

2) Pour tout n, $\#([n, \infty] \cap \theta(X)) = \infty$.

On peut donc se demander si cette propriété reste vraie sous (H_1) et (H_2) seulement. Le corollaire 5.4 apporte un élément de réponse. Il établit l'existence d'une famille d'ensembles $\{ \Theta_X(\delta) \}_{\delta > 0}$, telle que :

a) 1) et 2) sont vérifiés par chaque $\Theta_X(\delta)$, $\delta > 0$;

b) lorsque δ croît, $\gamma_n(\delta) = \#([n, n+1] \cap \Theta_X(\delta))$ croît;

c) il existe $\pi_{X,\delta,\rho}(t) \to 0$, $t \to \infty$, tel que si φ appartient à $\mathscr{U}_\infty(\{ X(s), s \in \Theta_X(\delta) \})$ pour un certain $\delta > 0$, alors $\varphi + K(\delta, \rho)\pi_{X,\delta,\rho}$ appartient à $\mathscr{U}_\infty(X)$, où $K(\delta, \rho) > 0$;

d) soit $A_X(\varphi, \omega) = \{ t \geq 0 : X(\omega, t) > \varphi(t) \}$. Si φ appartient à $\mathscr{L}_\infty(\{ X(s), s \in \Theta_X(\delta) \})$ pour $\delta > 0$ assez petit, alors

$$P \{ \omega : \#(A_X(\varphi, \omega) \cap \Theta_X(\delta)) = \infty \} = 1,$$

en outre $\varphi \in \mathscr{L}_\infty(X)$ trivialement.

Le corollaire 5.5 fournit un test concernant cette fois des familles de processus obtenus en perturbant X de façon additive. Les processus de perturbation $\mu_{\delta,\rho}$ qui dépendent de X ont une forme très simple, mais leur construction reste compliquée. Ces perturbations permettent cependant de posséder un bon test intégral général, mais abstrait.

Avant de procéder aux démonstrations, nous énonçons plusieurs lemmes nécessaires.

LEMME 5.8 ([9], p. 122). — *Soient* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *décroissante*, $h : [A, \infty) \to [0, \infty)$, $A > 0$, *borélienne et*

$$\Phi_A = \{ \varphi : [A, \infty) \to [0, \infty) \text{ croissante} \},$$

posons

$$F(\varphi) = \int_A^\infty g \circ \varphi(t) h(t) dt.$$

Supposons,

a_1) $\forall \varphi \in \Phi_A$, $\forall B > A$, $\int_A^B g \circ \varphi(t) h(t) dt < \infty$,

a_2) *il existe* φ_1, φ_2 *éléments de* Φ_A *tels que* $\varphi_1 \leq \varphi_2$, $F(\varphi_2) < \infty$, $F(\varphi_1) = \infty$ *et* $\lim_{B \to \infty} g \circ \varphi_1(B) \int_A^B h(t) dt = \infty$.

Posons $\widehat{\varphi} = (\varphi \vee \varphi_1) \wedge \varphi_2$, $\varphi \in \Phi_A$, *alors*

b_1) $(F(\varphi) < \infty) \Rightarrow (\widehat{\varphi}(t) \leq \varphi(t)$ *pour tout* t *assez grand et* $F(\widehat{\varphi}) < \infty)$,

b_2) $(F(\varphi) = \infty) \Rightarrow (F(\widehat{\varphi}) = \infty)$.

LEMME 5.9 ([*18*], p. 7). — *Soit* $X(t)$, $t \geq 0$ *un processus gaussien centré stationnaire à trajectoires continues. Supposons que la covariance* $r(t)$ *vérifie*

1) $r(0) = 1$,

2) $r(t) \to 0$ *quand* $t \to \infty$.

Alors pour toute fonction $\varphi(t)$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *croissante, positive, on a*

$$P\{\exists t_\omega : \forall t > t_\omega \mid X(\omega, t) \mid \leq \varphi(t)\} = 0 \text{ ou } 1.$$

LEMME 5.10 ([*5*], p. 268). — *Soit* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *une famille d'événements d'un espace d'épreuves* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, *on suppose*

1) $\sum_k P(A_k) = \infty$,

2) *il existe* $n_0 > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *et pour tout entier* $n > n_0$, *un index fini ou non* $I_n = \{m_k^{(n)}\}_k$ *tel que* $n < m_1^{(n)} < \ldots < m_k^{(n)} < \ldots$ *et*

$$(2.a) \qquad \forall n > n_0, \sum_{m \in I_n} P(A_n \cap A_m) \leq c_1 P(A_n),$$

$$(2.b) \qquad \forall n_0 > n, \forall m > n, m \notin I_n, P(A_n \cap A_m) \leq c_2 P(A_n).P(A_m),$$

alors,

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\} \geq \frac{1}{c_2}.$$

Si, de plus,

3) *pour tous entiers* n, h, $n \geq h$, *il existe* $c(h)$ *et* $H(n, h) > n$ *tels que, pour tout* $m \geq H(n, h)$

$$P(A_m \mid A_h^c \cap \ldots A_n^c) \geq c(h)P(A_m),$$

alors

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\} = 1.$$

LEMME 5.11. — *Soient* η_1, η_2 *deux v. a. gaussiennes centrées réduites* $\rho = E[\eta_1 . \eta_2]$, *et* $\varepsilon > 0$.

a) ([*5*], p. 269).

Pour tout $x > 0$, $y > 0$, $\rho xy < \varepsilon$,

$$P\{\eta_1 > x, \eta_2 > y\} \leq c(\varepsilon)P\{\eta_1 > x\}.P\{\eta_2 > y\},$$

et $\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon) = 1$.

b) ([5], p. 270).

Pour tout $0 < a \leq b,\ 0 \leq \rho \leq 1$,

$$P\{\eta_1 > a, \eta_2 > b\} \leq 0(1)\exp\left(-\frac{1-\rho}{4}b^2\right)P\{\eta_1 > a\}.$$

LEMME 5.12 ([17], p. 2032). — *Soient* $X(t)$ *un processus gaussien centré de covariance* $r(s, t)$ *avec* $r(t, t) = 1$ *et,*

$$E_n = \{\forall \nu = 0, 1, \ldots, m_n, X(t_{n,\nu}) \leq x_{n,\nu}\}$$

où $(t_{n,\nu})$ *est une suite double formée de points distincts, alors*

$$\left| P\left\{\bigcap_1^n E_k\right\} - \prod_1^n P(E_k)\right| \leq \sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{\mu=0}^{m_j}\sum_{\nu=0}^{m_i}|r|\int_0^1 g(x_{i,\nu}, x_{j,\mu}, \lambda r)d\lambda$$

où $r = r(t_{i,\nu}, t_{j,\mu})$ *dans la sommation, et*

$$g(x, y, \lambda r) = \frac{1}{2\pi(1-\lambda^2r^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2-2\lambda rxy}{2(1-\lambda^2r^2)}\right\}$$

Le lemme suivant se déduit du lemme 5.8.

LEMME 5.13. — *Soit* $0 < \varepsilon < 1$; *posons pour tout* $u > 1$

$$f_\varepsilon(u) = \sqrt{(2-\varepsilon)\,\mathrm{Log}\,u},$$
$$g_\varepsilon(u) = \sqrt{(2+\varepsilon)\,\mathrm{Log}\,u},$$
$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(u) = (f_\varepsilon(u) \vee \varphi(u)) \wedge g_\varepsilon(u),$$

alors $\forall\delta > 0,\ \forall 0 < \varepsilon < 1$,

— $(I(\varphi, \delta) < \infty) \Rightarrow (I(\widehat{\varphi}_\varepsilon, \delta) < \infty$ *et* $\widehat{\varphi}_\varepsilon \leq \varphi$ *au voisinage de l'infini*),

— $(I(\varphi, \delta) = \infty) \Rightarrow (I(\widehat{\varphi}_\varepsilon, \delta) = \infty)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que les hypothèses du lemme 5.8 sont satisfaites. Puisque $I(\varphi, \delta)$ est bien du type « $F(\varphi)$ » défini dans ce lemme, montrons donc

1) $\forall\varphi$ croissante, $\forall B > A > 0$, $\displaystyle\int_A^B \Psi\circ\varphi(u)\ M\circ v(\delta\sqrt{\mathrm{Log}\,u})du$ est fini,

2) $I(f_\varepsilon, \delta) = \infty$ et $\displaystyle\lim_{B\to\infty}\Psi\circ f_\varepsilon(B)\int_A^B M\circ v(\delta\sqrt{\mathrm{Log}\,u})du = \infty$,

3) $I(g_\varepsilon, \delta)$ est fini.

1) est trivial et puisque $I(\varphi, \delta) \geq J(\varphi) = \displaystyle\int^{+\infty}\Psi\circ\varphi(u)du$, il suit que $I(f_\varepsilon, \delta)$ diverge pour tout $0 \leq \varepsilon < 1$. En outre,

$$\begin{aligned}\Psi\circ f_\varepsilon(B)\int_A^B M\circ v(\delta\sqrt{\mathrm{Log}\,u})du &\geq 0(1)B\Psi\circ f_\varepsilon(B)\\ &\geq 0(1)\frac{B}{B^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{\mathrm{Log}\,B}}\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{B\to\infty} \Psi \circ f_\varepsilon(B) \int_A^B M \circ v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u})du = \infty$, d'où 2).

Enfin,

$$h \circ v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u}) = \frac{1}{v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u})} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{M \circ v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u})}{v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u})}} \leq \delta\sqrt{\operatorname{Log} u},$$

d'où

$$M \circ v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u}) \leq \exp \{ (v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u})\delta\sqrt{\operatorname{Log} u})^2 \} . v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u}).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $0 < u_\varepsilon < \infty$ tel que si $u > u_\varepsilon$

$$M \circ v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u}) \leq \exp \frac{\varepsilon}{4} \operatorname{Log} u = u^{\varepsilon/4}$$

et

$$\int_{u_\varepsilon}^\infty \Psi \circ g_\varepsilon(u) M \circ v(\delta\sqrt{\operatorname{Log} u})du \leq \int_{u_\varepsilon}^\infty u^{\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - 1} du < \infty,$$

donc $I(g_\varepsilon, \delta)$ converge, ce qui établit le lemme.

Démonstration des théorèmes 5.2 et 5.3.

A) $\exists \delta > 0$ *tel que* $I(\varphi, \delta) < \infty$.

