ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. COCOZZA
M. ROUSSIGNOL

Théorèmes ergodiques pour un processus de naissance et mort sur la droite réelle

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, nº 1 (1980), p. 75-85
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_1_75_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVI, n° 1, 1980, p. 75-85. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorèmes ergodiques pour un processus de naissance et mort sur la droite réelle

par

C. COCOZZA et M. ROUSSIGNOL (*)
Laboratoire de probabilités, Tour 56
Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

ABSTRACT. — In this article we study birth and death process for infinite particle system on the real line. We give conditions for uniqueness of invariant measure and pointwise ergodic theorem. As to prove uniqueness of the process in our precedent article, we use here a coupling method.

I. INTRODUCTION

Ce travail est la suite de l'article [*1*], dans lequel nous avons montré, sous des hypothèses de type Lipschitz, l'existence d'un unique processus markovien de naissance et mort sur la droite réelle. Nous donnons ici, en utilisant la même technique de couplage, des théorèmes ergodiques pour de tels processus, sous des hypothèses évidemment plus restrictives.

Nous notons E l'espace des mesures ponctuelles simples sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence faible ; $\mathscr{E}$ désigne sa tribu borélienne. Nous identifierons fréquemment les éléments de E avec leur support. Lorsque η

(*) Membres du Laboratoire Associé au C. N. R. S. n° 224 « Processus Stochastiques et Applications ».

et ξ désignent deux éléments de E et lorsque Γ est un borélien borné de $\mathbb{R}$, nous notons

$$N_\Gamma(\eta, \xi) = \int_\Gamma 1_{\{\eta(x) \neq \xi(x)\}}(\eta(dx) + \xi(dx)),$$

le nombre de points de Γ sur lesquels η et ξ diffèrent.

Nous appelons Ω l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans E, continues à droite et ayant une limite à gauche en tout point, η_t l'application de Ω dans E définie par $\eta_t(\omega) = \omega(t)$, et $\mathscr{F}_t$ (resp. $\mathscr{F}$) la tribu engendrée par les processus $(s \mapsto \eta_s, s \leq t)$ (resp. $s \geq 0$).

Étant données une application b de $\mathbb{R} \times$ E dans $\mathbb{R}^+$ et une application d de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant les hypothèses :

$$(\mathrm{H}) \begin{cases} \cdot\ \sup\limits_{x,\eta} b(x, \eta) = \mathrm{B} < +\infty \,;\ \sup\limits_{x} d(x) < +\infty \\ \cdot\ \text{l'application } \eta \mapsto b(x, \eta) \text{ de E dans } \mathbb{R}^+ \text{ est continue} \\ \cdot\ \text{l'application } x \mapsto d(x) \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^+ \text{ est continue} \\ \cdot\ |b(x, \eta) - b(x, \xi)| \leq \displaystyle\int \mathrm{N}_{[x,x+u]}(\eta, \xi) m(du) \\ \quad \text{où } m \text{ est une mesure positive bornée sur } \mathbb{R} \text{ telle que } \displaystyle\int |u| m(du) < +\infty \end{cases}$$

il existe une unique solution P_η au problème des martingales, d'état initial η, associé à l'opérateur L défini par :

$$\mathrm{L}f(\xi) = \int b(x, \xi)[f(\xi \cup x) - f(\xi)]dx + \int d(x)[f(\xi \backslash x) - f(\xi)]\xi(dx)$$

pour f appartenant à l'ensemble $\mathscr{D}(\mathrm{E})$ des fonctions continues et bornées de E dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent de η que par sa restriction à un compact de $\mathbb{R}$.

Nous supposons ici que le coefficient de mort d ne dépend pas des configurations η, ce qui nous permet de faire une hypothèse sur b un peu moins restrictive que celle donnée dans ([*1*]), mais la démonstration du résultat énoncé ci-dessus est la même.

