ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL VALADIER

# Sur l'espérance conditionnelle multivoque non convexe

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 16, nº 2 (1980), p. 109-116
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_2_109_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section B :
Vol. XVI, n° 2, 1980, p. 109-116 *Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Sur l'espérance conditionnelle multivoque non convexe

par

**Michel VALADIER (*)**

## § 1. INTRODUCTION

Étant donné $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathfrak{B}$ une sous-tribu de $\mathfrak{A}$, E un localement convexe, $\Gamma$ une multi-application $\mathfrak{A}$-mesurable de $\Omega$ dans E, on peut définir et étudier l'espérance conditionnelle $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$. Cela a été fait successivement pour $\Gamma$ à valeurs convexes compactes, puis convexes fermées, puis fermées par Van Cutsem [*23*], Bismut [*1*], Valadier [*18*] (repris dans Castaing-Valadier [*3*]), Neveu [*10*], Van Cutsem [*24*], Daurès [*4*], Dynkin-Evstigneev [*6*], Hiai-Umegaki [*7*], Sainte-Beuve [*14*], Valadier [*19*] [*20*], Castaing [*2*].

Une question qui vient naturellement à l'esprit est : lorsqu'existe une famille de lois conditionnelles $(P(.\mid\omega))_{\omega\in\Omega}$, a-t-on

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) = \int \Gamma(\omega')P(d\omega' \mid \omega) \ ?$$

Lorsque $\Gamma$ est à valeurs convexes, il est facile de le vérifier en utilisant la fonction d'appui (Daurès [*4*], Valadier [*19*] [*20*]). On se propose d'établir cette propriété en l'absence de convexité.

On déduira de ce résultat que, si les $P(.\mid\omega)$ sont sans atomes (ce qui très généralement équivaut à l'absence d'atomes conditionnels), $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$ est à valeurs convexes. Cela étend un des résultats de Dynkin-Evstigneev où $E = \mathbb{R}^n$ et $\Gamma$ est intégralement majorée.

(*) Université des Sciences et Techniques du Languedoc, place Eugène-Bataillon, 34060 Montpellier Cedex (France).

## § 2. HYPOTHÈSES ET RAPPELS

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathfrak{B}$ une sous-tribu de $\mathfrak{A}$, E un Banach séparable, $\Gamma$ une multi-application $\mathfrak{A}$-mesurable de $\Omega$ dans les fermés de E (cf. Castaing-Valadier [3], ch. III, déf. 10, p. 68). On note $\mathscr{L}^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ l'ensemble

$$\{ u \in \mathscr{L}^1_E(\Omega, \mathfrak{A}, P) \mid u(\omega) \in \Gamma(\omega) \text{ p. s.} \}$$

et $L^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ désigne le quotient formé par les classes d'équivalence pour l'égalité presque sûre. On suppose $\mathscr{L}^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P) \neq \emptyset$.

On peut définir $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$ comme l'unique (classe de) multi-application $\mathscr{B}$-mesurable $\Theta$ à valeurs dans les fermés de E telle que

$$L^1_\Theta(\Omega, \mathfrak{B}, P) = \text{adh } E^{\mathfrak{B}}(L^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P))$$

où adh désigne l'adhérence relative à la norme de $L^1_E(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ (cf. Hiai et Umegaki [7], th. 5.1, p. 169, où $\Gamma$ est supposée intégralement majorée). On peut montrer ([19]) que $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$ est aussi la borne supérieure essentielle (cf. [17], prop. 1.14, p. 278) des singletons $\mathfrak{B}$-aléatoires $\omega \to \{ E^{\mathfrak{B}}(u)(\omega)\}$, $u \in L^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ (cette idée remonte à 1971, cf. [18]).