Le lemme 5.13 établit pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\text{(1)} \qquad \int^{+\infty} \Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(u) M \circ v(\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} u})du < \infty,$$

mais puisque $y \to M \circ v(y)$ est croissante, on conserve (1) lorsque δ est remplacé par tout nombre $0 < \delta' \leq \delta$, alors

$$\text{(1')} \quad \forall 0 < \varepsilon < 1, \forall 0 < \delta' \leq \delta, \sum_n \Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(n + 1) M \circ v(\delta'\sqrt{2 \operatorname{Log} n}) < \infty,$$

mais pour tout $0 < \delta' < \delta$, et tout n suffisamment grand,

$$\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} n} \geq \delta'\sqrt{2 \operatorname{Log} n + 1},$$

finalement,

$$\text{(1'')} \quad \forall 0 < \varepsilon < 1, \forall 0 < \delta' < \delta, \sum_n \Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(n + 1) M \circ v(\delta'\sqrt{2 \operatorname{Log} n + 1}) < \infty.$$

Nous fixons $0 < \delta' < \delta$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \rho < 1$ et choisissons $\Delta > 0$ tel que

$$\Delta \geq \sqrt{2} \vee \frac{1 + \varepsilon}{\rho\delta'}.$$

Nous posons aussi pour tout $l \geq 1$

$$\alpha_l^{(1)} = \mathrm{P}\{ \mathrm{Sup}\{ | \mathrm{X}(s) - \Delta\mu_{\delta'}(s) |, l \leq s < l+1 \} > \widehat{\varphi}_\varepsilon(l) \},$$
$$\alpha_l^{(2)} = \mathrm{P}\{ \mathrm{Sup}\{ | \mathrm{X}(s) |, s \in \theta(\delta') \cap [l, l+1[\} > \widehat{\varphi}_\varepsilon(l) \},$$
$$\alpha_l^{(3)} = \mathrm{P}\{ \mathrm{Sup}\{ | \mathrm{X}(s) - \Delta\pi_{\delta'}(s) |, l \leq s < l+1 \} > \widehat{\varphi}_\varepsilon(l) \}.$$

Puisque pour tout n assez grand,

$$1 - \varepsilon \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{\widehat{\varphi}_\varepsilon(n)}{\sqrt{2 \operatorname{Log} n}} \leq \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \leq 1 + \varepsilon,$$

nous déduisons du théorème 2.1 lorsque l est assez grand la majoration

$$\text{(3)} \qquad \max\{ \alpha_l^{(i)}, i = 1, 2, 3 \} \leq 0(1)\Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(l)\mathrm{M} \circ v(\delta'\sqrt{2 \operatorname{Log} l}).$$

Par conséquent, chacune des séries de terme général $\alpha_l^{(i)}$, $i = 1, 2$ ou 3 est convergente par $(1'')$. On applique alors le lemme de Borel Cantelli dans chacun des trois cas et nous obtenons pour $i = 1$, par exemple

$$\text{p. s. } \exists l_\omega < \infty : \forall l > l_\omega \sup_{l \leq s < l+1} | \mathrm{X}(\omega, s) - \Delta\mu_{\delta'}(s) | \leq \widehat{\varphi}_\varepsilon(l) \leq \varphi(l),$$

d'où

$$\text{p. s. } \exists s_\omega < \infty : \forall s > s_\omega \, | \mathrm{X}(\omega, s) - \Delta\mu_{\delta'}(s) | \leq \varphi(s),$$

ce qui montre que $\varphi \in \mathscr{U}_\infty(\mathrm{X} - \Delta\mu_{\delta'})$ pour tout $0 < \delta' < \delta$ et tout $\Delta > \sqrt{2} \vee \dfrac{1+\varepsilon}{\rho\delta'}$; $0 < \varepsilon < 1$ étant arbitraire. Par conséquent, on obtient,

$$\text{(4)} \quad \forall 0 < \delta' < \delta, \ \forall 0 < \rho < 1, \ \forall \Delta > \sqrt{2} \vee \frac{1}{\rho\delta'}, \ \varphi \in \mathscr{U}_\infty(\mathrm{X} - \Delta\mu_{\delta',\rho}).$$

On montre de la même façon

$$\text{(5)} \quad \forall 0 < \delta' < \delta, \ \varphi \in \mathscr{U}_\infty(\mathrm{X}(s), s \in \Theta(\delta')),$$

$$\text{(6)} \quad \forall 0 < \delta' < \delta, \ \forall 0 < \rho < 1, \ \forall \Delta > \sqrt{2} \vee \frac{1}{\delta'\rho}, \ \varphi \in \mathscr{U}_\infty(\mathrm{X} - \Delta\pi_{\delta',\rho}).$$

Ce dernier résultat prouve aussi que

$$\forall 0 < \delta < \delta', \ \forall 0 < \rho < 1 \quad \text{et} \quad \Delta > \sqrt{2} \vee \frac{1}{\delta'\rho} \quad , \quad \varphi + \Delta\pi_{\mathrm{X},\delta',\rho} \in \mathscr{U}_\infty(\mathrm{X}).$$

B) $\exists 0 < \delta < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ *tel que* $\mathrm{I}(\varphi, \delta) = \infty$.

Nous déduisons du lemme 5.13 et de notre hypothèse que

$$\forall 0 < \varepsilon < 1 \quad , \quad \int^{+\infty} \Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(u)\mathrm{M} \circ v(\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} u})du = \infty,$$

puisque

$$(\mathrm{I}(\varphi, \delta) = \infty) \rightleftarrows (\mathrm{I}(\widehat{\varphi}_\varepsilon, \delta) = \infty).$$

Mais alors la série $\sum_n \Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(n)\ M \circ v\big(\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} n + 1}\big)$ diverge. Soit maintenant $\delta' > \delta$; pour tout n suffisamment grand

$$\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} n + 1} \leq \delta'\sqrt{2 \operatorname{Log} n - 1},$$

ainsi,

(7) $\forall 0 < \varepsilon < 1,\ \forall \delta' > \delta,\ \sum_n \Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(n) M \circ v\big(\delta'\sqrt{2 \operatorname{Log} n - 1}\big) = \infty.$

Fixons $1 > \varepsilon > 0$, $1 > \alpha > 0$, $\delta' > \delta$ et j_0 entier tels que,

(7′) $$- 2\varepsilon + \alpha < \frac{1}{2},$$

$$- \delta < \delta' < \frac{1 - \varepsilon}{2\sqrt{2}},$$

$$- \forall j \geq j_0,\ r(j - 1) \leq \varepsilon.$$

On déduit de (7) qu'il existe un entier $r < j_0$ tel que,

(8) $$\sum_{n \equiv r \bmod (j_0)} \Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(n) M \circ v\big(\delta'\sqrt{2 \operatorname{Log} n - 1}\big) = \infty.$$

Posons maintenant,

(9) $$A_n = \{ \exists s \in \Theta(\delta') \cap [n - 1, n[\ :\ |\, X(s)\,| > \widehat{\varphi}_\varepsilon(n) \},$$

où nous rappelons que

$$\Theta(\delta') \cap [n - 1, n[\ = \tau_{n-1}(\beta_{0,\rho}^{n-1,\delta'}).$$

Puisque X est stationnaire, nous avons

(10) $$P(A_n) = P\{ \exists s \in \beta_{0,\rho}^{n-1,\delta'} : |\, X(s)\,| > \widehat{\varphi}_\varepsilon(n) \}.$$

Nous allons appliquer le théorème 2.1.(2) pour minorer $P(A_n)$. Nous vérifions auparavant que les hypothèses sont bien réalisées; tout d'abord pour tout n assez grand

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\widehat{\varphi}_\varepsilon(n)}{\sqrt{2 \operatorname{Log} n - 1}} \leq 1 + \varepsilon,$$

et aussi $\delta' < \dfrac{1 - \varepsilon}{2\sqrt{2}}$ par (7′). Dans ces conditions pour tout n assez grand (et donc pour tout n !),

(11) $$P(A_n) \geq 0(1)\Psi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon(n) M \circ v\big(\delta'\sqrt{2 \operatorname{Log} n - 1}\big),$$

et par (8),

$$\sum_{n \equiv r \bmod (j_0)} P(A_n) = \infty. \tag{12}$$

La première hypothèse du lemme 5.10 est donc vérifiée. Posons à présent,

$$- \ m_n = n + [n^\alpha],$$
$$- \ s_n = \Theta(\delta') \cap [n-1, n[= \tau_{n-1}(\beta_{0,\rho}^{n-1,\delta'}),$$
$$\Phi_n = \widehat{\varphi_\varepsilon}(n),$$

et soit $n \equiv r \bmod (j_0)$

$$\sum_{n<m\leq m_n} P(A_n \cap A_m) \leq 4 \sum_{\substack{n<m\leq m_n \\ m\equiv r \ (\mathrm{mod}\ j_0) \\ s\in s_n \\ t\in s_m}} P\{X(s) > \Phi_n, X(t) > \Phi_m\},$$

mais (lemme 5.11 *b*)),

$$P\{X(s) > \Phi_n, X(t) > \Phi_m\} \leq 0(1)\Psi(\Phi_n)e^{-\frac{1-r(s-t)}{4}\Phi_m^2},$$
$$\leq 0(1)\Psi(\Phi_n)e^{-\frac{1-\varepsilon}{4}\Phi_m^2},$$

par (7′), puisque $|s-t| \geq j_0 - 1$. Or

$$\Phi_m = \widehat{\varphi_\varepsilon}(m) \geq f_\varepsilon(m) = \sqrt{(2-\varepsilon)\ \mathrm{Log}\ m},$$

d'où,

$$P\{X(s) > \Phi_n, X(t) > \Phi_m\} \leq 0(1)\Psi(\Phi_n)m^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)},$$

et,

$$\sum_{\substack{n<m\leq m_n \\ m\equiv r \bmod (j_0)}} P(A_n \cap A_m) \leq 0(1)(\# s_n)\Psi(\Phi_n) \sum_{\substack{n<m\leq m_n \\ m\equiv r \bmod (j_0)}} (\# s_m)m^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)},$$

$$\leq 0(1)P(A_n) \sum_{\substack{n<m\leq m_n \\ m\equiv r \bmod (j_0)}} (\# s_m)m^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}, \tag{13}$$

par (11).

En outre,

$$\#(s_m) = M \circ v(\delta'\sqrt{2\ \mathrm{Log}\ m - 1})$$
$$= \exp\left([v(\delta'\sqrt{2\ \mathrm{Log}\ n - 1})h \circ v(\delta'\sqrt{2\ \mathrm{Log}\ m - 1})]^2\right)v(\delta'\sqrt{2\ \mathrm{Log}\ m - 1}),$$
$$\leq \exp\left([v(\delta'\sqrt{2\ \mathrm{Log}\ m - 1})\delta'\sqrt{2\ \mathrm{Log}\ m - 1}]^2\right)v(\delta'\sqrt{2\ \mathrm{Log}\ m - 1}),$$
$$\leq \exp \varepsilon\ \mathrm{Log}\ m = m^\varepsilon, \tag{14}$$

pourvu que m soit suffisamment grand. Cela revient à supposer n assez grand puisque $m \geq n$.

