GILLES ROYER

Croissance exponentielle de produits markoviens de matrices aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, n° 1 (1980), p. 49-62

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_1_49_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 1, 1980, p. 49-62.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Croissance exponentielle de produits markoviens de matrices aléatoires

par

Gilles ROYER
Équipe d'analyse et de théorie du potentiel (n° 294 au C. N. R. S.),
Université Pierre et Marie Curie, Tour 46, 4, Place Jussieu, 75005 Paris

RÉSUMÉ. — Nous montrons que le théorème de Furstenberg concernant la croissance exponentielle de produits infinis de matrices aléatoires indépendantes s'étend à une vaste classe de processus de Markov.

Ce résultat est obtenu en généralisant une méthode donnée par Guivarc'h dans le cas de l'indépendance.

SUMMARY. — Furstenberg's theorem on exponential growth of independent random matrices products is extended to a broad class of Markov processes. This result is obtained by generalizing a method given by Guivarc'h in the independent case.

INTRODUCTION

Notons SL le groupe des matrices carrées de déterminant 1, la dimension d étant fixée une fois pour toute, Γ l'espace $(\mathrm{SL})^{\mathbb{N}}$ des suites de matrices et M_n la $n$ième application coordonnée : $\Gamma \to \mathrm{SL}$. On suppose donnée une probabilité Q sur Γ invariante et ergodique par décalage à gauche (shift) et telle que $\log^+ (\| M_0 \|)$ soit intégrable, $\| \cdot \|$ désignant une norme sur l'espace vectoriel des matrices $d \times d$. On sait alors (d'après [*3*], théorème 2) que la suite de variables aléatoires $\frac{1}{n} \log (\| M_n \ldots M_0 \|)$ converge presque sûrement vers une constante J qui est positive ou nulle à cause de l'hypothèse sur les déterminants ; cette constante est le plus grand exposant caractéristique de Ljapunov au sens d'Oseledec (voir [*12*]) et nous l'appellerons indice de Ljapunov. Pour certaines études ([*4*], [*7*], [*10*]) il est essentiel d'obtenir la stricte positivité de J ; dans l'article [*2*] (démonstration du théorème 8.6) Furstenberg a donné un critère de positivité stricte dans le cas où Q est une mesure produit, autrement dit lorsque les variables aléatoires M_n sont indépendantes : si J est nul il existe une mesure de Radon sur l'espace projectif P^{d-1} laissée presque sûrement invariante par la matrice M_0.

Le but du présent article est de montrer que ce critère reste valable lorsque le processus (Q, M_n) est un processus de Markov suffisamment aléatoire (voir en particulier plus loin le corollaire 2.12). Pour le montrer nous suivrons pas à pas la méthode donnée par Guivarc'h dans [*5*] pour le cas indépendant, en calculant non pas sur l'espace projectif mais sur son produit avec le groupe SL (je ne sais pas adapter la méthode employée par Furstenberg sans introduire d'importantes hypothèses de régularité).

Je remercie F. Ledrappier, B. Souillard et J.-P. Thouvenot pour de fructueuses conversations sur ces questions.

§ 1. PRÉLIMINAIRES

On désigne par μ la probabilité $M_0(Q)$ sur SL et par α la probabilité $(M_0, M_1)Q$ sur SL $\times$ SL ; α se projette évidemment suivant μ sur chaque facteur.

1.1. Pour commencer on va fixer une fois pour toutes une désintégration $N(g, dg')$ de α par rapport à la première projection de SL $\times$ SL sur SL. Nous voulons dire par là que $N(g, dg')$ est une famille de probabilités sur SL telle que $N(g, \chi)$ soit une fonction borélienne de g pour toute fonction χ borélienne bornée sur SL et telle que $\alpha(dg, dg') = N(g, dg')\mu(dg)$, c'est-à-dire que

$$\int \psi(g, g')\alpha(dg, dg') = \int \mu(dg) \int \psi(g, g')N(g, dg')$$

pour toute fonction ψ α-intégrable. De même on fixera une désintégration $N^*(g', dg)$ de α par rapport à la seconde projection. Le noyau markovien N laisse μ invariante ; il en résulte, d'après l'inégalité de Jensen, que ce noyau définit une contraction de l'espace $L^2(\mu)$, que l'on notera encore N ;

de même N* définit une contraction de $L^2(\mu)$ qui est l'adjointe de la précédente. On rappelle le résultat suivant, dont une démonstration se trouve dans [9], page 158 :

1.2. PROPOSITION. — Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Le décalage agit ergodiquement sur l'espace Γ muni de la mesure Q.