## § 3. LIEN ENTRE ESPÉRANCE CONDITIONNELLE ET LOIS CONDITIONNELLES

On suppose qu'il existe une famille de lois conditionnelles, c'est-à-dire une probabilité de transition $(\omega, A) \mapsto P(A \mid \omega)$ de $(\Omega, \mathfrak{B})$ vers $(\Omega, \mathfrak{A})$ telle que

$$\forall A \in \mathfrak{A}, \forall B \in \mathfrak{B}, P(A \cap B) = \int_B P(A \mid \omega) P(d\omega). \tag{1}$$

Cela revient à dire que $(P(. \mid \omega))_{\omega \in \Omega}$ est une désintégration de l'image de P par

$$\begin{cases} \omega \mapsto (\omega, \omega) \\ (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega \times \Omega, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}). \end{cases}$$

La formule (1) s'étend à $\varphi : \Omega \times \Omega \to [0, \infty]$ où $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}$ mesurable, intégrable si elle est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ :

$$\int_\Omega \varphi(\omega, \omega) P(d\omega) = \int_\Omega \left[ \int_\Omega \varphi(\omega, \omega') P(d\omega' \mid \omega) \right] P(d\omega) \tag{2}$$

On retrouve (1) en prenant $\varphi(\omega, \omega') = \chi_A(\omega')\chi_B(\omega)$. On sait (Doob [5], th. 9.1, p. 27 et Loève [9], th. A, § 26.1, p. 354) que pour $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P(\,.\mid\omega)) \text{ pour presque tout } \omega$$

et

$$E^{\mathfrak{B}}(f)(\omega) = \int_\Omega f(\omega')P(d\omega' \mid \omega)$$

(cf. aussi les formules « symboliques » de Kolmogorov [8], ch. V, § 4, formules (12) et (14)). Cela passe sans difficulté à $f \in \mathscr{L}^1_E(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ (en scalarisant). Pour une multi-application à valeurs convexes fermées (dans le dual d'un Fréchet séparable) cette propriété a été démontrée dans [19], [20] (cf. aussi Daurès [4], l'idée de factoriser était de Tortrat).

THÉORÈME 1. — *Si* $\mathfrak{A}$ *est dénombrablement engendrée on a presque sûrement*

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) = \operatorname{adh}\left\{ \int_\Omega u(\omega')P(d\omega' \mid \omega) \mid u \in \mathscr{L}^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P(\,.\mid\omega)) \right\}$$

*où* adh *désigne l'adhérence dans* E *(pour la norme).*

Le second membre peut être noté $\int_\Omega \Gamma(\omega')P(d\omega' \mid \omega)$.

*Preuve.* — 1) Soit $\bar{u} \in \mathscr{L}^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. En appliquant la formule (2) à $\varphi(\omega, \omega') = \|\bar{u}(\omega')\|$, on voit que $\bar{u} \in \mathscr{L}^1_E(\Omega, \mathfrak{A}, P(\,.\mid\omega))$ pour presque tout $\omega$. De plus $\bar{u}(\omega) \in \Gamma(\omega)$ sauf si $\omega \in N_0$ où $N_0$ est P-négligeable. Or un P-négligeable $N_0$ est, pour presque tout $\omega$, $P(\,.\mid\omega)$ négligeable (appliquer (1) avec $A = N_0$, $B = \Omega$). Donc $\bar{u} \in \mathscr{L}^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P(\,.\mid\omega))$ pour presque tout $\omega$, soit pour $\omega \notin N$ où N est P-négligeable.

2) Montrons que le second membre $\Theta(\omega)$ contient p. s. $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega)$. D'après les propriétés de la borne supérieure essentielle ([17], prop. 1.14 ou [20] th. 1), il existe une suite $(u_n)$ dans $L^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ telle que

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) = \operatorname{adh}\{ E^{\mathfrak{B}}(u_n)(\omega) \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ p. s.}$$

Comme

$$E^{\mathfrak{B}}(u_n)(\omega) = \int u_n(\omega')P(d\omega' \mid \omega) \text{ p. s.}$$

on a

$$E^{\mathfrak{B}}(u_n)(\omega) \in \Theta(\omega) \text{ p. s.}$$

d'où

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) \subset \Theta(\omega) \text{ p. s.}$$

3) On va mettre en évidence en 4) une famille dénombrable de sections

P-intégrables de $\Gamma$ qui soient, pour presque tout $\omega$, denses dans $L^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P(. \mid \omega))$. Notons $(w_n)$ cette famille. Alors

$$\Theta(\omega) = \operatorname{adh} \left\{ \int w_n(\omega') P(d\omega' \mid \omega) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \text{ p. s.}$$