De (13) et (14), il suit,

$$\sum_{\substack{n<m\leq m_n \\ m\equiv r \bmod (j_0)}} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m) \leq 0(1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \sum_{n<m\leq m_n} m^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon},$$

$$\leq 0(1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \int_n^{n+n^\alpha} x^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon} dx,$$

$$\leq 0(1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}}{\frac{1}{2}+2\varepsilon} \right]_n^{n+n^\alpha},$$

$$\leq 0(1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \left[\frac{(1+n^{\alpha-1})^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} - 1}{\frac{1}{2}+2\varepsilon} \right] n^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

Mais $\forall 0 < c < 1$, $\forall u > 0$, $(1+u)^c - 1 \leq cu$, donc,

$$n^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} \left[\frac{(1+n^{\alpha-1})^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} - 1}{\frac{1}{2}+2\varepsilon} \right] \leq n^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} n^{\alpha-1},$$

$$\leq n^{2\varepsilon+\alpha-\frac{1}{2}} \to 0(n \to \infty),$$

par (7').

On en déduit donc, pour tout n,

$$\sum_{\substack{n<m\leq m_n \\ m\equiv r \bmod (j_0)}} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m) \leq 0(1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n). \tag{15}$$

Soient maintenant n et $m > m_n$, alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m) \leq \sum_{\substack{s\in s_n \\ t\in s_m}} \mathrm{P}\{ \mathrm{X}(s) > \Phi_n, \mathrm{X}(t) > \Phi_m \}. \tag{16}$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse de « mélange » (H_2) et aussi le fait que

$$\Phi_n = \widehat{\varphi}_\varepsilon(n) \leq g_\varepsilon(n) = \sqrt{(2+\varepsilon) \operatorname{Log} n}.$$

Pourvu que n soit assez grand, on aura,

$$r(|s-t|)\Phi_n\Phi_m \leq 0(1) \frac{\sqrt{\operatorname{Log} m \operatorname{Log} n}}{\operatorname{Log} m - n}. \tag{17}$$

Écrivant

$$m = (m-n)\frac{m}{m-n} \leq (m-n)\frac{m_n}{m_n - n} \leq (m-n)[1 + 0(1)n^{1-\alpha}],$$

il suit, d'une part,

$$\sqrt{\frac{\operatorname{Log} m}{\operatorname{Log} m-n}} \leq \sqrt{\frac{\operatorname{Log} m-n+\operatorname{Log}\left(1+0(1) n^{1-\alpha}\right)}{\operatorname{Log} m-n}},$$

$$\leq \sqrt{1+0(1) \frac{\operatorname{Log} n^{1-\alpha}}{\operatorname{Log} m_n-n}} \leq \sqrt{1+0(1) \frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

et, d'autre part,

$$\sqrt{\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} m-n}} \leq \sqrt{\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} m_n-n}} \leq \sqrt{\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}\left[n^\alpha\right]}} \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha}},$$

d'où,

$$\sup_{\substack{n, m \\ m>m_n \\ s \in s_n, t \in s_m}} r(|s-t|) \Phi_n \Phi_m<\infty . \tag{18}$$

Nous déduisons alors du lemme (5.11, *a*),

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X}(s)>\Phi_n, \mathrm{X}(t)>\Phi_m\} \leq 0(1) \ \mathrm{P}\{\mathrm{X}(s)>\Phi_n\} . \mathrm{P}\{\mathrm{X}(t)>\Phi_m\}, \tag{19}$$

pour tout m, n, $m > m_n$, $s \in s_n$ et $t \in s_m$.

(11), (16) et (19) établissent,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}_m) \leq 0(1) \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) . \mathrm{P}(\mathrm{A}_m) \tag{20}$$

pour tout n et $m > m_n$.

Les relations (8), (15) et (20) permettent de vérifier les hypothèses requises au lemme (5.10). Nous concluons donc,

$$\mathrm{P}\{\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \mathrm{A}_n\}>0, \tag{21}$$

et par inclusion,

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X}(t)>\widehat{\varphi}_\varepsilon(t) \text{ infiniment souvent}\}>0;$$

d'où, à l'aide du lemme 5.9, $\widehat{\varphi}_\varepsilon \in \mathscr{L}_\infty(\mathrm{X})$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit (cf. (7')). Mais alors puisque, $g_\varepsilon \in \mathscr{U}_\infty(\mathrm{X})$,

$$\varphi \in \mathscr{L}_\infty(\mathrm{X}), \tag{22}$$

ce qui prouve (5.3.2).

Nous montrons maintenant que, en fait, $\mathrm{P}\{\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \mathrm{A}_n\} = 1$, ce qui ne peut être établi directement à partir du lemme 5.9. Nous en déduirons que

$$\varphi \in \mathscr{L}_\infty(\{\mathrm{X}(s) \; s \in \Theta(\delta')\}) \quad \text{et} \quad \varphi \in \mathscr{L}_\infty(\mathrm{X}-\Delta \mu_{\delta', \rho}).$$

Nous nous servirons du lemme 5.10 entre autres.

Soient (h, n) $n \geq h > 0$ et $k > n$.

Du lemme 5.12, nous déduisons

$$(23) \quad | P\{ A_k \cap A_h^c \cap \ldots \cap A_n^c \} - P\{ A_k \}.P\{ A_h^c \cap \ldots \cap A_n^c \} |,$$

$$\leq \sum_{j=h}^{n} \sum_{\substack{s \in s_k \\ t \in s_j}} | r | \int_0^1 g(\Phi_k, \Phi_j, \lambda r) d\lambda,$$

où $r = r(| s - t |)$ dans la sommation et

$$g(\Phi_k, \Phi_j, \lambda r) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \lambda^2 r^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\Phi_k^2 + \Phi_j^2 - 2\lambda r \Phi_j \Phi_k}{1 - \lambda^2 r^2}}.$$

On a, sous (H_2),

$$r(| s - t |) \leq 0(1) \frac{1}{\text{Log } k - j - 1} \leq 0(1) \frac{1}{\text{Log } k - j},$$

pour tout k assez grand, et de la même façon qu'en (18)

$$(24) \quad \lim_{k \to \infty} \operatorname{Sup}_{j=h}^{n} \operatorname{Sup}_{\substack{s \in s_k \\ t \in s_j}} r(| s - t |) \Phi_k \Phi_j = 0.$$

Il s'ensuit, pour tout k suffisamment grand, $j \in [h, n]$, $s \in s_k$, $t \in s_j$,

$$g(\Phi_k, \Phi_j, \lambda r(| s - t |)) \leq 0(1) e^{-\frac{1}{2}\Phi_k^2}.$$

Alors,

$$r(| s - t |) = \frac{r(| s - t |)}{\Phi_k} \Phi_k \leq 0(1) \frac{1}{\Phi_k} \frac{\sqrt{(2 + \varepsilon) \text{ Log } k}}{\text{Log } k - j},$$

$$\leq 0(1) \frac{1}{\Phi_k} \frac{\sqrt{\text{Log } k}}{\text{Log } k - n} \leq 0(1) \frac{1}{\Phi_k \sqrt{\text{Log } k}},$$

quand $k \to \infty$, puisque n est fixé.

D'où,

$$r(| s - t |) \int_0^1 g(\Phi_k, \Phi_j, \lambda r(| s - t |)) d\lambda \leq 0(1) \frac{1}{\Phi_k} e^{-\frac{1}{2}\Phi_k^2} \frac{1}{\sqrt{\text{Log } k}},$$

$$\leq 0(1) \Psi(\Phi_k) \frac{1}{\sqrt{\text{Log } k}}.$$

Ainsi,

$$(25) \quad | P\{ A_k \cap A_h^c \cap \ldots \cap A_n^c \} - P\{ A_k \}.P\{ A_h^c \cap \ldots \cap A_n^c \} |$$

$$\leq 0(1)[\# (s_k) \Psi(\Phi_k)] \left[\sum_{j=h}^{n} \# (s_j) \right] \frac{1}{\sqrt{\text{Log } k}};$$

mais puisque (cf. th. 2.1),

$$\lim_{k \to \infty} \frac{P(A_k)}{\Psi(\Phi_k) \# (s_k)} = 1;$$

divisant chaque membre de (25) par $P(A_k).P\{A_h^c \cap \ldots \cap A_n^c\}$ on obtient

$$\left| \frac{P\{A_k \mid A_h^c \cap \ldots \cap A_n^c\}}{P(A_k)} - 1 \right| \leq 0(1) \frac{C(n, h)}{\sqrt{\operatorname{Log} k}} \tag{26}$$

où $C(n, h)$ ne dépend pas de k. Finalement,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{P\{A_k \mid A_h^c \cap \ldots A_n^c\}}{P(A_k)} = 1. \tag{27}$$

Ce qui établit l'hypothèse (3) du lemme 5.10. D'où,

$$P\{\overline{\lim_{p \to \infty}}\, A_{r+pj_0}\} = 1 \qquad \text{et} \qquad P\{\overline{\lim_{n \to \infty}}\, A_n\} = 1. \tag{28}$$

Notons finalement,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{\omega : \exists (t_n(\omega)) \subset \Theta(\delta') : t_n(\omega) \to \infty, (n \to \infty) \text{ et} \\
&\qquad \forall n, X(\omega, t_n(\omega)) > \widehat{\varphi_\varepsilon}(t_n(\omega))\}, \\
\Omega_2 &= \{\omega : \exists s_\omega < \infty : \forall s > s_\omega \mid X(\omega, s) \mid \leq g_\varepsilon(s)\}, \\
\Omega_3 &= \{\omega : \exists (t_n(\omega)) \subset \Theta(\delta') : t_n(\omega) \to \infty \ (n \to \infty) \text{ et} \\
&\qquad \forall n, \mid X(\omega, t_n(\omega)) - \Delta\mu_{\delta',\rho}(\omega, t_n(\omega)) \mid > \varphi(t_n(\omega))\}, \\
\Omega_4 &= \{\omega : \exists t_n(\omega) \to \infty, (n \to \infty), (t_n(\omega)) \subset \Theta(\delta') \text{ et} \\
&\qquad \forall n, X(\omega, t_n(\omega)) > \varphi(t_n(\omega))\}.
\end{aligned}$$

Clairement,

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1) &= 1 \quad \text{par (28)}, \\
P(\Omega_2) &= 1 \quad \text{puisque} \quad g_\varepsilon \in \mathscr{U}_\infty(X), \forall 0 < \varepsilon < 1.
\end{aligned}$$

Comme, par ailleurs

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \Omega_4 \subset \Omega_3,$$

il suit que $P\{\Omega_4\} = P\{\Omega_3\} = 1$; d'où,

$$\varphi \in \mathscr{L}_\infty(\{X(s), s \in \Theta(\delta')\}) \tag{29}$$

et

$$\varphi \in \mathscr{L}_\infty(X - \Delta\mu_{\delta',\rho}) \quad \text{pour tout} \quad \Delta > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \rho < 1.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 5.3.