2° L'unité est valeur propre simple pour l'action de N dans $L^2(\mu)$.

1.3. Dans les conditions de la proposition précédente on dira que l'opérateur N est ergodique. On note que cet opérateur N est indépendant du choix qu'on vient de faire de la désintégration $N(g, dg')$ mais faire un choix est commode pour l'intuition et les calculs. On pourrait adopter le point de vue légèrement différent de se donner *a priori* un noyau markovien N admettant une probabilité invariante μ et construire Q à partir de ces données ; on sait alors que Q est ergodique si et seulement si μ est un point extrémal du convexe des probabilités invariantes par N ; ce point de vue transparaît un peu dans les théorèmes 2.11 et 3.3 ci-dessous.

1.4. Introduisons maintenant comme dans [2] les objets suivants :

1° l'espace projectif P^{d-1} que l'on notera simplement P ; le groupe SL a une action naturelle sur P notée $(g, \xi) \to g\xi$;

2° la mesure de probabilité naturelle ω sur P, c'est-à-dire la seule qui soit invariante par l'action du sous-groupe de SL formé par les rotations ;

3° la fonction $a(g, \xi)$ sur SL $\times$ P qui est obtenue par passage au quotient à partir de la fonction $\left(\frac{\|x\|}{\|gx\|}\right)^d$ sur SL $\times$ $(\mathbb{R}^d - 0)$, en désignant par $\| \cdot \|$ la norme *euclidienne* de $\mathbb{R}^d$.

On emploiera la notation $\omega(gd\xi)$ pour désigner la mesure translatée de $\omega(d\xi)$ par $(g)^{-1}$.

1.5. LEMME. — La mesure ω est quasi-invariante par l'action du groupe SL et admet a comme module de quasi-invariance, autrement dit :

$$\forall g \in \mathrm{SL} \qquad \omega(gd\xi) = a(g, \xi)\omega(d\xi)$$

Démonstration. — Pour toute partie A de P, $\omega(A)$ n'est rien d'autre, à une constante de normalisation près que l'on va omettre, que la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\tilde{A}$ des points x de la boule unité B de $\mathbb{R}^d$ tels que la direction de Ox appartienne à A. Par toute matrice unimodulaire g, $\tilde{A}$ est transformée en l'ensemble $g\tilde{A}$ qui a la même mesure de Lebesgue ; comme d'autre part $\omega(gA)$ est égal à la mesure de Lebesgue de $g\tilde{A} \cap B$, il suffit de calculer en coordonnées polaires pour établir la formule annoncée.

1.6. A partir de maintenant on utilisera uniquement la norme suivante sur l'espace des matrices :

$$\| g \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| gx \| \,;$$

les inégalités suivantes dans lesquelles g désigne une matrice unimodulaire quelconque seront utiles :

1° $$\| g \|^{-d} \leqslant a(g, \xi) \leqslant \| g^{-1} \|^{d}$$

2° $\| g \| \geqslant 1$ et il existe un nombre c indépendant de g tel que $\| g^{-1} \| \leqslant c \| g \|^{d-1}$.

1.7. Rappelons enfin les hypothèses de base de ce travail :

(H_0) le processus M_n est un processus de Markov stationnaire ; l'opérateur N est ergodique ; enfin $\int_{SL} \log (\| g \|) \mu(dg) < \infty$ (on note que $\log (\| g \|)$ est positif grâce au choix de la norme).

§ 2. POSITIVITÉ STRICTE DE L'INDICE DE LJAPUNOV

2.1. D'après l'équation de quasi-invariance vérifiée par ω, pour tout g fixé dans SL, l'opérateur qui à la fonction $\varphi(\xi)$ appartenant à $L^2(\omega)$ fait correspondre $a^{1/2}(g, \xi)\varphi(g\xi)$ est unitaire. Les méthodes de Guivarc'h vont pouvoir s'étendre en introduisant un opérateur « produit croisé » de cet opérateur unitaire avec N. Pour Ψ borélienne sur SL × P (bornée pour commencer) définissons la fonction $\mathcal{T}\psi$ par :

$$\mathcal{T}\Psi(g, \xi) = \int a^{1/2}(g', \xi)\Psi(g', g'\xi)N(g, dg') \,;$$

l'inégalité de Jensen nous donne :

$$\begin{aligned}\int (\mathcal{T}\Psi)^2 d\mu d\omega \leqslant \int \mu(dg)\omega(d\xi) \int a(g', \xi)\Psi^2(g', g'\xi)N(g, dg') \\ = \int \alpha(dg, dg') \int a(g', \xi)\Psi^2(g', g'\xi)\omega(d\xi) \\ = \int \alpha(dg, dg') \int \Psi^2(g', \xi)\omega(d\xi) = \int \Psi^2 d\mu d\omega \,.\end{aligned}$$

Ainsi, après identification de deux fonctions égales presque partout $\mathcal{C}$ devient une contraction de l'espace de Hilbert $L^2(\mu \otimes \omega)$.