Nous notons $\mathrm{S}(t)$ le semi-groupe du processus de Markov $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathscr{F}, \eta_t, \mathrm{P}_\eta)$. Enfin nous désignons par $\mathscr{H}$ l'ensemble des probabilités μ sur E telles que :

$$\sup \left\{ \frac{1}{|\Gamma|} \int \eta(\Gamma)\mu(d\eta) / \Gamma \text{ borélien borné de } \mathbb{R} \right\} < +\infty$$

$\left(\text{nous posons } |\Gamma| = \int_\Gamma dx \text{ et nous faisons la convention } \frac{0}{0} = 0\right)$.

Nous allons montrer que sous l'hypothèse (H) et si $d = \inf_x d(x)$ est supérieur à $\int |u| m(du)$, alors le processus étudié possède une unique mesure invariante notée ν qui est nécessairement dans $\mathscr{H}$ et telle que si μ appartient à $\mathscr{H}$, $\mu S(t)$ converge faiblement vers ν. De plus pour toute fonction f de $\mathscr{D}(E)$, $\frac{1}{T}\int_0^T f(\eta_t)dt$ converge P_μ p. s. vers $\nu(f)$.

Dans l'appendice nous ne supposons plus le coefficient de mort $d(x, \eta)$ constant en η et nous montrons comment, sous les hypothèses données dans ([I]) et dans le cas d'une interaction unilatérale, on retrouve des théorèmes ergodiques semblables.

Lorsque η et ξ sont deux éléments de E, nous désignons par $\tilde{P}_{\eta,\xi}$ la probabilité sur $\Omega \times \Omega$ qui « couple » P_η et P_ξ (cf. [*1*]), c'est-à-dire qui est solution au problème des martingales d'état initial (η, ξ), associé à l'opérateur $\tilde{L}$ défini pour f appartenant à $\mathscr{D}(E \times E)$ et (ξ_1, ξ_2) appartenant à $E \times E$ par :

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}f(\xi_1, \xi_2) = & \int dx\,[b(x, \xi_1) - b(x, \xi_1) \wedge b(x, \xi_2)]\,[f(\xi_1 \cup x, \xi_2) - f(\xi_1, \xi_2)] \\
& + \int dx\,[b(x, \xi_2) - b(x, \xi_1) \wedge b(x, \xi_2)]\,[f(\xi_1, \xi_2 \cup x) - f(\xi_1, \xi_2)] \\
& + \int dx\,[b(x, \xi_1) \wedge b(x, \xi_2)]\,[f(\xi_1 \cup x, \xi_2 \cup x) - f(\xi_1, \xi_2)] \\
& + \int \xi_1(dx)\,[d(x, \xi_1) - 1_{\{\xi_1(x) = \xi_2(x)\}}(d(x, \xi_1) \wedge d(x, \xi_2))]\,[f(\xi_1 \backslash x, \xi_2) - f(\xi_1, \xi_2)] \\
& + \int \xi_2(dx)\,[d(x, \xi_2) - 1_{\{\xi_1(x) = \xi_2(x)\}}(d(x, \xi_1) \wedge d(x, \xi_2))]\,[f(\xi_1, \xi_2 \backslash x) - f(\xi_1, \xi_2)] \\
& + \int \xi_1(dx) 1_{\{\xi_1(x) = \xi_2(x)\}}(d(x, \xi_1) \wedge d(x, \xi_2))\,[f(\xi_1 \backslash x, \xi_2 \backslash x) - f(\xi_1, \xi_2)]
\end{aligned}
$$

Si μ et ν sont deux mesures sur E, nous notons $\tilde{P}_{\mu,\nu}$ (ou $\tilde{P}$ lorsque aucune confusion n'est possible) la probabilité $\int \tilde{P}_{\eta,\xi}\mu(d\eta)\nu(d\xi)$ et $\tilde{E}_{\mu,\nu}$ l'espérance associée à $\tilde{P}_{\mu,\nu}$.

Dans les paragraphes II et III, nous nous plaçons sous l'hypothèse (H).