VI. EXEMPLES

Nous suivons les hypothèses (H_1) et (H_2) et nous conservons les notations du paragraphe précédent, nous rappelons que nous notons

$$d(t) = \sqrt{2(1 - r(t))}, \ t \geq 0.$$

COROLLAIRE 6.1. — *Si* $d(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, *pour tout* $t > 0$ *assez petit; alors*

1) $I(\varphi, \delta)$ *ne dépend que* φ *a même nature que*

$$I_1(\varphi) = \int^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{\varphi(t)} \left(\frac{\text{Log } t}{\text{Log Log } t}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} dt.$$

2) $\forall \varepsilon > 0, \sqrt{2 \text{ Log } t + \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right) \text{Log Log } t} \in \mathscr{U}_{\infty}(X)$,

3) $\forall \varepsilon > 0, \sqrt{2 \text{ Log } t + \left(1 + \frac{1}{\alpha} - \varepsilon\right) \text{Log Log } t} \in \mathscr{L}_{\infty}(X)$,

4) $\forall n, \forall \delta > 0, \# ([n, n + 1[\cap \Theta(\delta)) \sim \left(\frac{\text{Log } n}{\text{Log Log } n}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}, n \to \infty$,

5) $\pi_{\delta,\rho}(t) \sim \varepsilon(\delta) \frac{\text{Log Log } t}{\sqrt{2 \text{ Log } t}}, t \to \infty$, où $\varepsilon(\delta) \to 0$ quand $\delta \to \infty$.

On sait que les classes de X sont caractérisées par le test intégral

$$I_2(\varphi) = \int^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}}{\varphi(t)} \varphi(t)^{\frac{1}{\alpha}} dt,$$

qui montre que

$$- \forall \varepsilon > 0, \sqrt{2 \text{ Log } t + \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right) \text{Log Log } t} \in \mathscr{U}_{\infty}(X),$$

$$\sqrt{2 \text{ Log } t + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \text{Log Log } t} \in \mathscr{L}_{\infty}(X).$$

On a donc légèrement perdu en précision.

COROLLAIRE 6.2. — *Si* $d(t) = \left(\text{Log}\frac{1}{t}\right)^{-\beta}$, $\beta > \frac{1}{2}$, *pour tout* $t > 0$ *assez petit; alors*

1) $I(\varphi, \delta)$ *a même nature que*

$$I_2(\varphi, \delta) = \int^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(u)}}{\varphi(u)} e^{(\delta\sqrt{2 \text{ Log } u})^{\frac{2}{2\beta+1}}} du,$$

2) $\sqrt{2 \text{ Log } t + (2 + k)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\text{Log } t}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}}} \in \mathscr{U}_{\infty}(X)$,

pour tout $k > k(\beta)$, *où* $k(\beta) = 8 \frac{4\beta + 1}{2\beta - 1} \left(\frac{4\beta + 1}{2\beta + 1}\right)^{\frac{2\beta+1}{2\beta}}$,

3) $\sqrt{2 \operatorname{Log} t + (2 + k)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{Log} t}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}}} \in \mathscr{L}_\infty(X)$,

pour tout $k < 0$,

4) $\forall n, \forall \delta > 0, \# ([n, n+1[\cap \Theta(\delta)) \sim \exp\left(\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} n}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}}\ n \to \infty$,

5) $\forall k > k(\beta), \forall c > 1$,

$$P\left\{\left|X(\omega, t) - \operatorname{sgn}(X(\omega, t))k\left(\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{Log} t}\right)^{-\frac{2\beta-1}{2\beta+1}}\right| > \sqrt{2 \operatorname{Log} t + 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{Log} t}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}} + c \operatorname{Log} \log t} \text{ i. o.}\right\} = 0,$$

6) $\forall \delta > 0, \forall 0 < \rho < 1 \quad , \quad \pi_{\rho,\delta}(t) = \operatorname{Const}(\delta, \rho)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{Log} t}\right)^{-\frac{2\beta-1}{2\beta+1}}$.

Il est agréable de constater que les fonctions pour les classes $\mathscr{L}$ et $\mathscr{U}$ que nous venons de déterminer sont du même type.

COROLLAIRE 6.3. — *Si* $d(t) = \exp\left(-\left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^c\right)$, $0 < c < 1$, *pour tout* $t > 0$ *assez petit; alors*

1) $I(\varphi, \delta)$ *a la même nature que*

$$I_3(\varphi, \delta) = \int^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(u)}}{\varphi(u)} e^{\left(\operatorname{Log}\frac{\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} u}}{\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\log u\right)^{\frac{1}{2}c}}\right)^{\frac{1}{c}}} du,$$

2) $\forall k < 1, \sqrt{2 \operatorname{Log} t + 2k\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\log t\right)^{\frac{1}{c}}} \in \mathscr{L}_\infty(X)$,

3) $\forall k > 1, \sqrt{2 \operatorname{Log} t + 2k\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\log t\right)^{\frac{1}{c}}} \in \mathscr{U}_\infty(X)$,

4) $\forall n, \forall \delta > 0 \quad , \quad \# ([n, n+1[\cap \Theta(\delta)) \sim \exp\left(\operatorname{Log}\frac{\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} n}}{\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\log n\right)^{\frac{1}{2}c}}\right)^{\frac{1}{c}}$,

5) $\forall_\varepsilon > 0$,

$$P\left\{\left|X(\omega, t) - \varepsilon \operatorname{sgn}(X(\omega, t))\frac{\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\log t\right)^{\frac{1}{c}}}{\sqrt{2 \log t}}\right| > \sqrt{2 \operatorname{Log} t + \left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\log t\right)^{\frac{1}{c}}} \text{ i. o.}\right\} = 0,$$

6) $\forall \delta > 0$, $\forall 0 < \rho < 1$,

$$\pi_{\delta,\rho}(t) \sim C(\delta, \rho) \frac{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^{\frac{1}{c}}}{\sqrt{2 \operatorname{Log} t}} \quad t \to \infty, \quad \text{et} \quad C(\delta, \rho) \to 0 \quad \text{quand} \quad \delta \to \infty.$$

Remarquons ici aussi que les éléments des classes $\mathscr{L}$ et $\mathscr{U}$ que nous déterminons sont de même nature, avec une précision accrue.

COROLLAIRE 6.4. — *Si* $d(t) = \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\operatorname{Log} \log \frac{1}{t}\right)^{-b}$, $b > 1$, *pour tout* $t > 0$ *assez petit; alors*

1) $I(\varphi, \delta)$ *a même nature que*

$$I_4(\varphi, \delta) = \int^{+\infty} \frac{1}{\varphi(u)} \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi^2(u)\right) \exp\left(\frac{\delta\sqrt{2 \operatorname{Log} u}}{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log u\right)^b}\right) du,$$

2) $\forall k < 0$, $\sqrt{2 \operatorname{Log} t + (1 + k) \frac{\sqrt{\operatorname{Log} t}}{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^b}} \in \mathscr{L}_\infty(X)$,

3) $\forall k > \frac{8}{b-1}$ $\sqrt{2 \operatorname{Log} t + (1 + k)(\operatorname{Log} \log t) \frac{\sqrt{\operatorname{Log} t}}{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^b}} \in \mathscr{U}_\infty(X)$,

4) $\forall n$, $\forall \delta > 0$, $\# ([n, n + 1[\cap \Theta(\delta)) \sim \exp\left(\frac{\delta\sqrt{\operatorname{Log} n}}{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log n\right)^b}\right)$, $n \to \infty$,

5) $\forall \delta > 0$, $\forall 0 < \rho < 1$, $\pi_{\delta,\rho}(t) \sim \frac{2}{(b - 1)\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^{b-1}}$, $t \to \infty$,

6) $\forall k > \frac{8}{b - 1}$,

$$P\left\{\left| X(\omega, t) - k \operatorname{sgn}(X(\omega, t))\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^{1-b} \right| > \sqrt{2 \operatorname{Log} t + \frac{\sqrt{\operatorname{Log} t}}{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^b}} \text{ i. o.} \right\} = 0.$$

Si $\varphi(t) = \sqrt{2 \operatorname{Log} t + g(t)}$, la forme de g est complètement déterminée dans les trois premiers cas, à une constante k multiplicative près, k est approchée de façon très précise dans les exemples 1) et 3). Par contre, dans le dernier exemple, dans lequel les trajectoires de X divergent le plus fortement, $g(t)$ n'est pas comparable suivant que φ se trouve dans $\mathscr{L}_\infty(X)$ ou $\mathscr{U}_\infty(X)$. Nous ne démontrons pas ces corollaires qui sont des conséquences directes, mais laborieuses des résultats du paragraphe précédent.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les diverses formes de $g(t)$.

$$\left(\varphi(t) = \sqrt{2 \operatorname{Log} t + g(t)}\right).$$

$d(t) =$	Classes $\mathscr{U}_\infty$, $g(t) =$	Classes $\mathscr{L}_\infty$, $g(t) =$
t^α $0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$k \operatorname{Log} \log t$, $k > 1 + \frac{1}{\alpha}$	$k \operatorname{Log} \log t$, $k < 1 + \frac{1}{\alpha}$
$\left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{-\beta}$ $\beta > \frac{1}{2}$	$(2+k)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{Log} t}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}}$ $k > k(\beta) = 8\left(\frac{4\beta+1}{2\beta-1}\right)\left(\frac{4\beta+1}{2\beta+1}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}}$	$(2+k)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{Log} t}\right)^{\frac{2}{2\beta+1}}$ $k < 0$
$\exp - \left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^c$ $0 < c < 1$	$2k\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^{\frac{1}{c}}$ $k > 1$	$2k\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^{\frac{1}{c}}$ $k < 1$
$\left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{Log} \log \frac{1}{t}\right)^{-b}$ $b > 1$	$(1+k)(\operatorname{Log} \log t)\dfrac{\sqrt{\operatorname{Log} t}}{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^b}$ $k > 8/b - 1$	$(1+k)\dfrac{\sqrt{\operatorname{Log} t}}{\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \log t\right)^b}$ $k < 0$

VII. LA MESURE DE A_φ

7.1. Les paragraphes précédents ont été entièrement consacrés à l'étude du comportement à l'infini des trajectoires des processus gaussiens stationnaires sur $\mathbb{R}_+$, dans le contexte des classes à l'infini.