2.2. LEMME. — Si r est le rayon spectral de l'opérateur $\mathcal{C}$, l'indice de Ljapunov majore $-(2/d)\log(r)$.

Démonstration. — On part de l'inégalité $\log(r) \geqslant \overline{\lim}\left(\frac{1}{n}\log(\langle \mathcal{C}^n 1, 1\rangle)\right)$; par un calcul immédiat utilisant la propriété de cocycle du module de quasi-invariance a, c'est-à-dire $a(g_2 g_1, \xi) = a(g_1, \xi)a(g_2, g_1\xi)$, on prouve que

$$\mathcal{C}^n\Psi(g, \xi) = \int a^{1/2}(g_n \dots g_1, \xi)\Psi(g_n, g_n \dots g_1\xi)q_g(dg_1, \dots, dg_n)$$

où

$$q_g(dg_1, \dots, dg_n) = N(g, dg_1)N(g_1, dg_2) \dots N(g_{n-1}, dg_n);$$

la mesure

$$\int_{SL} q_g \mu(dg)$$

n'étant rien d'autre que la probabilité marginale $(M_1, \dots, M_n)Q$ du processus de Markov M_n, on obtient :

$$-\log(r) \leqslant \underline{\lim}\left(-(1/n)\log\int_{\Gamma\times P} a^{1/2}(M_n \dots M_1, \xi)dQ\omega(d\xi)\right),$$

puis en utilisant 1.6,

$$-\log(r) \leqslant \underline{\lim}\left(-(1/n)\log\int \| M_n \dots M_1 \|^{-d/2}dQ\right)$$

et enfin, d'après l'inégalité de Jensen,

$$-\log(r) \leqslant \underline{\lim}\left((d/2)\int(1/n)\log(\| M_n \dots M_1 \|)dQ\right);$$

pour terminer il suffit de remarquer que la dernière intégrale converge vers J puisque $(1/n)\log(\| M_n \dots M_1 \|)$ tend presque sûrement vers J (le théorème de Lebesgue est applicable à cause de l'hypothèse H_0).

2.3. Il est temps d'introduire l'hypothèse essentielle de ce travail :

(H_1) l'unité est un point isolé du spectre de l'opérateur N et le projecteur spectral $E_{(\{1\})}$ correspondant est la projection sur le sous-espace de $L^2(\mu)$ formé des fonctions constantes.

2.4. THÉORÈME. — Les hypothèses H_0 et H_1 étant vérifiées, supposons que l'indice de Ljapunov J soit nul ; il existe alors une famille μ-mesurable $\pi(g)$, $g \in \mathrm{SL}$, de probabilités sur P telle que $\pi(g) = (g')^{-1}\pi(g')$ pour α-presque tout couple (g, g').

Démonstration. — Comme d'après le lemme 2.2 le rayon spectral de $\mathscr{T}$ vaut 1, il existe un point λ du spectre de $\mathscr{T}$ dont le module soit 1. On sait que l'alternative suivante est une conséquence facile de la définition du spectre : ou bien il existe une suite φ_n de vecteurs de norme 1 appartenant à $L^2(\mu \otimes \omega)$ tels que $\| \mathscr{T}\varphi_n - \lambda\varphi_n \|$ converge vers 0, ou bien l'opérateur $(\mathscr{T} - \lambda I)$ a une image non dense; mais on peut ici se désintéresser de la deuxième éventualité : en effet si il existe un vecteur φ de norme 1 orthogonal à cette image on a $\langle \mathscr{T}\varphi, \varphi \rangle = \lambda \langle \varphi, \varphi \rangle = \lambda$, donc $\mathscr{T}\varphi$ doit être colinéaire à φ puisque $|\lambda| = 1$ et $\| \mathscr{T}\varphi \| \leqslant 1$, d'où $\mathscr{T}\varphi = \lambda\varphi$.

Dire que $\| \mathscr{T}\varphi_n - \lambda\varphi_n \|$ converge vers 0 revient à dire, puisque $\mathscr{T}$ est une contraction, que $\langle \mathscr{T}\varphi_n, \varphi_n \rangle$ converge vers λ; posant $\psi_n = |\varphi_n|$ ceci implique immédiatement que $\langle \mathscr{T}\psi_n, \psi_n \rangle$ converge vers 1, c'est-à-dire que l'intégrale

$$I_n = \int \alpha(dg, dg') \int a^{1/2}(g', \xi)\psi_n(g, \xi)\psi_n(g', g'\xi)\omega(d\xi)$$

converge vers 1.