II. ERGODICITÉ

En appliquant la propriété de martingale à la fonction $f(\xi_1, \xi_2) = N_\Gamma(\xi_1, \xi_2)$, on obtient :

LEMME 1. — Pour tout borélien borné Γ de $\mathbb{R}$,

$$N_\Gamma(\eta_t, \xi_t) - \int N_\Gamma(\eta, \xi)\mu(d\eta)\nu(d\xi)$$
$$- \int_0^t ds \left\{ \int_\Gamma |b(x, \eta_s) - b(x, \xi_s)| dx - \int_\Gamma 1_{\{\eta_s(x) \neq \xi_s(x)\}} d(x) [\eta_s(dx) + \xi_s(dx)] \right\}$$

est une $(\tilde{\mathscr{F}}_t, \tilde{P}_{\mu,\nu})$ martingale centrée.

LEMME 2. — Soient deux probabilités μ et ν sur E qui vérifient :

$$\sup_A \left\{ \frac{1}{|A|} \int N_A(\eta, \xi)\mu(d\eta)\nu(d\xi) \mid A \text{ borélien borné de } \mathbb{R} \right\} = \alpha < +\infty,$$

alors

1) $\tilde{E}_{\mu,\nu}[N_\Gamma(\eta_t, \xi_t)] \leq \alpha |\Gamma| \exp\left\{ \left(\int |u| m(du) - d \right) t \right\}$ pour tout t positif et tout borélien borné Γ.

2) Si on suppose de plus que $d > \int |u| m(du)$, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{D}(E)$ nous avons :

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \left| \int f(\eta)\mu S(t)(d\eta) - \int f(\eta)\nu S(t)(d\eta) \right| = 0$$

Démonstration. — Posons $f(t, a, b) = \tilde{E}_{\mu,\nu}[N_{[a,b]}(\eta_t, \xi_t)]$.
Le lemme 1 donne l'inégalité suivante :

$$f(t, a, b) \leq f(s, a, b) + \int_s^t dv \left\{ \int_\Gamma dx \int m(du) f(v, x, x + u) - d f(v, a, b) \right\}$$

pour tout couple (s, t) de réels positifs tels que $s < t$. On en déduit alors facilement la première inégalité. La deuxième assertion s'obtient en remarquant que :

$$\left| \int f(\eta)\mu S(t)(d\eta) - \int f(\eta)\nu S(t)(d\eta) \right|$$
$$\leq \tilde{E}_{\mu,\nu} |f(\eta_t) - f(\xi_t)| \leq 2 \sup_\eta |f(\eta)| \tilde{E}_{\mu,\nu}[N_\Gamma(\eta_t \xi_t)]$$

si f ne dépend de η que par sa restriction à Γ. ■

PROPOSITION 3. — Si $d > \int |u| m(du)$, il existe au plus une mesure invariante appartenant à $\mathscr{H}$. De plus, si une telle mesure, notée ν, existe alors pour toute mesure μ appartenant à $\mathscr{H}$, $\mu S(t)$ converge vaguement vers ν, c'est-à-dire pour toute fonction f continue à support compact sur E,

$$\lim_{t\uparrow+\infty}\int f(\eta)\mu S(t)(d\eta) = \int f(\eta)\nu(d\eta).$$

Démonstration. — La première partie de la proposition est une conséquence immédiate du lemme précédent. D'après ce lemme également, si f est dans $\mathscr{D}(E)$, il est clair que $\lim\limits_{t\uparrow+\infty}\int f(\eta)\mu S(t)d\eta = \int f(\eta)\nu(d\eta)$; on montre alors la convergence vague en approchant la fonction f par la suite (f_n) de fonctions appartenant à $\mathscr{D}(E)$ définie par :

$$f_n(\eta) = f(\eta^n) \text{ où } \eta^n = \eta \text{ sur }]-n,n[\text{ et } \eta^n(]-n,n[^c) = 0. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 4. — Si $d > 0$, il existe une mesure invariante ν appartenant à $\mathscr{H}$.