Cet aspect si précis soit-il laisse dans l'ombre le véritable problème qui consiste à connaître l'allure réelle d'une trajectoire $X(\omega)$, quand le temps est grand. Nous savons que celle-ci oscille indéfiniment; l'amplitude maximum sur $[0, T]$ se comportant comme $\sqrt{2 \operatorname{Log} T}$ quand T devient grand. Ici, nous voudrions préciser la répartition des grandes valeurs de $X(\omega)$ en fonction du temps.

Nous commençons par résumer quelques résultats sur l'ensemble

$$A_\varphi(\omega) = A_{X,\varphi}(\omega) = \{ t \geq 0 : X(\omega, t) > \varphi(t) \}$$

puis nous établissons un renforcement qui fait l'objet du théorème 7.1. Si φ appartient à $\mathscr{U}_\infty(X)$; par définition, nous savons

— $A_\varphi^c(\omega) \supset [t(\omega), \infty)$ et $t(\omega)$ est un temps presque sûrement fini. On en déduit,

$$- P\left\{ \lim_{T \to \infty} \frac{\lambda([0, T] \cap A_\varphi^c(\omega))}{T} = 1 \right\} = 1,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Si maintenant φ appartient à $\mathscr{L}_\infty(X)$, par définition nous avons

$$P\{ \forall n, \ \# \{ A_\varphi(\omega) \cap [n, \infty) \} = \infty \} = 1.$$

Ce qui ne nous renseigne guère; ainsi, par exemple, on ne sait pas à l'aide de cette seule définition ce qui peut se passer en dehors de $A_\varphi(\omega)$. On ne sait pas non plus quelle est la nature de l'ensemble $A_\varphi(\omega)$. En fait, sur ce dernier point, nous sommes un peu mieux renseignés. Nous avons construit au paragraphe précédent des ensembles $\underset{X}{\Theta}(\delta)$ non aléatoires, et montré dans le corollaire 5.4 que sous les seules hypothèses (H_1) et (H_2), pour toute fonction φ croissante telle que $I(\varphi, \delta)$ diverge

$$P\{ \# (A_\varphi(\omega) \cap \underset{X}{\Theta}(\delta)) = \infty \} = 1, \qquad \text{lorsque} \qquad \delta < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Nous avons aussi montré dans un grand nombre de cas, que les classes des processus discrets $\{ X(s), \ s \in \underset{X}{\Theta}(\delta) \}$, sont suffisamment voisines de celles du processus X donné. Nous ne savons pas cependant quelle interprétation donner de cette propriété.

Plaçons-nous à présent dans la situation suivante; nous supposons que X est à trajectoires continues et que, de plus, φ est une fonction continue appartenant à la classe $\mathscr{L}_\infty(X)$. Alors, presque sûrement, $A_\varphi(\omega)$ est un ouvert non vide. Cette remarque nous conduit à poser les questions suivantes :

A) $P\{ \lambda(A_\varphi(\omega)) = \infty \} = 1$?

B) Si oui, comment se comporte la mesure $\lambda(A_\varphi(\omega) \cap [0, T])$ lorsque T tend vers l'infini ?

7.2. Le théorème suivant fournit une réponse positive à la question A), il apporte aussi des informations précises à la deuxième question.

THÉORÈME 7.1. — *Soit* $X(t)$, $t \geq 0$ *un processus gaussien, centré, stationnaire, de covariance* $r(t)$ *continue avec* $r(0) = 1$. *Nous supposons aussi que* X *est* *mesurable et que l'hypothèse* (H_2) *est satisfaite. Soit alors* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{R}_+$ *une fonction continue croissante telle que*

a) $J(\varphi) = \displaystyle\int^{+\infty} \Psi \circ \varphi(u)du = \infty,$

b) $\varphi(t) \overset{\cup}{\cap} \sqrt{\operatorname{Log} t}$ *quand* $t \to \infty$.

Notons λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$. *Dans ces conditions, nous avons aussi*

$$\text{(7.1.1)} \qquad \mathrm{P}\left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\lambda([0, T] \cap A_\varphi(\omega))}{\displaystyle\int_0^T \Psi \circ \varphi(u)du} \geq 1 \right\} = 1,$$

et

$$\text{(7.2.2)} \qquad \mathrm{P}\{ \lambda(A_\varphi(\omega)) = \infty \} = 1.$$

THÉORÈME 7.2. — *Sous les hypothèses précédentes, si* φ *vérifie seulement la condition b*), *alors*

$$\mathrm{P}\left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\lambda(A^c_\varphi(\omega) \cap [0, T])}{T} = 1 \right\} = 1.$$

7.3. Démonstration du théorème 7.1.

Nous allons tout d'abord établir plusieurs lemmes.

LEMME 7.3 (Paley-Zygmund). — *Soit* $X \geq 0$, *une v. a. de carré intégrable, alors, pour tout* $0 < \lambda < 1$,

$$\mathrm{P}\{ X \geq \lambda EX \} \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(EX)^2}{EX^2}.$$

LEMME 7.4. — *Soit* $\{ X(t),\ t \in T \}$ *un processus stochastique sur un espace métrisable* $(T, \mathfrak{Z})$, *à trajectoires* $\mathfrak{Z}$-*continues*, $\varphi : (T, \mathfrak{Z}) \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{Z}$-*continue, et* $\mu \geq 0$ *une mesure sur* $(T, \mathfrak{Z})$ *telle que* $\operatorname{Supp} \mu = T$. *Alors, pour tout* $0 < \delta < 1$,

$$\text{(1)} \quad \mathrm{P}\{ \sup_T (X - \varphi) > 0 \} = \mathrm{P}\{ \mu\{ (X - \varphi) > 0 \} > 0 \},$$

$$\text{(2)} \qquad \geq \mathrm{P}\left\{ \mu\{ (X - \varphi) > 0 \} \geq \delta \int_T \mathrm{P}\{ X(t) > \varphi(t) \} d\mu(t) \right\},$$

$$\text{(3)} \qquad \geq (1 - \delta)^2 \frac{\left[\displaystyle\int_T \mathrm{P}\{ X(t) > \varphi(t) \} d\mu(t) \right]^2}{\displaystyle\int_T\int_T \mathrm{P}\{ X(s) > \varphi(s),\ X(t) > \varphi(t) \} d\mu(s)d\mu(t)}$$

Démonstration. — Pour (1), si $\operatorname{Sup}_{T} (X - \varphi) > 0$, il existe un ouvert U tel que $U \subset \{ (X - \varphi) > 0 \}$. Puisque Supp $\mu = T$, nous avons

$$\mu \{ (X - \varphi) > 0 \} > 0,$$

et réciproquement.

— Pour (2) et (3), on applique le lemme 7.3. à la v. a.

$$Y(\omega) = \mu \{ (X(\omega, .) - \varphi(.)) > 0 \} \geq 0.$$

LEMME 7.5. — *Sous les hypothèses du théorème 7.1, pour tout intervalle* I *non vide, et tout* $0 < \delta < 1$,

$$P \left\{ \lambda(I \cap A_\varphi(\omega)) > \delta \int_I \Psi \circ \varphi(t) dt \right\} \geq (1 - \delta)^2 \frac{\left(\int_I \Psi \circ \varphi(t) dt \right)^2}{\int_{I \times I} P \{ X(s) > \varphi(s), X(t) > \varphi(t) \} \, ds dt} .$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

LEMME 7.6. — *Sous les hypothèses du théorème 7.1, si*

$$Q_\varphi(S, T) = \frac{\left(\int_S^T \Psi \circ \varphi(t) dt \right)^2}{\int_S^T \int_S^T P \{ X(s) > \varphi(s), X(t) > \varphi(t) \} \, ds dt}, \quad T > S,$$

alors il existe $S_0 > 1$, $\tau_0 > 1$, *et* $k_0 > 0$, $k_1 > 1$ *ne dépendant que de* S_0 *tels que pour tout* $S > S_0$ *et* $T > \tau_0 S$,

$$Q_\varphi(S, T) \geq \frac{1}{k_1 + \dfrac{k_0}{\int_S^T \Psi \circ \varphi(s) ds}} .$$

Démonstration. — Les conditions 7.1, *b*) sur φ et (H_2) sur la covariance montrent qu'il existe $0 < a \leq b < + \infty$, $0 < M_0 < \infty$, et $S_0 > 1$ tels que pour tout $t > S_0$,

$$(1) \qquad - a \leq \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2 \operatorname{Log} t}} \leq b,$$

$$- r(t) \leq \frac{M_0}{\operatorname{Log} t} .$$

Nous avons aussi, compte tenu de la symétrie de

$$P(s, t) = P\{ X(s) > \varphi(s), X(t) > \varphi(t) \},$$

$$\int_S^T \int_S^T P(s, t)dsdt = 2\int_S^T ds\left(\int_s^T P(s, t)dt\right). \tag{2}$$

Soient alors $\alpha > 0$ et $A > 0$ tels que

$$- \forall t \geq A \quad , \quad r(t) \leq \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$- \alpha < \frac{a^2}{4}.$$

Nous effectuons le découpage suivant :

$$\Lambda(s) = \int_s^T P(s, t)dt = \Lambda_1(s) + \Lambda_2(s) + \Lambda_3(s), \tag{4}$$

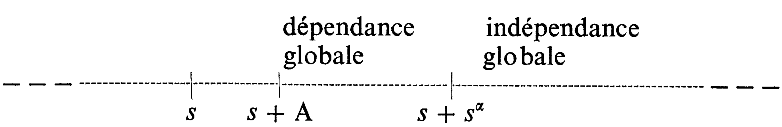
où

$$\Lambda_1(s) = \int_s^{s+A} P(s, t)dt,$$

$$\Lambda_2(s) = \int_{s+A}^{s+A+s^\alpha} P(s, t)dt,$$

$$\Lambda_3(s) = \int_{s+A+s^\alpha}^{T} P(s, t)dt.$$

Cette décomposition peut être expliquée par le schéma suivant,



Nous majorons $\Lambda(s)$; tout d'abord,

$$- \Lambda_1(s) \leq A\Psi \circ \varphi(s), \tag{5}$$

et, à partir du lemme 5.11, *b*),

$$- \Lambda_2(s) \leq 0(1)\Psi \circ \varphi(s)\int_{s+A}^{s+A+s^\alpha} \exp\left(- \frac{1 - r(t - s)}{4} \cdot \varphi^2(t)\right)dt,$$

$$\leq 0(1)\Psi \circ \varphi(s)\int_{s+A}^{s+A+s^\alpha} \exp\left(- \frac{a^2}{4} \operatorname{Log} t\right)dt,$$

$$\leq 0(1)\Psi \circ \varphi(s)s^{\alpha - \frac{a^2}{4}}.$$

Ainsi, pour tout $s > \mathrm{S}$,

$$(6) \qquad \Lambda_2(s) \leq 0\left(s^{\alpha - \frac{a^2}{4}}\right)\Psi \circ \varphi(s) \qquad \text{et, par hypothèse} \qquad \alpha < \frac{a^2}{4}.$$

Enfin, à l'aide du lemme 5.11, *a*)

$$(7) \qquad \Lambda_3(s) \leq k_1 \int_{s+\mathrm{A}+s^\alpha}^{\mathrm{T}} \Psi \circ \varphi(s) . \Psi \circ \varphi(t) dt,$$

où $k_1 > 1$ ne dépend que de S_0.