Soit $f_n(g) = \left(\int \psi_n^2(g, \xi)\omega(d\xi) \right)^{1/2}$; f_n est de norme 1 dans $L^2(\mu)$ donc, en supposant que l'on a choisi un représentant de f_n qui ne s'annule pas, la formule

$$y_n(g, \xi) = (f_n(g))^{-1}\psi_n(g, \xi)$$

définit une fonction normalisée de $L^2(\omega)$. Introduisons aussi

$$J_n(g, g') = \int a^{1/2}(g', \xi)y_n(g, \xi)y_n(g', g'\xi)\omega(d\xi) ;$$

en appliquant l'inégalité de Schwarz, compte tenu de la quasi-invariance de ω, on obtient $J_n(g, g') \leqslant 1$ pour μ-presque tout g, μ-presque tout g', c'est-à-dire $\| J_n \| \leqslant 1$ dans l'espace $L^\infty(\alpha)$. D'autre part, toujours d'après l'inégalité de Schwarz, $\| f_n \otimes f_n \| \leqslant 1$, cette fois dans $L^1(\alpha)$; la convergence de $I_n = \int f_n(g)f_n(g')J_n(g, g')\alpha(dg, dg')$ vers 1 implique donc la convergence de la norme de $f_n \otimes f_n$ dans $L^1(\alpha)$ vers 1. Cette norme est d'ailleurs égale au produit scalaire $\langle Nf_n, f_n \rangle$ et on va obtenir une convergence bien plus forte :

2.5. LEMME. — La suite de fonctions f_n tend vers 1 dans $L^2(\mu)$.

Démonstration. — Il nous suffit d'établir que $\langle f_n, 1 \rangle$ converge vers 1 ; en supposant le contraire, on peut extraire une sous-suite $\tilde{f}_n$ telle que $c_n = \langle \tilde{f}_n, 1 \rangle$ converge vers un nombre $c < 1$; on voit alors que la norme $\| \tilde{f}_n - c_n \|$ tend vers $(1 - c^2)^{1/2}$ et si l'on pose

$$u_n = \| \tilde{f}_n - c_n \|^{-1} (\tilde{f}_n - c_n),$$

que $\langle N u_n, u_n \rangle$ tend vers 1 et que u_n est orthogonal à la fonction 1. D'autre part, comme $L^2(\mu)$ est somme directe de ses sous-espaces $\mathbb{C}1$ et $1^\perp$ qui sont tous deux stables par N, le spectre de N contient le spectre σ' de la restriction N' de N à $1^\perp$; en outre σ' contient 1 puisque la convergence de u_n vers 1 implique celle de $\| N u_n - u_n \|$ vers 0 ; enfin 1 étant isolé dans σ', définit un projecteur spectral non nul $E'_{(\{1\})}$ (voir [*1*], p. 573), ce qui contredit l'hypothèse H_1 puisque $E_{(\{1\})} = E'_{(\{1\})} + \langle \cdot, 1 \rangle 1$.

2.6. Suite de la démonstration du théorème 2.4.

On déduit du lemme que $f_n \otimes f_n$ converge vers 1 dans $L^1(\alpha)$, ce qui entraîne, en reportant dans l'expression de I_n que $\int J_n(g, g')\alpha(dg, dg')$ tend vers 1 ; on peut donc par extraction de sous-suites se ramener au cas où J_n et f_n ont presque partout pour limite 1, par rapport aux mesures α et μ respectivement.

Introduisons des mesures de probabilité sur P par la formule $\rho_n(g, d\xi) = y_n^2(g, \xi)\omega(d\xi)$; si $\| \cdot \|$ désigne la norme de la variation totale des mesures on a :

$$\| \rho_n(g) - (g')^{-1}\rho_n(g') \| = \int | y_n^2(g, \xi) - a(g', \xi) y_n^2(g', g'\xi) | \, \omega(d\xi)$$

ou encore, en posant pour simplifier $v_n(g', \xi) = a^{1/2}(g', \xi) y_n(g', g'\xi)$,

$$= \int | y_n(g) - v_n(g') | \, | y_n(g) + v_n(g') | \, d\omega$$

$$\leqslant 2\left(\int (y_n(g) - v_n(g'))^2 d\omega\right)^{1/2} = 2^{3/2}(1 - J_n(g, g'))^{1/2} ;$$

ainsi on voit que $\rho_n(g) - (g')^{-1}\rho_n(g')$ converge vers 0 sauf sur un ensemble α-négligeable. La fin de la démonstration est fournie par le lemme suivant :

2.7. LEMME. — Soit une suite $\rho_n(g)$ de fonctions μ-mesurables à valeurs dans l'ensemble des probabilités sur le compact P. On peut alors construire une autre suite $\pi_n(g)$ telle que :

1° pour tout n, la fonction π_n est combinaison convexe d'un nombre fini de fonctions ρ_p d'indices $p \geqslant n$, 2° pour μ-presque tout g, la suite de probabilités $\pi_n(g)$ converge vaguement vers une probabilité $\pi(g)$.