Démonstration. — Considérons l'opérateur L_1 défini sur les fonctions f de $\mathscr{D}(E)$ par :

$$L_1 f(\xi) = B\int[f(\xi\cup x) - f(\xi)]dx + d\int[f(\xi\backslash x) - f(\xi)]\xi(dx).$$

Appelons Q_η la probabilité solution au problème des martingales d'état initial η, associé à L_1 et notons $T(t)$ le semi-groupe du processus de Markov $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathscr{F}, \eta_t, Q_\eta)$. Ce processus admet une unique mesure invariante λ, qui est la mesure de Poisson d'intensité $\frac{B}{d}dx$. On peut coupler les probabilités P_ϕ et $Q = \int Q_\eta\lambda(d\eta)$, c'est-à-dire construire une probabilité $\tilde{Q}$ sur $\Omega\times\Omega$ dont les projections sont respectivement P_ϕ et Q et telle que $\tilde{Q}[\eta_t \subset \xi_t, \forall t] = 1$. Par conséquent, pour toute fonction f croissante sur E, c'est-à-dire qui vérifie $f(\xi) \leq f(\eta)$ si $\xi \subset \eta$, nous avons :

$$\int f(\eta)\varepsilon_\phi S(t)(d\eta) \leq \int f(\eta)QT(t)(d\eta) = \int f(\eta)Q(d\eta),$$

autrement dit les probabilités $\varepsilon_\phi S(t)$ sont majorées par la probabilité Q. On en déduit facilement, à l'aide du théorème de Prohorov, que la famille de probabilités $\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_\phi S(t)dt\,;\ T \geq 0\right\}$ est faiblement relativement compacte dans l'ensemble des probabilités sur E ; tout point d'accumulation de cette famille est alors une mesure invariante pour le processus de semi-groupe $S(t)$, qui appartient à $\mathscr{H}$. ■

PROPOSITION 5. — Si $d > 0$, toutes les mesures invariantes pour le semi-groupe $S(t)$ appartiennent à $\mathscr{H}$.

Démonstration. — Nous reprenons les notations de la proposition 4. Soit une mesure invariante μ pour le semi-groupe $S(t)$. Nous pouvons coupler de la même manière que plus haut les probabilités

$$P = \int P_\eta \mu(d\eta) \quad \text{et} \quad R = \int Q_\eta \mu(d\eta),$$

ce qui prouve que pour toute fonction f croissante sur E :

$$\int f(\eta)\mu(d\eta) = \int f(\eta)\mu S(t)(d\eta) \leq \int f(\eta)\mu T(t)(d\eta).$$

D'autre part il n'est pas difficile de voir, en utilisant les techniques des lemmes 1 et 2 pour le processus de semi-groupe $T(t)$ que, pour toute fonction f dans $\mathscr{D}(E)$, $\int f(\eta)\mu T(t)(d\eta)$ converge vers $\int f(\eta)\lambda(d\eta)$.

Ceci achève la démonstration de la proposition 5. ■

Nous avons donc établi le théorème suivant :

THÉORÈME 6. — Si $d > \int |u| m(du)$, le processus étudié possède une unique probabilité invariante notée ν ; cette mesure appartient à $\mathscr{H}$ et pour toute probabilité μ appartenant à $\mathscr{H}$, les probabilités $\mu S(t)$ convergent faiblement vers ν.

III. THÉORÈME ERGODIQUE PONCTUEL

LEMME 7. — Si $d > \int |u| m(du)$ et si ν désigne la mesure invariante du processus, on a pour tout f appartenant à $\mathscr{D}(E)$:

$$\lim_{T\uparrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\eta_t)dt = \nu(f) \quad P_\nu \text{ p. s.}$$

Démonstration. — ν étant une probabilité invariante, on peut appliquer le théorème de Birkoff, ce qui entraîne :

$$\lim_{T\uparrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\eta_t)dt = E_\nu[f(\eta_0) \mid \mathscr{I}]$$

où $\mathscr{I}$ désigne la tribu des ensembles invariants par la translation dans le temps. Or l'unicité de la mesure invariante entraîne que $\mathscr{I}$ est triviale d'où le lemme. ■