Par ailleurs

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) \ni E^{\mathfrak{B}}(w_n)(\omega) \text{ p. s.}$$

et comme

$$E^{\mathfrak{B}}(w_n)(\omega) = \int w_n(\omega') P(d\omega' \mid \omega) \text{ p. s.}$$

on en déduit

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega) \supset \Theta(\omega) \text{ p. s.}$$

4) Soit $(v_n)$ une suite dense de sections mesurables de $\Gamma$. Posons pour $k \in \mathbb{N}$

$$u_{n,k}(\omega) = \begin{cases} v_n(\omega) & \text{si} \quad \| v_n(\omega) - \bar{u}(\omega) \| \leq k \\ \bar{u}(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $u_{n,k} - \bar{u}$ est bornée et

$$\Gamma(\omega) = \operatorname{adh} \{ u_{n,k}(\omega) \mid (n, k) \in \mathbb{N}^2 \}.$$

Pour $\omega \in \Omega - N$ (N est défini en 1)), on a $u_{n,k} \in L^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P(. \mid \omega))$. Pour simplifier, notons $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la famille $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$. D'après le lemme 1.3 de Hiai et Umegaki ([*7*], p. 153, je l'ai repris dans [*19*], lemme 6, p. 13), si $\varepsilon > 0$ et $u \in L^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P(. \mid \omega))$ sont fixés, il existe une $\mathfrak{A}$-partition de $\Omega$, $A_0, \ldots, A_n$ telle que

$$\left\| u - \sum_{i=0}^{n} \chi_{A_i} u_i \right\| \leq \varepsilon \quad (\text{pour la norme de } L^1_E(\Omega, \mathfrak{A}, P(. \mid \omega))).$$

Soit $\mathfrak{A}_0$ une algèbre dénombrable engendrant $\mathfrak{A}$. On va utiliser la densité de $\mathfrak{A}_0$ dans $\mathfrak{A}$ pour l'écart $(A, B) \mapsto P(A \triangle B \mid \omega)$ (Neveu [*11*], exercice I.5.1, p. 23).

Soit $\eta > 0$ tel que

$$\forall i \leq n,\ P(A \mid \omega) < \eta \Rightarrow \int_A \| u_i(\omega') \| P(d\omega' \mid \omega) < \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Il existe une $\mathfrak{A}_0$-partition $\overline{A}_0, \ldots, \overline{A}_n$ telle que

$$\forall i \leq n \quad , \quad P(A_i \Delta \overline{A}_i \mid \omega) < \eta$$

(on peut approcher les $A_i$ par des $\overline{A}_i$ pas forcément disjoints, remplacer $\overline{A}_i$

par $\overline{A}_i - \bigcup_{j<i} \overline{A}_j$, puis ajouter à $\overline{A_0}$ la partie de $\Omega$ non encore recouverte), d'où

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \chi_{A_i} u_i - \sum_{i=0}^{n} \chi_{\overline{A}_i} u_i \right\| \leq 2\varepsilon$$

et

$$\left\| u - \sum_{i=0}^{n} \chi_{\overline{A}_i} u_i \right\| \leq 3\varepsilon.$$

Or la famille des $\sum_{i=0}^{n} \chi_{\overline{A}_i} u_i$ où $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A}_0, \ldots, \overline{A}_n$ est une $\mathfrak{A}_0$-partition de $\Omega$, est dénombrable. C'est la famille annoncée en 3).

COROLLAIRE. — *Si les* $P(. \mid \omega)$ *sont presque toutes sans atomes,* $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega)$ *est p. s. convexe.*

*Preuve.* — On sait que si $P(. \mid \omega)$ est sans atomes,

$$\int \Gamma(\omega') P(d\omega' \mid \omega)$$

est convexe (Hiai et Umegaki [*7*], th. 4.2, p. 165); si le lecteur n'a pas cet article sous la main, il peut retrouver la démonstration en particularisant celle du théorème 2 ci-dessous.

*Remarque.* — D'après Rohlin ([*13*], p. 51) (cf. aussi [*21*]), sous l'hypothèse que P est portée par un lusinien et $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont dénombrablement engendrées, dire que presque toutes les $P(. \mid \omega)$ sont sans atomes équivaut à dire que $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ est sans $\mathscr{B}$-atomes. Dans le paragraphe suivant on va montrer directement (sans utiliser le th. 1) que « $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sans $\mathfrak{B}$-atomes » implique la convexité de $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)(\omega)$.