Démonstration. — Fixons une suite q_i de fonctions continues sur P qui soit dense dans l'espace de Banach $\mathscr{C}(\mathrm{P})$; pour chaque i fixé considérons la suite de fonctions $n \to z_{i,n}$ définie par :

$$z_{i,n}(g) = \int q_i(\xi)\rho_n(g, d\xi) ;$$

cette suite étant bornée dans $L^2(\mu)$ contient une sous-suite qui converge faiblement dans cet espace; par un procédé diagonal on peut donc se ramener au cas où pour tout i la suite (en n) $z_{i,n}$ converge faiblement dans $L^2(\mu)$.

Ceci revient à dire qu'on considère une suite z_n dans l'espace localement convexe $Z = (L^2(\mu))^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement dans cet espace vers un certain élément u de coordonnées u_i. Par le théorème de Hahn-Banach on peut trouver une suite x_n convergeant fortement vers u telle que x_n soit une combinaison convexe d'un nombre fini de z_p d'indices p majorant n (car l'enveloppe convexe de l'ensemble des z_p, $p \geqslant n$, admet la même fermeture au sens faible qu'au sens fort). Il existe manifestement des probabilités $\pi(g)$ sur P telles que, pour tout i, $\pi(g, q_i) = u_i(g)$ pour presque tout g, et de même des probabilités $\pi_n(g)$ vérifiant $\pi_n(g, q_i) = x_{n,i}(g)$. Par des extractions successives de sous-suites, on peut s'assurer que pour tout i, la suite de fonctions $x_{n,i}$ converge vers u_i presque partout et non plus seulement dans $L^2(\mu)$, ce qui implique que $\pi_n(g)$ converge pour la topologie vague vers $\pi(g)$, pour presque tout g.

2.8. Introduisons une nouvelle hypothèse :

(H_2) les seules fonctions de $L^2(\mu)$ qui soient invariantes par l'opérateur N^*N sont les constantes.

Comme N est une contraction, H_2 est vraie si et seulement si l'égalité $\| N\psi \| = \| \psi \|$ implique que ψ est une constante. La forme adoptée plus haut pour cette hypothèse permet de la vérifier plus aisément (voir plus bas 2.11), suivant une suggestion de Mokobodzki.

2.9. Lemme. — L'hypothèse H_2 est vérifiée si et seulement si aucune égalité $\varphi(g) = \psi(g')$ ne peut être vraie en dehors d'un ensemble négligeable pour α sans que φ et ψ soient des constantes (essentiellement par rapport à μ).

Démonstration. — Partons de H_2 et soient φ et ψ deux éléments normalisés de $L^2(\mu)$ tels que $\int(\varphi(g) - \psi(g'))^2\alpha(dg, dg') = 0$; on a alors

$$0 = 2 - \int \varphi(g)\psi(g')\alpha(dg, dg') = 2\left(1 - \int \varphi(g)N(g, \psi)\mu(dg)\right);$$

on en tire que $\| N(g, \psi) \| > 1$, donc que ψ est constante. Pour la réciproque, on part de $\| \psi \| = \| N\psi \|$, on pose $\varphi = N\psi$ et on procède en sens inverse (on peut toujours supposer ψ réel).

De ce lemme et du théorème 2.4 découle immédiatement le *critère de Furstenberg :*

2.10. THÉORÈME. — Supposons que les hypothèses H_0, H_1, H_2 sont vérifiées et qu'il n'existe aucune probabilité sur P qui soit invariante par toute transformation appartenant au support de μ. Alors J est strictement positif.

Remarques. — 1° On peut en particulier appliquer ce critère dans le cas simple où le groupe fermé engendré par le support de μ est égal à SL. De plus Furstenberg a montré que, pour toute probabilité π sur SL, le groupe des matrices unimodulaires conservant π est compact ou possède un sous-groupe d'index fini réductible, c'est-à-dire laissant invariant un sous-espace propre de $\mathbb{R}^d$; ce qui fournit un critère plus approfondi (dont une application est donnée dans [*8*]).