THÉORÈME 8. — Si $d > \int |u| m(du)$, si ν désigne la probabilité invariante du processus, on a pour toute probabilité μ de $\mathscr{H}$ et toute fonction f de $\mathscr{D}(E)$:

$$\lim_{T\uparrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\xi_t)dt = \nu(f)\, P_\mu \text{ p. s.}$$

Démonstration. — On effectue le couplage $\tilde{P}_{\mu,\nu}$ et si (ξ_t, η_t) représente le processus couplé on a :

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\xi_t)dt - \nu(f)\right| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(\xi_t) - f(\eta_t)|\,dt + \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\eta_t)dt - \nu(f)\right|$$

Or d'après le lemme précédent

$$\lim_{T\uparrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\eta_t)dt = \nu(f)\tilde{P}_{\mu,\nu} \text{ p. s.}$$

D'autre part, si f ne dépend de η que par l'intermédiaire du compact K on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(\xi_t) - f(\eta_t)|\,dt \leq 2\,\|f\|_\infty \frac{1}{T}\int_0^T N_K(\xi_t, \eta_t)dt,$$

or d'après le lemme 2

$$\tilde{E}_{\mu,\nu} N_K(\xi_t, \eta_t) \leq \alpha\,|K|\exp\left\{t\left(\int |u|\, m(du) - d\right)\right\}$$

donc

$$\tilde{E}_{\mu,\nu}\int_0^\infty dt N_K(\xi_t, \eta_t) < \infty$$

donc $\tilde{P}_{\mu,\nu}$ p. s. :

$$\int_0^\infty N_K(\eta_t, \xi_t)dt < \infty$$

et $\tilde{P}_{\mu,\nu}$ p. s.

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(\xi_t) - f(\eta_t)|\,dt \leq 2\,\|f\|_\infty \frac{1}{T}\int_0^\infty N_K(\eta_t, \xi_t)dt$$

ce qui démontre que $\tilde{P}_{\mu,\nu}$ p. s.

$$\lim_{T\uparrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\xi_t)dt = \nu(f)$$

d'où le résultat. ■

IV. EXEMPLES

1) Si l'on étudie le processus associé à l'opérateur :

$$Lf(\eta) = \int 1_{\{\eta\cap[x-N,x+N]\neq\phi\}}[f(\eta\cup x) - f(\eta)] + 2M\int\eta(dx)[f(\eta\backslash x) - f(n)]$$

analogue sur la droite réelle au processus de contact sur $\mathbb{Z}$, les théorèmes ci-dessus montrent qu'il y a existence et unicité du processus associé à cet opérateur et que si $M > N$ il y a ergodicité c'est-à-dire : ε_ϕ est la seule mesure invariante et si μ appartient à $\mathscr{H}$, $\mu S(t)$ converge faiblement vers ε_ϕ et

$$\lim_{T\uparrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\xi_t)dt = f(\phi) \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

2) Si $b(x, \eta) = \int(\eta[x, x + u] \wedge M)m(du)$ où m est une mesure positive bornée, on a :

$$| b(x, \eta) - b(x, \xi) | \leq \int m(du)N_{[x,x+u]}(\eta, \xi)$$

donc les théorèmes 6 et 8 s'appliquent si $d > \int | u | m(du)$.

V. APPENDICE

Dans cet appendice nous allons étudier un cas où le coefficient de mort $d(x, \eta)$ dépend de la configuration η. Nous faisons les hypothèses suivantes :

— les hypothèses (H_0) et (H_1) de [I],

— les coefficients $b(x, \eta)$ et $d(x, \eta)$ ne dépendent de η que par la partie de η à droite de x,

— $d(x, \eta) \geqslant d > 0$.