On déduit de (5), (6) et (7),

$$(8) \qquad \Lambda(s) \leq \left(\mathrm{A} + 0\left(s^{\alpha - \frac{a^2}{4}}\right)\right)\Psi \circ \varphi(s) + k_1 \Psi \circ \varphi(s) \int_s^{\mathrm{T}} \Psi \circ \varphi(t) dt.$$

Il s'ensuit,

$$(9) \quad 2\int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \Lambda(s) ds \leq 2\left(\mathrm{A} + 0\left(s^{\alpha - \frac{a^2}{4}}\right)\right) \int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \Psi \circ \varphi(s) ds + k_1 \left(\int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \Psi \circ \varphi(s) ds\right)^2.$$

Finalement, pour tout $\mathrm{S} > \mathrm{S}_0$ et $\mathrm{T} > \tau_0 \mathrm{S}$, on a montré,

$$\mathrm{Q}_\varphi(\mathrm{S}, \mathrm{T}) \geq \left(k_1 + k_0 \left(\int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \Psi \circ \varphi(s) ds\right)^{-1}\right)^{-1},$$

où $k_0 > 0$ ne dépend que de S_0.

LEMME 7.7. — *Sous les hypothèses du théorème 7.1, les événements suivants*

$$\mathrm{B}_{\alpha,\mathrm{S}} = \left\{ \omega : \varlimsup_{\substack{\mathrm{T} \to \infty \\ \mathrm{T} > \mathrm{S}}} \frac{\lambda(\mathrm{A}_\varphi(\omega) \cap [\mathrm{S}, \mathrm{T}])}{\int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \Psi \circ \varphi(u) du} > \alpha \right\},$$

$$\mathrm{C}_{\beta,\mathrm{S}} = \left\{ \omega : \varliminf_{\substack{\mathrm{T} \to \infty \\ \mathrm{T} > \mathrm{S}}} \frac{\lambda(\mathrm{A}_\varphi(\omega) \cap [\mathrm{S}, \mathrm{T}])}{\int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} \Psi \circ \varphi(u) du} < \beta \right\},$$

$$\mathrm{D}_{\gamma,\mathrm{S}} = \left\{ \omega : \varlimsup_{\mathrm{T} > \infty} \frac{\lambda(\mathrm{A}_\varphi^c(\omega) \cap [\mathrm{S}, \mathrm{T}])}{\mathrm{T}} > \gamma \right\},$$

ont une probabilité égale à 0 ou 1.

Démonstration. — C'est une conséquence directe du théorème 9, p. 56 de [*14*] puisque ces événements sont invariants sous l'action de la transformation $\mathrm{X}(\omega, t) \to \mathrm{X}(\omega, t + 1)$, et que X est ergodique sous l'hypothèse (H_2).

Démonstration du théorème 7.1

Pour tout $S > S_0$, $T > \tau_0 S$, $0 < \delta < 1$,

$$P\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\lambda(A_\varphi(\omega)\cap[0,T])}{\int_0^T \Psi\circ\varphi(u)du} > \delta\right\} \geq P\left\{\overline{\lim_{\substack{T\to\infty\\T>S}}} \frac{\lambda(A_\varphi(\omega)\cap[S,T])}{\int_S^T \Psi\circ\varphi(u)du} > \delta\right\},$$

$$\geq \overline{\lim_{\substack{T\to\infty\\T>S}}} P\left\{\frac{\lambda(A_\varphi(\omega)\cap[S,T])}{\int_S^T \Psi\circ\varphi(u)du} > \delta\right\},$$

$$\geq (1-\delta)^2 \overline{\lim_{T\to\infty}} Q_\varphi(S,T),$$

$$\geq \frac{(1-\delta)^2}{k_1} > 0.$$

Par conséquent en vertu du lemme 7.7, pour tout $0 < \delta < 1$,

$$P\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\lambda(A_\varphi(\omega)\cap[0,T])}{\int_0^T \Psi\circ\varphi(u)du} > \delta\right\} = 1.$$

Dès lors il suffit de faire tendre séquentiellement δ vers 1 pour obtenir 7.1.1.

On déduit de ce qui précède,

p. s. $\exists\delta(\omega)\in]0,1[$, $\exists T_n(\omega)\to\infty$, $n\to\infty$, tels que pour tout n,

$$\lambda([0,T_n(\omega)]\cap A_\varphi(\omega)) > \delta(\omega)\int_0^{T_n(\omega)} \Psi\circ\varphi(u)du,$$

d'où,

$$\text{p. s. } \lambda(A_\varphi(\omega)) = \infty.$$

7.4. Démonstration du théorème 7.2.

1re étape : supposons que $I(\varphi)$ soit divergente.

Nous utilisons l'inégalité de Bienaymé Tchebycheff qui nous permet de majorer pour tout $\beta^2 > k_1(> 1)$, $S > S_0$,

$$P\left\{\lambda(A_\varphi(\omega)\cap[S,T]) > \beta\int_S^T \Psi\circ\varphi(u)du\right\}$$

$$= P\left\{\lambda^2(A_\varphi(\omega)\cap[S,T]) > \beta^2\left(\int_S^T \Psi\circ\varphi(u)du\right)^2\right\},$$

$$\leq \frac{1}{\beta^2} Q_\varphi^{-1}(S,T).$$

D'où en vertu du lemme 7.6, puisque $\underline{\lim}_{T\to\infty} Q_\varphi^{-1}(S, T) \leq k_1$,

$$P\left\{ \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{\lambda(A_\varphi(\omega) \cap [S, T])}{\int_S^T \Psi \circ \varphi(u)du} > \beta \right\} \leq \underline{\lim}_{T\to\infty}\left(\frac{1}{\beta^2} Q_\varphi^{-1}(S, T)\right) \leq \frac{k_1}{\beta^2} < 1.$$

Le lemme 7.8 montre donc

$$P\left\{ \underline{\lim}_{T\to\infty} \frac{\lambda(A_\varphi(\omega) \cap [S, T])}{\int_S^T \Psi \circ \varphi(u)du} > \beta \right\} = 0.$$

Ainsi pour presque tout ω, il existe une suite $T_n(\omega)$ tendant vers l'infini avec n, telle que pour tout n

$$\lambda(A_\varphi(\omega) \cap [S, T_n(\omega)]) \leq \beta \int_S^{T_n(\omega)} \Psi \circ \varphi(u)du.$$

On en déduit aussi, pour chaque $T = T_n(\omega)$,

$$\begin{aligned} \lambda(A_\varphi^c(\omega) \cap [S, T]) &= (T - S) - \lambda(A_\varphi(\omega) \cap [S, T]), \\ &\geq (T - S)\left[1 - \frac{\beta \int_S^T \Psi \circ \varphi(u)du}{T - S}\right], \\ &\geq (T - S)[1 - \beta\Psi \circ \varphi(S)]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\lambda(A_\varphi^c(\omega) \cap [0, T])}{T} \geq \left(1 - \frac{S}{T}\right)(1 - \beta\Psi \circ \varphi(S)),$$

ou encore, presque sûrement,

$$\overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{\lambda([0, T] \cap A_\varphi^c(\omega))}{T} \geq 1 - \beta\Psi \circ \varphi(S),$$

pour tout $S > S_0$. Mais puisque $\varphi(t) \underset{\cap}{\cup} \sqrt{\operatorname{Log} t}$ quand $t \to \infty$, nous en déduisons en faisant tendre séquentiellement S vers l'infini, à l'aide d'un argument simple.

$$P\left\{ \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{\lambda([0, T] \cap A_\varphi^c(\omega))}{T} = 1 \right\} = 1.$$

2e étape : supposons que $I(\varphi)$ soit convergente.

Alors pour tout $S > 0$, $\beta > 1$, nous avons aussi

$$P\{ \lambda(A_\varphi(\omega) \cap [S, T]) \geq \beta \} \leq \frac{1}{\beta} \int_S^\infty \Psi \circ \varphi(u)du < 1,$$

pourvu que S soit suffisamment grand. Par conséquent

$$P\{ \underline{\lim}_{T\to\infty} \lambda(A_\varphi(\omega) \cap [S, T]) \geq \beta \} < 1.$$

Il existe donc un ensemble H de probabilité strictement positive et, pour tout ω appartenant à H, une suite $T_n(\omega)$ tendant vers l'infini avec n, telle que, pour chaque n,

$$\lambda(A_\varphi(\omega) \cap [S, T_n(\omega)]) \leq \beta,$$

et, pour chaque

$$T = T_n(\omega) > \beta + S$$
$$\lambda(A_\varphi^c(\omega) \cap [S, T] \geq (T - S) - \beta\,;$$

ou encore,

$$\frac{\lambda(A_\varphi^c(\omega) \cap [0, T])}{T} \geq 1 - \frac{S}{T} - \frac{\beta}{T}.$$

On en déduit facilement

$$P\left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\lambda(A_\varphi^c(\omega) \cap [0, T])}{T} = 1 \right\} = 1.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 7.2.

COROLLAIRE 7.9. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *du théorème 7.1, nous avons aussi*

$$(7.9.1)\quad P\left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\lambda(1 < t \leq T : X(\omega, t) > \sqrt{2 \operatorname{Log} t})}{\sqrt{2 \operatorname{Log} t}} \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right\} = 1,$$

$$(7.9.2)\quad P\left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\lambda(1 < t \leq T : X(\omega, t) \leq \sqrt{2 \operatorname{Log} t})}{T} = 1 \right\} = 1.$$

Démonstration. — C'est une conséquence facile des théorèmes 7.1 et 7.2.