2° Le théorème 2.4 peut permettre de conclure que J est non nul sans que l'hypothèse H_2 soit vérifiée ; par exemple, supposons que le support S de μ est un ensemble fini et qu'une partie I de S possède la propriété suivante : d'un élément quelconque de $(I \times I) \cap (\text{supp}(\alpha))$ on peut passer à tout autre par des changements successifs de l'une ou l'autre coordonnée, les points intermédiaires restant dans le support de α (toujours dans le cas où S est fini H_2 équivaut en fait à cette propriété exprimée pour $I = S$) ; alors la nullité de J implique, d'après le théorème 2.4, qu'il existe π invariante par tout g appartenant à I, ce qui peut être contradictoire.

Pour la vérification pratique des diverses hypothèses, nous disposons du résultat suivant :

2.11. PROPOSITION. — 1° Soit K le noyau markovien

$$(1/2)\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}(N + N^*)^n$$

et soit aussi

$$\tilde{K} = (1/2)\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(N^*N)^n ;$$

si, pour μ-presque tout g, la mesure $\mu(d\gamma)$ est absolument continue par rapport à $K(g, d\gamma)$, (respectivement : par rapport à $\tilde{K}(g, d\gamma)$), l'opérateur N agit ergodiquement dans $L^2(\mu)$ (respectivement : l'hypothèse H_2 est vérifiée).

2° Supposons qu'il existe un entier p, un réel $b > 0$, une fonction h appartenant à $L^2(\mu \otimes \mu)$ et un noyau positif $R(g, dg')$ tels que

$$N^p(g, dg') = h(g, g')dg' + R(g, dg')$$

et que

$$\int R(g, dg') \leqslant 1 - b, \qquad \mu\text{-presque partout};$$

l'hypothèse H_1 équivaut alors à l'ergodicité.

Démonstration. — Si une fonction f de $L^2(\mu)$ est invariante par N, elle est aussi invariante par N* (d'après les relations

$$\langle f, N^*f \rangle = \langle Nf, f \rangle = \langle f, f \rangle \geqslant \| f \| \; \| N^*f \|)$$

donc par K. On note que, si f est invariante par K, il en est de même de f^+, ce qui permet de se ramener au cas où f est positive (*a priori* $Kf^+ \leqslant f^+$, mais l'égalité découle de la relation $\int Kf^+ d\mu = \int f^+ d\mu$). Soit C le convexe faiblement compact formé des fonctions de $L^2(\mu)$ qui sont positives, d'intégrale 1 et invariantes par K ; pour établir la première partie de la proposition, il suffit de montrer que tout point extrémal f de C est égal à 1 ; supposons le contraire. La fonction $f' = \inf(f, 1)$ est une fonction invariante et on est sûr alors que l'intégrale α de f' est strictement comprise entre 0 et 1 ; comme on peut écrire

$$f = \alpha\left(\frac{f'}{\alpha}\right) + (1 - \alpha)\frac{f - f'}{1 - \alpha},$$

l'hypothèse d'extrémalité impose $f' = \alpha f$, ce qui n'est possible que si f ne prend que les valeurs 0 et $(1/\alpha)$. Or, d'après la formule

$$f(g) = \int f(\gamma)K(g, d\gamma)$$

et l'hypothèse sur K, la fonction f doit être strictement positive presque partout. On aboutit donc à une contradiction.

Pour démontrer l'assertion du 2°, on va établir que sous ses hypothèses, 1 n'appartient pas au spectre de la restriction de N à $1^{\perp}$, ce qui impliquera H_1. Si l'on suppose le contraire, il existe une suite ψ_n de fonctions normalisées et orthogonales à 1 telle que $\| \psi_n - N\psi_n \|$ converge vers 0 (en utilisant le même argument qu'au début de la démonstration du théorème 2.4). Il est clair que $\| \psi_n - N^p\psi_n \|$ converge aussi vers 0, et donc que $\| N^p\psi_n \|$ tend vers 1. D'autre part, en extrayant une sous-suite, on peut se ramener au cas où la suite ψ_n admet une limite faible ψ dans $L^2(\mu)$; on a alors $N\psi = \psi$, et, comme la valeur propre 1 est simple, ψ est une constante qui ne peut être que 0, puisque ψ est orthogonale à 1. Par hypothèse, l'opérateur H défini par le noyau fonction h est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc un opérateur compact (voir [*11*], p. 210); par conséquent la suite $H\psi_n$ tend *fortement* vers 0. On aboutit a une contradiction puisque $N^p\psi_n = H\psi_n + R\psi_n$ et que de plus $\| R\psi_n \| \leqslant 1 - b$ (le concept utilisé ici est celui d'opérateur quasi-compact, qu'on trouve dans [*6*], p. 200).