PROPOSITION 9. — Pour tous réels positifs s et t, $0 \leqslant s < t$, on a :

$$\tilde{E}_{\mu,\nu}[N_\Gamma(\eta_t, \xi_t)] \leqslant \tilde{E}_{\mu,\nu}[N_\Gamma(\eta_s, \xi_s)] + \int_s^t dv\tilde{E}_{\mu,\nu}\left\{\int_\Gamma dx \int m(du)N_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) + \int_\Gamma \eta_v(dx)1_{\eta_v(x)=\xi_v(x)}\int m(du)N_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) - dN_\Gamma(\eta_v, \xi_v)\right\}$$

Démonstration. — On applique la propriété de martingale à la fonction $f(\eta, \xi) = N_\Gamma(\eta, \xi)$ et on utilise les hypothèses de Lipschitz sur $b(x, \eta)$ et $d(x, \eta)$ ainsi que la minoration de $d(x, \eta)$ par d. ■

Cette inégalité ne peut pas se traiter *a priori* comme précédemment à cause du terme

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\nu} \int_\Gamma \eta_v(dx) 1_{\eta_v(x)=\xi_v(x)} \mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) .$$

On a cependant la propriété suivante :

PROPOSITION 10. — Si $\nu \otimes \mu$ p. s. η et ξ n'ont aucun point commun, c'est-à-dire

$$\iint \nu(d\eta)\mu(d\xi) \int \eta(dx) 1_{\eta(x)=\xi(x)} = 0 ,$$

alors pour tous u et v positifs,

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\nu} \int_\Gamma \eta_v(dx) 1_{\eta_v(x)=\xi_v(x)} \mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) \leqslant \frac{\mathrm{B}}{d} \int_\Gamma dx \tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\nu} \mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v)$$

Démonstration. — Nous couplons l'évolution $(\eta_., \xi_.)$ à une troisième évolution $\zeta_.$ qui est un processus de naissance et mort sans interaction, de coefficient de naissance B et de coefficient de mort d ; cette évolution $\zeta_.$ majore $\eta_.$ et $\xi_.$ (c'est-à-dire que pour tout s, $\zeta_s \geqslant \eta_s \vee \xi_s$) sauf peut-être aux points issus des configurations initiales. On construit donc une probabilité $\tilde{\tilde{\mathrm{E}}}$ sur Ω^3 telle que $\tilde{\tilde{\mathrm{E}}}$ p. s. $\zeta_s \geqslant \eta_s 1_{\eta_s(x)=\xi_s(x)}$. Si on choisit comme loi initiale pour ζ_s la loi d'un processus de Poisson de paramètre $\frac{\mathrm{B}}{d}$, ζ_s est lui-même un processus de Poisson de paramètre $\frac{\mathrm{B}}{d}$ et on a :

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\nu} \int_\Gamma \eta_v(dx) 1_{\eta_v(x)=\xi_v(x)} \mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) \leqslant \tilde{\tilde{\mathrm{E}}} \int_\Gamma \zeta_v(dx) \mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) .$$

Soit maintenant $\tilde{\mathscr{F}}_v^x$ la tribu engendrée par tous les événements arrivés avant le temps v et à droite de x :

$$\tilde{\mathscr{F}}_v^x = \sigma(\eta_{u_1}(\Gamma_1), \xi_{u_2}(\Gamma_2), \zeta_{u_3}(\Gamma_3)/u_i \leqslant v, \Gamma_i \subset]x, +\infty[)$$

On va montrer que

$$\tilde{\tilde{\mathrm{E}}} \int_\Gamma \zeta_v(dx) \mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) = \frac{\mathrm{B}}{d} \tilde{\tilde{\mathrm{E}}} \int_\Gamma dx \mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) .$$

Pour cela considérons la tribu $\mathscr{B}$ sur $\mathbb{R} \times \Omega$ engendrée par les fonctions $(x, \omega) \mapsto 1_{[a,b]}(x)\mathrm{X}(\omega)$ où $a < b$ et X appartient à $\tilde{\mathscr{F}}_v^b$. Pour une telle fonction h on peut écrire :

$$\tilde{\tilde{\mathrm{E}}} \int \zeta_v(dx) h(x, \omega) = \frac{\mathrm{B}}{d} \mathrm{E} \int dx h(x, \omega) ;$$

en effet, l'interaction étant seulement à droite, on a pour $a < b$

$$\tilde{\tilde{\mathrm{E}}}\zeta_v[a, b]\mathrm{X} = \tilde{\tilde{\mathrm{E}}}\zeta_v[a, b]\tilde{\tilde{\mathrm{E}}}\mathrm{X} = \frac{\mathrm{B}}{d}(b - a)\tilde{\tilde{\mathrm{E}}}\mathrm{X}.$$

