ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ÉTIENNE CARNAL

Indépendance conditionnelle permutable

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, nº 1 (1980), p. 39-47
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_1_39_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 1, 1980, p. 39-47.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Indépendance conditionnelle permutable

par

Étienne CARNAL

Département de Mathématiques,
École Polytechnique Fédérale Lausanne, avenue de Cour 61, 1007 Lausanne, Suisse.

RÉSUMÉ. — Si une suite de variables aléatoires $\{ X_1, X_2, \dots \}$ est telle que pour chaque sous-ensemble fini d'indices $\{ i_1, i_2, \dots, i_n \}$, la suite $\{ X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n} \}$ forme une chaîne de Markov, alors elle est indépendante conditionnellement à la tribu $\bigcap_i \sigma \{ X_i \}$.

SUMMARY. — If a sequence $\{ X_1, X_2, \dots \}$ of random variables has the property that for each finite set of indices $\{ i_1, i_2, \dots, i_n \}$, the sequence $\{ X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n} \}$ is a Markov chain, then it is conditionally independent given the σ-algebra $\bigcap_i \sigma \{ X_i \}$.

1. INTRODUCTION

Nous étudions essentiellement le problème suivant : étant données trois variables aléatoires X, Y, Z sur un espace de probabilité (Ω, Σ, P), à valeurs dans les espaces mesurables respectifs $(E_i, \mathscr{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$, quelles restrictions impose le système d'indépendances conditionnelles :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \text{X indép. de } Y \mid Z \\ \text{Y indép. de } Z \mid X \\ \text{Z indép. de } X \mid Y\ ? \end{cases}$$

Dans le cas dénombrable, nous noterons

$$p(i, j, k) = \mathrm{P}\{ \mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j, \mathrm{Z} = k \},$$

$(i, j, k) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_3$ dénombrable. Si nous supposons $p(i, j, k) > 0$ $\forall (i, j, k)$, les relations (I) nous permettent d'écrire sans autres

$$p(i \mid j, k) = p(i \mid j', k) = p(i \mid j', k')$$

$\forall i \in \mathrm{E}_1, j, j' \in \mathrm{E}_2, k, k' \in \mathrm{E}_3$, si nous mettons $p(i \mid j, k)$ pour

$$\mathrm{P}\{ \mathrm{X} = i \mid \mathrm{Y} = j, \mathrm{Z} = k \}.$$

Ceci nous permet facilement de conclure à l'indépendance de X, Y, Z.

Qu'en est-il si on lève la condition de positivité dans le cas dénombrable ? Y a-t-il une réponse dans le cas général ? Peut-on donner une hypothèse de positivité dans le cas général qui impliquerait l'indépendance ?

Si nous supposons X, Y, Z de distribution conjointe normale, centrées, de variance 1, avec $\mathrm{E(XY)} = a$, $\mathrm{E(YZ)} = b$, $\mathrm{E(XZ)} = c$, le système (I) se ramène aux équations $c = ab$, $a = bc$, $b = ac$ qui imposent soit la dépendance stricte, soit l'indépendance. La réponse générale comporte ces deux alternatives comme ses deux extrêmes.

DÉFINITION. — Soit $\{ \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots \}$, une suite finie ou infinie de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ à valeurs dans des espaces mesurables $(\mathrm{E}_i, \mathscr{E}_i)$ quelconques et $\mathscr{A}_i = \sigma\{ \mathrm{X}_i \}$, $i = 1, 2, \ldots$ les sous-tribus associées. On dira que la suite des X_i a la *propriété d'indépendance conditionnelle permutable* si pour tout i et pour tous sous-ensembles finis d'indices I_1 et I_2, on a l'indépendance conditionnelle de $\sigma\{ \mathrm{X}_k, k \in \mathrm{I}_1 \}$ et $\sigma\{ \mathrm{X}_k, k \in \mathrm{I}_2 \}$ par rapport à $\mathscr{A}_i$.