2.12. COROLLAIRE. — Le critère de Furstenberg est applicable si la mesure α est égale au produit de $\mu \otimes \mu$ par une fonction strictement positive et bornée.

Remarque. — Pastur a donné une méthode pour démontrer la stricte positivité de J pour des chaînes de Markov de matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; mais ses calculs semblent nécessiter des hypothèses plus fortes que celles proposées ici (voir [*10*]).

§ 3. COMPLÉMENT SUR L'INDICE DE LJAPUNOV

3.1. Dans son article [*2*], Furstenberg a également étudié le comportement de la norme du vecteur aléatoire $M_n \dots M_0 x$ lorsqu'on a fixé un vecteur x dans $\mathbb{R}^d$; ses résultats et méthodes se généralisent facilement au cas markovien et même trouvent là leur cadre naturel comme nous allons l'indiquer ci-dessous ; nous rappellerons simplement les grandes lignes de sa démonstration en signalant les détails qu'il faut modifier. Introduisons une autre hypothèse :

(H_3) la mesure μ est irréductible ; autrement dit, aucun sous-espace non trivial de $\mathbb{R}^d$ n'est laissé invariant par le groupe fermé qu'engendre le support de μ.

Les deux résultats qui suivent ne dépendent pas de l'hypothèse H_1.

3.2. THÉORÈME. — Sous les hypothèses H_0, H_2, H_3, pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^d$, la variable aléatoire $(1/n) \log (\| M_n \ldots M_0 x \|)$ converge presque sûrement vers J lorsque n tend vers l'infini.

La démonstration de ce théorème (voir plus bas) suggère d'énoncer des résultats d'un type un peu différent ; supposons donné un noyau $N(g, dg')$ sur une partie compacte K de SL (qu'on pourrait évidemment prolonger en un noyau sur SL tout entier si l'on voulait avoir une notation parfaitement cohérente avec le reste de l'article) ; supposons aussi que N transforme toute fonction continue sur K en une fonction continue sur K, que N possède une probabilité invariante *unique* μ et enfin que sont vérifiées les hypothèses H_2 et H_3.

3.3. THÉORÈME. — Sous les conditions précédentes, soit Z_n un processus de Markov (qu'on ne suppose pas stationnaire) à valeurs dans K et admettant N pour noyau de transition ; alors $(1/n) \log (\| Z_n \ldots Z_0 x \|)$ converge presque sûrement vers J pour x non nul.

3.4. PRINCIPE DE DÉMONSTRATION. — On commence par supposer que le point de départ x est lui-même aléatoire ou, plus précisément, est une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $\mathbb{R}^d - 0$, globalement indépendante des M_n pour $n \geqslant 1$ (on exclut M_0) ; autrement dit, on munit $\Gamma \times (\mathbb{R}^d - 0)$ d'une probabilité en formant le produit d'une mesure de probabilité sur $SL \times (\mathbb{R}^d - 0)$ par la mesure image canonique de Q sur $SL^{(\mathbb{N}-0)}$. On pose $X_n = M_{n-1} \ldots M_0 X_0$ et on considère la classe ξ_n de X_n dans l'espace projectif. On voit alors que le couple (M_n, ξ_n) est un processus de Markov de noyau de transition

$$\mathcal{N}(g, \xi, dg', d\xi') = N(g, dg') \otimes \varepsilon(g\xi, d\xi'),$$

où ε désigne la mesure de Dirac au point $g\xi$. Le noyau $\mathcal{N}$ admet des probabilités invariantes ; pour le voir, on note que l'ensemble des probabilités sur $SL \times P$ qui se projettent suivant μ est un convexe compact invariant par $\mathcal{N}$ lorsqu'on le munit de la topologie de la convergence simple pour la dualité avec les fonctions de $L^1(\mu, \mathscr{C}(P))$, topologie que m'a signalé Ledrappier. Choisissons la loi de (M_0, ξ_0) comme étant un point extrémal Π du convexe des probabilités invariantes par $\mathcal{N}$ et se projetant suivant μ ; le processus (M_n, ξ_n) est alors stationnaire et ergodique ; en appliquant le théorème ergodique, on obtient la convergence presque sûre de $(1/n) \log (\| X_n \|)$, qui est égal à

$$(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} \log (\| M_k X_k \| / \| X_k \|) + (1/n) \log (\| X_0 \|)$$

vers la constante

$$J_\Pi = \int_{SL \times P} \rho(g, \xi) \Pi(dg, d\xi)$$

où ρ est la fonction provenant par passage au quotient de la fonction $\| gx \| / \| x \|$ (on note la relation $a = \rho^{-d}$, fondamentale pour la démonstration par Furstenberg de son critère).