Si u est positif, la fonction $(x, \omega) \mapsto \mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v(\omega)\xi_v(\omega))$ appartient à la tribu $\mathscr{B}$, ce qui démontre le résultat cherché. ■

PROPOSITION 11. — Soient deux probabilités μ et ν sur E appartenant à $\mathscr{H}$, alors

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\nu}[\mathrm{N}_\Gamma(\eta_t, \xi_t)] \leqslant 2\alpha \,|\, \Gamma \,|\, \exp\left\{\left(\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{d}\right)\int |\, u \,|\, m(du) - d\right)t\right\}$$

Démonstration. — Soit $\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\phi}$ la probabilité effectuant le couplage avec les lois initiales μ et δ_ϕ. D'après les deux propositions précédentes comme $m(du)$ ne charge que $\mathbb{R}^+$,

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\phi}[\mathrm{N}_\Gamma(\eta_t, \xi_t)] \leqslant \tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\phi}[\mathrm{N}_\Gamma(\eta_s, \xi_s)]$$
$$+ \int_s^t dv \left\{\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{d}\right)\int_\Gamma dx \int m(du)\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\phi}\mathrm{N}_{]x,x+u]}(\eta_v, \xi_v) - d\tilde{\mathrm{E}}_{\mu\phi}\mathrm{N}_\Gamma(\eta_v, \xi_v)\right\}$$

d'où comme dans le lemme 2 :

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\phi}[\mathrm{N}_\Gamma(\eta_t, \xi_t)] \leqslant \alpha \,|\, \Gamma \,|\, \exp\left\{\left(\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{d}\right)\int |\, u \,|\, m(du) - d\right)t\right\}$$

où $$\alpha = \sup_{\mathrm{A}}\left\{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{A}}\int \eta(\mathrm{A})\mu(d\eta)/\mathrm{A} \text{ borélien borné de } \mathbb{R}\right\}.$$

Or $\tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\nu}(\mathrm{N}_\Gamma(\eta_t, \xi_t)) \leqslant \tilde{\mathrm{E}}_{\mu,\phi}(\mathrm{N}_\Gamma(\eta_t, \xi_t)) + \tilde{\mathrm{E}}_{\nu,\phi}(\mathrm{N}_\Gamma(\eta_t, \xi_t))$, d'où le résultat. ■

Ayant le même résultat fondamental que dans le lemme 2, on peut refaire le même travail que dans les paragraphes II et III, d'où le théorème :

THÉORÈME 12. — Sous les hypothèses de l'appendice, si

$$d > \left(1 + \frac{\mathrm{B}}{d}\right)\int |\, u \,|\, m(du),$$

le processus étudié possède une unique probabilité invariante notée ν; cette mesure appartient à $\mathscr{H}$; pour toute probabilité μ appartenant à $\mathscr{H}$, les probabilités $\mu\mathrm{S}(t)$ convergent faiblement vers ν et si f appartient à $\mathscr{D}(\mathrm{E})$

$$\lim_{\mathrm{T}\uparrow\infty} \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(\xi_t)dt = \nu(f) \qquad \mathrm{P}_\mu \text{ p. s.}$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] C. Cocozza et M. Roussignol, Unicité d'un processus de naissance et mort sur la droite réelle. *Annales I. H. P. B.*, vol. **XV**, n° 1, 1979, p. 93-105.

[*2*] R. A. Holley et D. W. Stroock, Nearest neighbour birth and death processes on the real line. *Acta Mathematica*, vol. **140**, 1978.

[*3*] T. M. Liggett, The Stochastic evolution of infinite systems of interacting particle. *Lectures Notes in Math*, Springer, 1977 (École d'été de Probabilités de Saint-Flour, VI, 1976).

(Manuscrit reçu le 23 novembre 1979)