Remarque. — Il revient au même de dire que pour tout sous-ensemble fini d'indices $\{ i_1, i_2, \ldots, i_n \}$, la suite $\{ \mathrm{X}_{i_1}, \mathrm{X}_{i_2}, \ldots, \mathrm{X}_{i_n} \}$ forme une chaîne de Markov.

Le résultat principal s'énonce de la façon suivante :

THÉORÈME 1. — Si $\{ \mathrm{X}_i \}_{i \in \mathrm{I}}$ est une suite finie ou dénombrable de variables aléatoires, il y a équivalence entre les deux affirmations :

i) les X_i ont la propriété d'indépendance conditionnelle permutable,

ii) les X_i sont indépendantes conditionnellement à la tribu $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathscr{A}_i$.

Nous donnerons la démonstration de ce théorème au paragraphe 5, après avoir étudié le cas particulier du système (I) aux paragraphes 3 et 4 ;

au n° 3 nous traitons le cas de variables à valeurs dénombrables à part, pour lequel nous préciserons la nature de la tribu de conditionnement. Nous commençons par rappeler certaines règles sur l'indépendance conditionnelle, particulièrement utiles dans ce contexte :

2. RÈGLES SUR L'INDÉPENDANCE CONDITIONNELLE

Dans ce qui suit, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{F}$, ... sont des sous-tribus d'une σ-algèbre Σ et nous écrirons $\mathscr{A}$ indép. $\mathscr{B} \mid \mathscr{F}$ pour exprimer l'indépendance conditionnelle de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ par rapport à $\mathscr{F}$.

Le lemme suivant est issu de la liste de règles sur l'indépendance conditionnelle donnée par Hunt [*1*] :

LEMME 1. —

i) $\qquad \mathscr{A}$ indép. de $\mathscr{B} \mid \mathscr{F}$

$\qquad \Rightarrow \mathscr{A} \vee \mathscr{F}$ indép. de $\mathscr{B} \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{F}$

ii) $\qquad \mathscr{A}$ indép. de $\mathscr{B} \mid \mathscr{F} \vee \sigma(\mathscr{C})$

dès que $\mathscr{C} \subset \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$.

Les règles suivantes permettent d'affaiblir le conditionnement, la première étant tirée de McKean [*2*], la deuxième ayant une démonstration immédiate :

LEMME 2. —

i) $\qquad \mathscr{A}$ indép. de $\mathscr{B} \mid \mathscr{F}_i, \ \mathscr{F}_i \subset \mathscr{B}, \qquad i = 1, 2$

$\qquad \Rightarrow \mathscr{A}$ indép. de $\mathscr{B} \mid \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$

ii) $$\left.\begin{array}{l} \mathscr{A} \text{ indép. de } \mathscr{B} \mid \mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2 \\ \mathscr{A} \text{ indép. de } \mathscr{F}_2 \mid \mathscr{F}_1 \end{array}\right\}$$

$\qquad \Rightarrow \mathscr{A}$ indép. de $\mathscr{B} \vee \mathscr{F}_2 \mid \mathscr{F}_1$

3. CAS DE VARIABLES DISCRÈTES

Nous donnons un énoncé détaillé dans cette situation, qui découle d'une démonstration plus constructive, mais qui équivaut en fait à celui que nous donnons plus bas dans le cas général :

PROPOSITION 1. — Si X, Y, Z sont à valeurs dans les ensembles dénombrables respectifs E_1, E_2, E_3, le système (I) implique l'existence de partitions $\{ A_n \}$, $\{ B_n \}$, $\{ C_n \}$, $n = 1, 2, \ldots$ de E_1, E_2, E_3 telles que *i*) si $F_n = A_n \times B_n \times C_n$ et μ est la mesure induite par (X, Y, Z) sur $E_1 \times E_2 \times E_3$, μ est concentrée sur $\bigcup_{n=1}^{\gamma} F_n$.

ii) Si $D_n = X^{-1}(A_n)$ et $\mathscr{D} = \sigma\{ D_n, n = 1, 2, \dots \}$, alors X, Y et Z sont indépendantes conditionnellement à la tribu $\mathscr{D}$ ou, ce qui revient au même, leurs restrictions à D_n sont indépendantes $\forall n$.