Pour continuer, l'essentiel est de prouver que J_Π ne dépend pas de Π ; on remarque pour cela que l'ensemble des éléments (g, x) tels que $(1/n) \log (\| M_n \dots M_1 gx \|)$ tende presque sûrement vers J_Π a une image dans $SL \times P$ dont la mesure pour Π vaut 1 ; ce qui va permettre de montrer que J_Π majore tout autre $J_{\Pi'}$, compte tenu de la propriété suivante : soit π_g une désintégration de Π selon la première projection et V_g le plus petit sous-espace projectif portant π_g, alors μ-presque sûrement $V_g = P$; cette propriété se démontre comme suit : de l'invariance de la mesure Π par $\mathcal{N}$ et du lemme 2.9, on déduit que V_g ne dépend pas de g, ce qui conduit à $V_g = P$ à cause de l'irréductibilité de μ.

Pour terminer on montre que si le théorème 3.2 était faux on pourrait construire, en utilisant des moyennes de Césaro convenables (voir [*2*], p. 409 et suivantes), une probabilité Π invariante et se projetant suivant μ telle que J_Π s'écarte de la valeur commune mise en évidence auparavant (qu'on identifie à l'indice de Ljapunov) ; cette construction utilise en particulier le fait que l'espace $L^1(\mu, \mathscr{C}(P))$, qui s'identifie à un espace de fonctions sur $SL \times P$, est laissé invariant par $\mathcal{N}$, ce qui permet de construire Π comme forme linéaire sur cet espace. Pour le théorème 3.3 la méthode est la même, mais pour finir on trouve Π comme forme linéaire sur $\mathscr{C}(SL \times K)$, en se servant du fait que $(1/n) \sum_{k=0}^{n} f(Z_k)$ converge presque sûrement vers $\mu(f)$ pour toute fonction continue f sur K.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, New York, John Wiley and Sons, 2^e^ édition, t. **1**, 1964.

[2] H. FURSTENBERG, Noncommuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **108**, 1963, p. 377-428.

[3] H. FURSTENBERG, H. KESTEN, Products of random matrices. *Ann. Math. Statis.*, t. **31**, 1960, p. 457-469.

[4] I. YA. GOL'DSHTEIN, S. A. MOLCHANOV, L. A. PASTUR, A pure point spectrum of the stochastic one-dimensional Schrödinger operator. *Funct. Anal. Appl.*, t. **11-1**, 1977, p. 1-10.

[5] Y. GUIVARC'H, Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires. École d'été de probabilités de Saint-Flour, 1978. *Lectures notes in mathematics*, Berlin, Springer *(à paraître)*.

[6] S. KAKUTANI, Y. YOSIDA, Operator-theoretical treatment of Markoff's process. *Ann. Math.*, t. **42**-1, 1941, p. 188-228.

[7] H. KUNZ, B. SOUILLARD *(travaux à paraître)*.

[8] K. ISHII, H. MATSUDA, Localisation of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain. *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, t. **45**, 1970, p. 56-86.

[9] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Paris, Masson, 1964.

[10] L. A. PASTUR, Spectre des matrices de Jacobi aléatoires et équations de Schrödinger aléatoires sur l'axe entier. Preprint, institut des basses températures, *Akad. Nauk. Ukr. S. S. R.*, 1974, non publié.

[11] M. REED, B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, t. **1**, New York, Academic Press, 1972.

[12] D. RUELLE, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*. Preprint I. H. E. S., 1978, Bures-sur-Yvette, France.

Note. — Les trois articles suivants me furent signalés après une première diffusion du présent travail. Ils contiennent des études de l'indice de Ljapunov pour des produits markoviens de matrices et le troisième de ces articles est très proche du mien. Les méthodes de démonstration sont cependant assez différentes.

[13] S. A. MOLČANOV, The structure of eigenfunctions of one-dimensional unordered structures. *Math. U. S. S. R. Izvestija*, vol. **12**-1, 1978, p. 69-101.

[14] Y. GUIVARC'H, Marches aléatoires à pas markovien. *C. R. Acad. Scien.*, Paris, 1979.

[15] A. D. VIRSTER, Sur les produits de matrices et les opérateurs aléatoires. *Th. of Proba. and Appl.*, t. **24-2**, 1979, p. 361-370.

(Manuscrit reçu le 23 novembre 1979)