VIII. STABILITÉ DES TRAJECTOIRES

8.1. Soient $X(t)$, $t \geq 0$ un processus gaussien centré défini sur $\mathbb{R}_+$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ et pour tout t,

$$\sigma(t) = \sigma(X(t)) > 0.$$

Nous nous proposons d'évaluer au moyen d'un test intégral les expressions suivantes

$$- \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(\omega, t)}{\sigma(t)\varphi(t)},$$

$$- \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(\omega, t)}{\sigma(t)\varphi(t)}.$$

Nous obtenons ce résultat comme corollaire d'un théorème non publié de M. X. Fernique sur l'évaluation de l'oscillation des trajectoires de processus gaussiens. Nous lui sommes particulièrement reconnaissants d'avoir bien voulu accepter que nous le présentions dans cet article.

Nous commençons par résumer quelques propriétés simples des fonctions d'oscillation en suivant [6], p. 41.

8.2. Rappels.

Soient (T, δ) un espace métrique séparé ou non, associé ou non à une fonction aléatoire gaussienne et f une fonction sur T à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$. On appelle δ-oscillation de f, et on note W_f la fonction sur T à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ par,

$$\forall t \in T \quad , \quad W_f(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Sup}_{s,s' \in B(t,\varepsilon)} |f(s) - f(s')|.$$

A toute fonction f sur T, tout élément t de T, tout réel $u > 0$, nous associons la δ-oscillation de f sur la boule $B(t, u)$, définie par

$$V(f, t, u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Sup}_{\substack{s,s' \in B(t,u) \\ \delta(s,s') < \varepsilon}} |f(s) - f(s')|.$$

On vérifie immédiatement que les oscillations possèdent les propriétés suivantes :

a) $V(f, t, u)$ est une fonction convexe de f, croissante de u.

b) Si f est uniformément continue sur (T, δ), alors $V(f, t, u)$ est nulle; de plus pour toute autre fonction g, on a

$$V(f + g, t, u) = V(g, t, u).$$

c) Si $\delta(t, t')$ est inférieur à $\eta > 0$, alors $V(f, t, u)$ est inférieur à $V(f, t', u + \eta)$; en particulier,

$$- \lim_{\varepsilon \downarrow 0} V(f, t, u - \varepsilon) \leq \underline{\lim}_{t' \to t} V(f, t', u),$$

$$- \overline{\lim}_{t' \to t} V(f, t', u) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} V(f, t, u + \varepsilon).$$

d)
$$W_f(t) = \lim_{u \downarrow 0} V(f, t, u).$$

THÉORÈME (A). — *Soient* (T, δ) *un espace métrique séparable,*

$$X = \{ X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T \}$$

une fonction aléatoire gaussienne, centrée, d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

et d l'écart induit par X *sur* T. *On suppose que l'application canonique*

$$(\mathrm{T}, \delta) \to (\mathrm{T}, d)$$

est uniformément continue.

Dans ces conditions la δ-oscillation de X *est, presque sûrement non aléatoire, c'est-à-dire qu'il existe une partie négligeable* N *de* Ω *et une application* $\alpha : \mathrm{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *telles que*

$$\forall \omega \notin \mathrm{N} \quad , \quad \forall t \in \mathrm{T} \quad , \quad \mathrm{W}_{\mathrm{X}(\omega)}(t) = \alpha(t).$$

COROLLAIRE (B). — *Sous les mêmes hypothèses, pour tout élément t de* T, *il existe une partie* N_t *négligeable de* Ω *telle que*

$$\forall \omega \notin \mathrm{N}_t, \ \underline{\lim}_{s \to t} \mathrm{X}(\omega, s) = \mathrm{X}(\omega, t) - \frac{1}{2}\alpha(t),$$

$$\overline{\lim}_{s \to t} \mathrm{X}(\omega, s) = \mathrm{X}(\omega, t) + \frac{1}{2}\alpha(t).$$

On remarquera que la fonction d'oscillation peut être évaluée sous la forme

$$\forall t \in \mathrm{T} \quad , \quad \alpha(t) = 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{E}\{ \sup_{\delta(s,t) < \varepsilon} \mathrm{X}(s) \},$$

qui dépend de δ, elle est maximale pour δ égale à d.

8.3. Une nouvelle évaluation de la fonction d'oscillation due à X. Fernique.

Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite gaussienne indépendante, soit de plus $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ la suite des écarts-types associée à Λ. La limite $\overline{\lim}_{n \to \infty} \lambda_n$ peut être interprétée comme l'oscillation de Λ en un point de compactification de $\mathbb{N}$. Nous savons l'évaluer, plus précisément nous rappelons

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} \lambda_n = \inf \left\{ \mathrm{M} > 0 : \sum_n e^{-\frac{\mathrm{M}}{2\sigma_n^2}} < \infty \right\}$$

$$= \inf \left\{ \mathrm{M} > 0 : \sum_n \mathrm{P}\{ \lambda_n > \mathrm{M} \} < \infty \right\}.$$

Le théorème suivant montre que cette évaluation est générale pour les oscillations des processus gaussiens.

THÉORÈME 8.1. — *Soit* $\mathrm{X} = \{ \mathrm{X}(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathrm{T} \}$ *une fonction aléatoire gaussienne séparable sur* T, *soit de plus d l'écart défini par* X *sur* T. *La d-oscilla-*

tion de X *en tout point* t_0 *de* T *peut être évaluée sous la forme suivante :*
$\forall 0 < \rho < 1$,

$$\alpha_X(t_0) = \inf\left\{ M > 0 : \sum_n P\left\{ \sup_{\rho^{n+1} \leq d(s,t_0) < \rho^n} (X(s) - X(t_0)) > \frac{M}{2} \right\} < \infty \right\}.$$

N. B. — On peut obtenir une évaluation similaire de l'oscillation globale sur T, $\alpha_X(T) = \sup\limits_{t_0 \in T} \alpha_X(t_0)$.

Démonstration. — Soient $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$, $\varepsilon_n > 0$ une suite décroissante vers zéro et $M > 0$, tels que

$$\sum_n P\left\{ \sup_{\varepsilon_{n+1} \leq d(s,t_0) < \varepsilon_n} (X(s) - X(t_0)) > \frac{M}{2} \right\} < \infty.$$

Nous déduisons du lemme de Borel Cantelli :

$$P\left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n+1}^{\infty} \left\{ \sup_{\varepsilon_{n+1} \leq d(s,t_0) < \varepsilon_n} (X(s) - X(t_0)) > \frac{M}{2} \right\} \right\} = 1.$$

Il existe donc un ensemble N négligeable de Ω tel que

$$\forall \omega \notin N \quad , \quad \exists n(\omega) < \infty : \forall m > n(\omega) \quad , \quad \sup_{\varepsilon_{n+1} \leq d(s,t_0) < \varepsilon_n} (X_\omega(s) - X_\omega(t_0)) \leq \frac{M}{2}.$$

Ainsi

$$\overline{\lim_{d(s,t_0) \to 0}} \; X(\omega, s) \leq X(\omega, t_0) + \frac{M}{2},$$

d'où, en vertu du corollaire (B),

$$\alpha_X(t_0) \leq M.$$

Réciproquement, nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que $\alpha_X(t_0)$ est fini et $X(t_0) = 0$ presque sûrement.

Notons alors $M = (1 + \eta)\alpha_X(t_0)$ où $\eta > 0$ est arbitrairement fixé et soit $\rho \in \left] \frac{1}{1+\eta}, 1 \right[$ et j un entier positif déterminé par la condition

$$\frac{1 + \rho^j}{\rho - \rho^j} < 1 + \eta. \tag{1}$$

Soit de plus p un entier compris entre 0 et j, et posons pour tout entier n

$$S_n^p = \{ s \in T : \rho^{p+nj+1} \leq d(s, t_0) < \rho^{p+nj} \}. \tag{2}$$

Nous définissons un processus auxiliaire Y sur $T_p = \bigcup\limits_n^{\infty} S_n^p$ en posant

$$Y(s) = X_n(s) \quad \text{si} \quad s \in S_n^p \quad , \quad n \geq 1, \tag{3}$$

où $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de copies indépendantes de X.

Soient s, s' deux éléments de T_p, $s \in S_n^p$, $s' \in S_{n'}^p$,

— si $n = n'$, alors $d_Y(s, s') = d(s, s')$ par construction,

— si $n \neq n'$, soit $n < n'$ par exemple, alors

$$\begin{aligned} d_Y^2(s, s') = EY^2(s) + EY^2(s') = EX(s)^2 + EX(s')^2 &= d^2(s, t_0) + d^2(t, t_0), \\ &\leq d(s, s') \frac{d(s, t_0) + d(s', t_0)}{|d(s, t_0) - d(s', t_0)|}, \\ &\leq d(s, s') \frac{\rho^{p+nj} + \rho^{p+n'j}}{\rho^{p+nj+1} - \rho^{p+n'j}}, \\ &\leq d(s, s') \frac{1 + \rho^{(n'-n)j}}{\rho - \rho^{(n'-n)j}}. \end{aligned}$$

Puisque $x \to \dfrac{1+x}{\rho - x}$ est croissante, nous obtenons

$$d_Y(s, s') \leq d(s, s') \frac{1 + \rho^j}{\rho - \rho^j} \leq (1 + \eta) d(s, s').$$

Finalement, pour tout $s \in T_p$, $s' \in T_p$,

$$d_Y(s, s') \leq (1 + \eta) d(s, s'). \tag{4}$$

Posons à présent

$$f(t) = (t - \alpha_X(t_0))^+,$$

on déduit de ce qui précède en appliquant le théorème 2.1.2, p. 17, de [*6*], pour tout entier $n_0 > 0$,

$$E\left[f\left(\operatorname*{Sup}_{s,s' \in T_p} \left(\frac{Y(s) - Y(s')}{1 + \eta}\right)\right)\right] \leq E[f(\operatorname*{Sup}_{s,s' \in T_p} (X(s) - X(s')))]. \tag{5}$$

D'où, en faisant tendre n_0 vers l'infini,

$$\alpha_Y(t_0) \leq \alpha_X(t_0)(1 + \eta) = M, \tag{6}$$

ce qui, compte tenu de la construction de Y, se traduit par le fait que

$$\sum_n P\left\{ \operatorname*{Sup}_{\rho^{p+nj+1} \leq d(s,t_0) < \rho^{p+nj}} (X(s) - X(t_0)) > \frac{M}{2} \right\} < \infty, \tag{7}$$

pour tout entier p compris entre 0 et j. Finalement, on a montré,

$$\sum_n P\left\{ \operatorname*{Sup}_{\rho^{n+1} \leq d(s,t_0) < \rho^n} (X(s) - X(t_0)) > \frac{M}{2} \right\} < \infty, \tag{8}$$

lorsque $\dfrac{1}{1+\eta} < \rho < 1$. En fait, (8) reste vrai même si $0 < \rho < \dfrac{1}{1+\eta}$, car alors il suffit de reprendre la démonstration avec $\rho_1 = \rho^{\frac{1}{k}}$ où l'entier $k > 0$ est choisi de façon à avoir

$$\rho^{\frac{1}{k}} > \frac{1}{1+\eta}.$$

Ainsi, pour tout $0 < \rho < 1$, tout $\eta > 0$, la série

$$\sum_n P\left\{ \operatorname*{Sup}_{\rho^{n+1} \leq d(s,t_0) < \rho^n} (X(s) - X(t_0)) > \frac{1}{2}(1+\eta)\alpha_X(t_0) \right\},$$

est convergente, ce qui termine la démonstration du théorème 8.1.