Démonstration. — On suppose

$$\begin{aligned} P\{X = i\} &> 0 \qquad \forall i \in E_1, \\ P\{Y = j\} &> 0 \qquad \forall j \in E_2, \\ P\{Z = k\} &> 0 \qquad \forall k \in E_3, \end{aligned}$$

ce qui n'enlève rien à la généralité.

On choisit un élément quelconque i_1 dans E_1. On dira que (A, B, C) possède la propriété (P_1) si

i) $$A \subset E_1, \qquad B \subset E_2, \qquad C \subset E_3$$

ii) $$i_1 \in A$$

iii) $$p(i, j, k) > 0 \qquad \forall (i, j, k) \in A \times B \times C.$$

Soit τ_1 l'ensemble des triplets (A, B, C) possédant la propriété (P_1). On ordonne τ_1 par inclusion.

$$P\{X = i_1\} > 0 \Rightarrow \exists j_1 \in E_2, k_1 \in E_3$$

tels que

$$p(i_1, j_1, k_1) > 0 \Rightarrow (\{i_1\}, \{j_1\}, \{k_1\}) \in \mathscr{F}_1.$$

On peut donc appliquer le lemme de Zorn à $(\tau_1, \subset)$.

Notons (A_1, B_1, C_1) l'élément maximal.

Soit $i_2 \in E_1 \backslash A_1$. On construit (A_2, B_2, C_2) comme (A_1, B_1, C_1), puis (A_n, B_n, C_n), $n = 3, 4, \dots$ par récurrence.

Soit $i \in A_n$ et $j \in E_2$, $k \in E_3$ tels que $p(i, j, k) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 < p(k \mid i, j) &= p(k \mid i) \\ &= p(k \mid i, j') \qquad \forall j' \in B_n \\ &= p(k \mid i', j') \qquad \forall i' \in A_n, j' \in B_n \end{aligned}$$

car ces deux dernières expressions ont un sens. On en déduit que

$$p(i', j', k) > 0 \qquad \forall i' \in A_n, j' \in B_n$$

donc $k \in C_n$ par maximalité. On montre de même que $j \in B_n$. On déduit de ce qui précède que les A_n (resp. B_n, C_n) sont disjoints et par conséquent qu'ils forment une partition de E_1 (resp. E_2, E_3), par maximalité et de plus, que $p(i, j, k) > 0$ si et seulement si $\exists n$ tel que $i \in A_n$, $j \in B_n$, $k \in C_n$, ce qui donne la conclusion *i*).

Soit maintenant $(i, j, k) \in A_n \times B_n \times C_n$, n fixé.

$$\begin{aligned} p(k \mid i, j) &= p(k \mid i) = p(k \mid j) \\ &= p(k \mid j, i_n) = p(k \mid i_n) \\ &= a(k), \end{aligned}$$

une fonction de k, indépendamment de i et j.

De même :

$$\begin{aligned} p(j \mid k) &= p(j \mid i) = b(j), \\ p(i \mid j) &= p(i \mid k) = c(i). \end{aligned}$$

On en déduit par exemple :

$$P\{ Z = k, X = i \} = a(k) \cdot P\{ X = i \}.$$

En sommant dans les deux membres sur tous les $i \in A_n$:

$$P\{ Z = k, X \in A_n \} = a(k) \cdot P\{ X \in A_n \}.$$

Mais par ce qui précède,

$$P\{ Z = k, X \in A_n \} = P\{ Z = k \},$$

d'où :

$$a(k) = P\{ Z = k \}/P\{ X \in A_n \}.$$

Si l'on pose $D_n = X^{-1}(A_n)$ ($= Y^{-1}(B_n) = Z^{-1}(C_n)$, à des ensembles négligeables près), on a :

$$a(k) = P\{ Z = k \}/P(D_n)$$

et de même :

$$\begin{aligned} b(j) &= P\{ Y = j \}/P(D_n), \\ c(i) &= P\{ X = i \}/P(D_n). \end{aligned}$$

La conclusion *ii*) suit immédiatement.