## § 4. APPLICATION DU THÉORÈME DE LIAPUNOV-SOLER

THÉORÈME 2. — *Si* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *est sans* $\mathfrak{B}$*-atomes,* $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$ *est p. s. à valeurs convexes.*

*Remarque.* — Ce résultat est obtenu par Dynkin Evstigneev ([*6*]) pour $E = \mathbb{R}^n$ et $\Gamma$ intégralement majorée. Ils obtiennent même mieux (cf. th. 1.2,

p. 327) $E^{\mathfrak{B}}(L^1_\Gamma) = E^{\mathfrak{B}}(L^1_{\mathrm{co}\,\Gamma})$. Dans le cas de l'intégration ($\mathfrak{B} = \{ \emptyset, \Omega \}$) cette formule signifie

$$\left\{ \int u dP \mid u \in L^1_\Gamma \right\} = \left\{ \int u dP \mid u \in L^1_{\mathrm{co}\,\Gamma} \right\}$$

et est connue au moins depuis 1963 (Richter [*12*], th. 2, p. 86).

*Preuve.* — Il suffit de montrer que adh $E^{\mathfrak{B}}(L^1_\Gamma)$ est convexe (on peut en déduire que $E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)$ est convexe soit en utilisant les propriétés de la borne supérieure essentielle, soit en citant Hiai et Umegaki [7], th. 1.5, p. 154). Soit $u$ et $v \in L^1_\Gamma(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $\alpha \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe $A \in \mathfrak{A}$ tel que

$$\| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A u + \chi_{\Omega - A} v) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha u + (1 - \alpha)v)) \| \leq \varepsilon.$$

Il suffit pour cela de montrer

$$\| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A(u - v)) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha(u - v)) \| \leq \varepsilon.$$

Soit $w \in L^1_E(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ étagée telle que $\| (u - v) - w \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (idée due à Uhl [*16*]). Comme $w$ prend ses valeurs dans un sous-espace de E de dimension finie, on peut appliquer le théorème de Soler ([*15*], prop. IV.12, p. 94 ; [*22*]) : il existe $A \in \mathfrak{A}$ tel que $E^{\mathfrak{B}}(\chi_A w) = \alpha E^{\mathfrak{B}}(w)$. On a

$$\begin{aligned} &\| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A(u - v)) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha(u - v)) \| \\ &\qquad \leq \| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A(u - v)) - E^{\mathfrak{B}}(\chi_A w) \| + \| E^{\mathfrak{B}}(\chi_A w) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha w) \| \\ &\qquad + \| E^{\mathfrak{B}}(\alpha w) - E^{\mathfrak{B}}(\alpha(u - v)) \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

COROLLAIRE. — *Si* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *est sans* $\mathfrak{B}$*-atomes,*

$$E^{\mathfrak{B}}(\Gamma) = E^{\mathfrak{B}}(\overline{\mathrm{co}}\,\Gamma).$$

*Preuve.* — Il suffit de montrer :

$$L^1_{E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)}(\mathfrak{B}) = L^1_{E^{\mathfrak{B}}(\overline{\mathrm{co}}\,\Gamma)}(\mathfrak{B})$$

(on écrit $\mathfrak{B}$ au lieu de $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$). Comme il y a convexité, il suffit de vérifier l'égalité des fonctions d'appui en $v \in L^\infty_{E'_s}(\Omega, \mathfrak{B}, P)$).