THÉORÈME 8.2. — *Soit* $X(t)$, $t \geq 0$, *un processus gaussien sur* $\mathbb{R}_+$, *centré, soit aussi* $\sigma(t) = (EX^2(t))^{\frac{1}{2}}$, *on suppose que pour tout* $t \geq 0$, $0 < \sigma(t) < \infty$. *Dans ces conditions, pour toute fonction* $\varphi(t)$ *sur* $\mathbb{R}_+$, *croissante telle que* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, *on a aussi pour tout* $0 < \rho < 1$,

$$(1) \quad \text{p. s. } \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(\omega, t)}{\sigma(t)\varphi(t)} = - \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(\omega, t)}{\sigma(t)\varphi(t)}$$
$$= \inf\left\{ M > 0 : \sum_n P\left\{ \operatorname*{Sup}_{\rho^{n+1} \leq \frac{1}{\varphi(t)} < \rho^n} \frac{X(t)}{\sigma(t)\varphi(t)} > M \right\} < \infty \right\}.$$

Si, de plus, X *est stationnaire de covariance* $r(t)$ *avec* $r(0) = 1$, *on a en outre pour tout* $0 < \rho < 1$,

$$(2) \quad \text{p. s. } \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(\omega, t)}{\varphi(t)} = - \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X(\omega, t)}{\varphi(t)}$$
$$= \inf\left\{ M > 0 : \sum_n P\left\{ \operatorname*{Sup}_{\rho^{n+1} \leq \frac{1}{\varphi(t)} < \rho^n} \frac{X(t)}{\varphi(t)} > M \right\} < \infty \right\}.$$

Démonstration. — Notons

$$Z_\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{X(t)}{\sigma(t)\varphi(t)} & t \geq 0, \\ 0 \text{ p. s.} & t = \infty, \end{cases}$$

alors

$$d_{Z_\varphi}(t, \{+\infty\}) = \frac{1}{\varphi(t)} \to 0 \quad , \quad t \to +\infty.$$

Le processus gaussien Z_φ est continu m. q. en $+\infty$; son oscillation au point $\{+\infty\}$, $\alpha_{Z_\varphi}(\{+\infty\})$ peut être évaluée à partir du théorème 8.1 sous la forme

$$\alpha_{Z_\varphi}(\{+\infty\}) = \inf\left\{ M > 0 : \sum_n P\left\{ \operatorname*{Sup}_{\rho^{n+1} \leq \frac{1}{\varphi(t)} < \rho^n} \left(\frac{X(t)}{\sigma(t)\varphi(t)}\right) > \frac{M}{2} \right\} < \infty \right\}.$$

En outre, le corollaire (B) montre

$$\text{p. s. } \overline{\lim_{t\to\infty}}\, Z_\varphi(\omega, t) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{X(\omega, t)}{\sigma(t)\varphi(t)} = Z_\varphi(\omega, \{+\infty\}) + \frac{1}{2}\alpha_{Z_\varphi}(\{+\infty\}),$$
$$= \frac{1}{2}\alpha_{Z_\varphi}(\{+\infty\}),$$
$$= -\underline{\lim_{t\to\infty}}\, Z_\varphi(\omega, t),$$

d'où (1). Enfin si X est stationnaire, on constate que (2) s'obtient de la même façon que (1).

Remarques. — Ce test vaut surtout par sa généralité; son emploi n'est pas simple. Ainsi, lorsque X est stationnaire, il nécessite l'évaluation d'expressions comme

$$P\{\sup_{t\in[0,\, \exp\{\frac{1}{2}c^{2n}\}]} X(t) > Mc^n\},\ M > 0,\ c > 1,$$

n entier.

CONCLUSION

L'étude que nous venons de faire n'a rien d'exhaustif, bien au contraire. Nous osons espérer qu'elle contribuera quelque peu à relancer l'analyse des trajectoires de processus gaussiens en général. Nous pensons que les développements faits dans les paragraphes 2, 5, 7 et 8 doivent permettre d'engager les recherches sur de nouvelles voies. De toute façon, le concept de classes d'un processus gaussien apparaît maintenant comme un outil mal adapté à la situation qui nous concerne. Le théorème 7.2 le souligne bien. La simplicité des énoncés, ainsi que de leur démonstration rend plausible d'éventuels renforcements. A cet effet, définissons l'ensemble suivant

$$\mathscr{M}(X) = \left\{ \mu \in \mathscr{M}^+(R) \quad \text{tel que} \quad I\mu(\varphi) = \int_0^{+\infty} \Psi\circ\varphi(u)d\mu(u) = \infty \right.$$
$$\left. \Rightarrow P\left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}}\, \frac{\mu(A_\varphi(\omega)\cap[0, T])}{\int_0^T \Psi\circ\varphi(u)d\mu(u)} \geq 1 \right\} = 1 \right\}.$$

Nous avons montré sous les hypothèses (H_1) et (H_2) que $\mathscr{M}(X)$ n'était pas vide, $(\lambda \in \mathscr{M}(X))$. On devrait pouvoir obtenir des conditions suffisantes d'appartenance à $\mathscr{M}(X)$, ce qui renforcerait nettement le théorème 7.1. Ces informations nouvelles incitent aussi à étudier le comportement quand T est grand de la longueur de la plus grande composante connexe de

$A_\varphi(\omega) \cap]0, T[$, cela permettrait de connaître la taille des arches de la trajectoire $X(\omega)$ à l'infini. Nous terminerons en disant que ces questions concernent aussi les processus gaussiens à accroissements stationnaires et l'étude locale ou globale des trajectoires des processus gaussiens, en général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. M. BERMAN, Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. *Ann. Math. Statist.*, t. **35**, 1964, p. 502-516.

[2] S. M. BERMAN, Local time and sample function properties od stationary Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **137**, 1969, p. 277-299.

[3] P. BILLINGSLEY, *Ergodic Theory*. Ed. by F. B. Wright, Acad. Press, 1963, New York.

[4] J. P. CONZE, Systèmes topologiques et métriques en théorie ergodique. École d'Été de Probabilité de Saint-Flour (1974). *Lect. Notes Math.*, t. **480**, 1975, p. 100-187.

[5] K. L. CHUNG, P. ERDÖS et T. SIRAO, On the Lipschitz's conditions for Brownian Motion. *J. Math. Soc. Japan*, vol. **11**, n° 4, 1959, p. 263-274.

[6] X. FERNIQUE, Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. École d'Été de Probabilité de Saint-Flour (1974). *Lect. Notes Math.*, t. **480**, 1975, p. 1-96.

[7] X. FERNIQUE, Évaluation de processus gaussiens composés. *Lect. Notes Math.*, t. **526**, 1976, p. 67-83.

[8] X. FERNIQUE, *A paraître*.

[9] N. C. JAIN, K. JOGDEO et W. F. STOUT, Upper and lower functions for Martingales and mixing Processes. *Ann. of Prob.*, vol. **3**, n° 1, 1975, p. 119-145.

[10] N. KÔNO, Sur la minoration asymptotique et le caractère transitoire des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Gebiete*, t. **33**, 1975, p. 95-112.

[11] N. KÔNO, Asymptotic behavior of sample functions of Gaussian random fields. *J. Math. Kyoto Univ.*, t. **15** (3), 1975, p. 671-707.

[12] M. B. MARCUS, Upper bounds for the asymptotic maxima of continuous Gaussian processes. *Ann. Math. Stat.*, t. **43**, 1972, p. 522-533.

[13] M. B. MARCUS, Asymptotic Maxima of Continuous Gaussian Processes (II). *Ann. of Prob.*, t. **2**, 1974, p. 702-713.

[14] G. MARUYAMA, The harmonic analysis of stationary stochastic processes. *Memoirs of the faculty of Sci. Kyusyu Univ.*, Ser. A, vol. IV, 1949, p. 45-106.

[15] J. PICKANDS, III, Maxima of stationary Gaussian processes. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Gebiete*, t. **7**, 1967, p. 190-223.

[16] J. PICKANDS, III, An iterated logarithm for the maximum in a stationary Gaussian sequence. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Gebiete*, vol. **12**, 1969, p. 344-353.

[17] C. QUALLS et H. WATANABE, An asymptotic 0-1 behavior of Gaussian processes. *Ann. Math. Stat.*, vol. **42**, n° 6, 1971, p. 2027-2035.

[18] C. QUALLS, H. WATANABE et G. SIMMONS, A note on a 0-1 law for stationary Gaussian processes. *Inst. of Statis.*, Mimeo Series n° 793, 1972.

[19] C. QUALLS et P. K. PATHAK, A law of iterated logarithm for stationary Gaussian Processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **18**, 1973, p. 185-193.

[20] C. QUALLS, The law of the iterated logarithm on arbitrary sequences for stationary Gaussian processes and Brownian motion. *Ann. of Prob.*, vol. **5**, n° 5, 1977, p. 724-739.

[21] H. VISHNU HEBBAR, A law of the iterated logarithm for Extrem values from Gaussian Sequences. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Gebiete*, vol. **48**, 1979, p. 1-16.

[22] M. WEBER, Classes supérieures de processus gaussiens. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Gebiete*, vol. **42**, 1978, p. 113-128.

[23] M. WEBER, Tests intégraux pour certaines classes de processus gaussiens stationnaires à trajectoires continues. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **287**, série A, 1978, p. 969-971.

(Manuscrit reçu le 14 mars 1980).