On démontre très facilement la réciproque :

PROPOSITION 2. — Les conditions *i*) et *ii*) entraînent la validité du système (I).

Exemples. — 1. Si X, Y, Z sont indépendantes, avec les hypothèses du début de la démonstration de la proposition 1, le support de μ (définie dans la conclusion *i*) de la même proposition) est l'espace $E_1 \times E_2 \times E_3$ entier. Donc $A_1 = E_1$, $B_1 = E_2$, $C_1 = E_3$ est la partition triviale et $D_1 = \Omega$ engendre la tribu triviale dans Σ.

2. Si $X = Y = Z$ à valeurs dans E ($= E_1 = E_2 = E_3$) dénombrable, alors le support de μ est l'intersection des plans bissecteurs dans E^3, formée

des points (i, i, i), $i \in E$. La tribu $\mathscr{D}$ est la même que la tribu engendrée par X (ou Y ou Z) dans Σ.

3. Soient R_n les fonctions de Rademacher.

Mettons $$\varphi = \frac{1}{2}(1 + R_1).$$

Si on pose :

$$X = \varphi \cdot R_2, \qquad Y = \varphi \cdot R_3, \qquad Z = \varphi \cdot R_4,$$

on vérifie facilement (I). $A_1 = B_1 = C_1 = \{-1, +1\}$,

$$A_2 = B_2 = C_2 = \left\{ -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\}, \qquad D_1 = \left[0, \frac{1}{2} \right], \qquad D_2 = \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$$

sont les différentes partitions impliquées dans la proposition 1.

4. CAS GÉNÉRAL

Nous donnons directement un résultat sur des tribus quelconques :

PROPOSITION 3. — Soit (Ω, Σ, P) un espace de probabilité quelconque et $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ des sous-tribus de Σ.

Alors si

$$\text{(II)} \begin{cases} \mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \mid \mathscr{C}, \\ \mathscr{B} \text{ indép. } \mathscr{C} \mid \mathscr{A}, \\ \mathscr{C} \text{ indép. } \mathscr{A} \mid \mathscr{B}, \end{cases}$$

on a aussi $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ indépendantes $\mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$.

Démonstration. —

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \mid \mathscr{C} \\ \mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{C} \mid \mathscr{B} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{(par le lemme 1.}i\text{)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \mid \mathscr{C} \\ \mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \mid \mathscr{B} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{(par le lemme 2 } i\text{)}$$

$$\mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \mid \mathscr{B} \cap \mathscr{C}.$$

Soit $E \in \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$:

$$\mathscr{B} \text{ indép. } \mathscr{C} \mid \mathscr{A}$$

$$\Leftrightarrow P(B \cap C \mid \mathscr{A}) \overset{\text{P. s.}}{=} P(B \mid \mathscr{A}) \cdot P(C \mid \mathscr{A}) \qquad \forall B \in \mathscr{B}, \quad C \in \mathscr{C}.$$

En prenant en particulier $B = C = E$:

$$P(E \mid \mathscr{A})^2 \overset{\text{P. s.}}{=} P(E \mid \mathscr{A}) \text{ ; donc}$$