On a d'abord

$$\delta^*(v \mid L^1_{E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)}(\mathfrak{B})) = \sup \{ \langle v, E^{\mathfrak{B}}(u) \rangle \mid u \in L^1_\Gamma(\mathfrak{A}) \}.$$

(puisque

$$\begin{aligned} L^1_{E^{\mathfrak{B}}(\Gamma)}(\mathfrak{B}) &= \text{adh } E^{\mathfrak{B}}(L^1_\Gamma(\mathfrak{A})) \\ &= \sup \{ \langle v, u \rangle \mid u \in L^1_\Gamma(\mathfrak{A}) \} \\ &= \int \delta^*(v(w) \mid \Gamma(\omega))P(d\omega) \end{aligned}$$

(résulte de Castaing-Valadier [3], th. VII.7, p. 200 appliqué à

$$f(\omega, x) = \delta(x \mid \Gamma(\omega)),\ \mathscr{L}_E = \mathscr{L}^1_E(\mathfrak{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}_{E'} = \mathscr{L}^\infty_{E'_s}(\mathfrak{A})).$$

Pour les mêmes raisons

$$\begin{aligned} \delta^*(v \mid L^1_{E^{\mathfrak{B}}(\overline{\text{co}}\,\Gamma)}(\mathfrak{B})) &= \int \delta^*(v(\omega) \mid \overline{\text{co}}\,\Gamma(\omega))P(d\omega) \\ &= \int \delta^*(v(\omega) \mid \Gamma(\omega))P(d\omega). \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J. M. Bismut, Intégrales convexes et probabilités. *J. of Math. An. and Appl.*, t. **42** (3), 1973, p. 639-673.

[2] C. Castaing, *Compacité et inf-équicontinuité dans certains espaces de Köthe-Orlicz.* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1979, Exposé nº 6.

[3] C. Castaing et M. Valadier, Convex analysis and measurable multi-functions. Springer-Verlag. *Lecture Notes*, nº 580, 1977.

[4] J.-P. Daurès, Version multivoque du théorème de Doob. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. B IX (2), 1973, p. 167-176.

[5] J. L. Doob, *Stochastic process.* John Wiley, 1953.

[6] E. B. Dynkin et I. V. Evstigneev, Regular conditional expectations of correspondances. *Theory of probability and its applications*, t. **21**, 1976, p. 325-328 (traduit du russe).

[7] F. Hiai et H. Umegaki, Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions. *J. of multivariante an.*, t. **7**, 1977, p. 149-182.

[8] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the theory of probability.* Chelsea, 1950 (édition originelle en allemand, 1933).

[9] M. Loeve, *Probability theory*, 3e édition, Van Nostrand, 1963.

[10] J. Neveu, Convergence presque sûre de martingales multivoques. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. B VIII (1), 1972, p. 1-7.

[11] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Masson, 1964.

[12] H. Richter, Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Masstheorie. *Math. Ann.*, t. **150**, 1963, p. 85-90.

[13] V. A. Rohlin, On the fundamental ideas of measure theory. *Amer. Math. Soc. Transl.*, t. **71**, 1952, 1-54.

[14] M.-F. Sainte-Beuve, Some topological properties of vector measures with bounded variations and its applications. *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, t. CXVI, 1978, 317-379.

[15] J. L. Soler, *Notion de liberté en statistique mathématique.* Thèse de 3e cycle. Grenoble, 1970 (a été traduite en russe aux éditions MIR).

[*16*] J. J. Uhl, The range of a vector-valued measure. *Proc. A. M. S.*, t. **23** (1), 1969, p. 158-163.

[*17*] M. Valadier, Multi-applications mesurables à valeurs convexes compactes. *J. Math. Pures et Appl.*, t. **50**, 1971, p. 265-297.

[*18*] M. Valadier, Espérance conditionnelle d'un convexe fermé aléatoire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **273**, 1971, p. 1265-1267 (version détaillée : Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, Exposé n° 1).

[*19*] M. Valadier, *Sur l'espérance conditionnelle multivoque.* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1978, Exposé n° 9.

[*20*] M. Valadier, On conditional expectation of random sets. *A paraître* dans *Annali di Mat. pura ed appl.*

[*21*] M. Valadier, *Structure des atomes conditionnels d'un espace de probabilité.* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1980, Exposé n° 1.

[*22*] M. Valadier, *Le théorème de Liapunov-Soler.* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1980, Exposé n° 2.

[*23*] B. Van Cutsem, *Éléments aléatoires à valeurs convexes compactes.* Thèse Grenoble. 1971.

[*24*] B. Van Cutsem, Martingales de convexes fermés aléatoires en dimension finie. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. B VIII (4), 1972, p. 365-385.

*(Manuscrit reçu le 28 février 1980).*