$P(E \mid \mathscr{A})$ prend essentiellement les deux valeurs 0 et 1, ou $P(E \mid \mathscr{A}) \overset{\text{P. s.}}{=} 1_{\tilde{E}}$ pour un $\tilde{E} \in \mathscr{A}$. Mais

$$\int_{\tilde{E}} 1_E = \int_{\tilde{E}} 1_{\tilde{E}} \quad \text{et} \quad \int_{\complement\tilde{E}} 1_E = \int_{\complement\tilde{E}} 1_{\tilde{E}}$$

donnent $P(E \,\Delta\, \tilde{E}) = 0$. On en déduit :

$$(\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \vee \mathscr{N} = (\mathscr{B} \cap \mathscr{C} \cap \mathscr{A}) \vee \mathscr{N}$$

si $\mathscr{N}$ est la tribu des ensembles P-négligeables. D'où :

$$\mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$$
$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \overset{\text{P. s.}}{=} P(A \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \cdot P(B \cap C \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C})$$
$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad B \in \mathscr{B}, \quad C \in \mathscr{C}.$$

Les tribus ayant des rôles symétriques, on a de même

$$\mathscr{B} \text{ indép. } \mathscr{A} \vee \mathscr{C} \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$$
$$\Rightarrow P(B \cap C \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \overset{\text{P. s.}}{=} P(B \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \cdot P(C \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C})$$

d'où la conclusion.

On a immédiatement la réciproque :

PROPOSITION 4. — Si $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ sont indépendantes conditionnellement à la tribu $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$, alors (II) est vérifié.

Démonstration. — Par exemple :

$$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C} \text{ indép.} \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$$
$$\Rightarrow \mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \mid \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C} \Rightarrow \text{(par le lemme 1.}ii\text{)}$$
$$\mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \mid \mathscr{C}$$
$$\Rightarrow \mathscr{A} \text{ indép. } \mathscr{B} \mid \mathscr{C}$$

Dans les exemples suivants, on a posé $\mathscr{A} = \sigma(X)$, $\mathscr{B} = \sigma(Y)$, $\mathscr{C} = \sigma(Z)$:

Exemples. — 1. Si X, Y, Z sont les trois variables à valeurs dénombrables de la proposition 1, la tribu $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ est exactement la tribu $\mathscr{D}$ engendrée par les $X^{-1}(A_n)$ (ou les $Y^{-1}(B_n)$ ou les $Z^{-1}(C_n)$) : il suffit pour le voir de refaire la démarche de la première partie de la démonstration de la proposition 1 pour construire la tribu $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$. La proposition 3 est donc bien la généralisation de la proposition 1.

2. Soient X, Y, Z indépendantes à valeurs dans $(E_i, \mathscr{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$ respectivement. Alors $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ est la tribu triviale.

3. Si $X = Y = Z$ à valeurs dans $(E, \mathscr{E})$, alors $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C} = \mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathscr{C}$.

COROLLAIRE. — Soient X, Y, Z trois variables aléatoires sur (Ω, Σ, P) à valeurs dans les espaces mesurables respectifs $(E_i, \mathscr{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$ quelconques, μ_i étant les mesures induites sur ceux-ci par les variables correspondantes et μ_{12} étant la mesure induite sur $(E_1 \times E_2, \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2)$ par (X, Y). Si X, Y, Z vérifient (I) et que de plus $\mu_1 \otimes \mu_2 \sim \mu_{12}$, alors X, Y, Z sont indépendantes.

Démonstration. — Si $\mathscr{A} = \sigma(X)$, $\mathscr{B} = \sigma(Y)$, $\mathscr{C} = \sigma(Z)$, alors $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ satisfont (II), d'où

$$X, Y, Z \text{ indép. } | \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{C} .$$

Mais l'hypothèse d'équivalence des mesures fait que $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ est la tribu triviale (aux ensembles négligeables près). En effet, s'il existe $F \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ avec $0 < P(F) = \alpha < 1$, alors $F = X^{-1}(A) = Y^{-1}(B)$ et $\mu_{12}(A \times \complement B) = 0$; mais puisque $\mu_{12} \sim \mu_1 \otimes \mu_2$: $\mu_1(A) \cdot \mu_2(\complement B) = 0$. Or $\mu_1(A) = \alpha$ et $\mu_2(\complement B) = 1 - \alpha$: contradiction.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

1° *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Soient j et k fixés, i quelconque dans I; la proposition 3 entraîne que

$$\mathscr{A}_j \text{ indép. } \mathscr{A}_k \,|\, \mathscr{A}_j \cap \mathscr{A}_k \cap \mathscr{A}_i .$$

Comme $\mathscr{A}_j \cap \mathscr{A}_k \cap \mathscr{A}_i \subset \mathscr{A}_k$ et que ceci est vrai pour tout i, on a, en utilisant le lemme 2.*i*) :

$$\mathscr{A}_j \text{ indép. } \mathscr{A}_k \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{A}_i$$

dès que $N > \max \{ j, k \}$. On en déduit par un théorème de convergence de martingales que

$$\text{(1)} \qquad \mathscr{A}_j \text{ indép. de } \mathscr{A}_k \,\Big|\, \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i \qquad \forall j, k \in I .$$

Soient maintenant $k_1, k_2, \ldots, k_n \in I$. Il faut démontrer que pour tout choix d'ensembles mesurables $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P\left\{ X_{k_1} \in A_1, X_{k_2} \in A_2, \ldots, X_{k_n} \in A_n \,\Big|\, \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i \right\} \overset{\text{p.s.}}{=} \prod_{r=1}^{n} P\left\{ X_{k_r} \in A_r \,\Big|\, \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i \right\} .$$

Or il résulte de la définition que

$$\text{(2)} \qquad \mathscr{A}_{k_1} \text{ indép. de } \bigvee_{r=2}^{n} \mathscr{A}_{k_r} \,|\, \mathscr{A}_{k_2} .$$

De plus, (1) donne

$$\mathscr{A}_{k_1} \text{ indép. de } \mathscr{A}_{k_2} \mid \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i . \tag{3}$$

Le lemme 2.*ii*) combiné avec (2) et (3) entraîne :

$$\mathscr{A}_{k_1} \text{ indép. } \bigvee_{r=2}^{n} \mathscr{A}_{k_r} \mid \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i .$$

On a la conclusion par récurrence.

2° *ii*) $\Rightarrow$ *i*) Immédiat : *ii*) $\Rightarrow$

$$X_i, \quad \sigma\{X_k, k \in I_1\}, \qquad \sigma\{X_k, k \in I_2\} \text{ indép. } \mid \bigcap_{j \in I} \mathscr{A}_j$$
$$\Rightarrow \sigma\{X_k, k \in I_1\} \text{ indép. } \sigma\{X_k, k \in I_2\} \mid \mathscr{A}_i .$$

COROLLAIRE. — Pour que la suite $X_1, X_2, \ldots$ ait la propriété d'indépendance conditionnelle permutable, il suffit que celle-ci soit une chaîne de Markov et que de plus chaque triplet $\{X_i, X_j, X_k\}$ ait la propriété d'indépendance conditionnelle permutable.

Démonstration. — Il suffit de constater que la démonstration du théorème 1 n'utilise que ces hypothèses dans la partie *i*) $\Rightarrow$ *ii*).

Remarque. — Il est facile alors de donner des conditions supplémentaires imposant l'indépendance, par exemple la trivialité de la σ-algèbre de queue dans le cas d'une suite infinie, ou alors une condition du type intervenant dans le corollaire de la proposition 4.

RÉFÉRENCES

[*1*] G. A. HUNT, *Martingales et processus de Markov*, Dunod, Paris, 1966.

[*2*] H. P. MCKEAN, Brownian motion with a several-dimensional time. *Th. of. Prob. and Appl.*, t. **8**, 1963, p. 335-354.

(Manuscrit reçu le 30 octobre 1979)