ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

N. BOULEAU

Une remarque sur le schéma de Bernoulli et quelques extensions

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, nº 1 (1980), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVI, n° 1, 1980, p. 1-16. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Une remarque sur le schéma de Bernoulli et quelques extensions

par

N. BOULEAU

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique
Plateau de Palaiseau 91128 Palaiseau Cedex, France
Laboratoire de recherche associé au C. N. R. S., n° 169

RÉSUMÉ. — Étant donné un schéma de Bernoulli unilatère d'espace d'état $E = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, on montre que l'isomorphisme classique qui associe à une trajectoire un réel de $]0, 1]$ par le biais de son développement p-adique, donne de certaines mesures bornées de masse totale nulle, des mesures images remarquablement simples. On en déduit un théorème de convergence et on étudie diverses extensions de ce résultat.

§ 1. SCHÉMA DE BERNOULLI

Soit $\mathscr{E}$ la tribu des parties de E et soit q une probabilité sur $(E, \mathscr{E})$ différente de la masse unité en 0. On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = (E, \mathscr{E}, q)^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. On note x_n les applications coordonnées. Si Ω_0 est l'ensemble des trajectoires ω telles que $x_n(\omega)$ soit non nul pour une infinité de valeurs de n, on a $\Omega_0 \in \mathscr{F}$ et $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. On se restreint à Ω_0, on prend les traces de $\mathscr{F}$, $\mathbb{P}$ et la restriction des x_n et on note encore $(\Omega_0, \mathscr{F}, x_n, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé obtenu.

L'application χ de $(\Omega_0, \mathscr{F})$ dans $(]0, 1], \mathscr{B}(]0, 1]))$ définie par

$$\chi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n(\omega)}{p^{n+1}}$$

est bijective et bimesurable. Par abus de notation, la mesure sur]0, 1] image de $\mathbb{P}$ par χ sera notée encore $\mathbb{P}$. Le symbole $\mathbb{E}[\,.\,]$ désigne l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$. On note enfin θ l'opérateur de translation défini par $x_n \circ \theta(\omega) = x_{n+1}(\omega)$ qui est transporté par χ en l'application $x \rightsquigarrow px$ mod. 1 de]0, 1] dans lui-même, qui sera encore notée θ. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathrm{R}(x)$ *un polynôme sur* $\mathbb{R}$ *tel que* $\int_0^1 \mathrm{R}d\mathbb{P} = 0$

a) $\forall g \in \mathrm{L}^1(\Omega_0, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *la série*

$$\mathrm{S}(g, \mathrm{R}) = \sum_{k=0}^{\infty} \int g \circ \theta^k . \mathrm{R}d\mathbb{P}$$

est absolument convergente ;

b) *Soit* $\mathrm{Q}(x)$ *un polynôme sur* $\mathbb{R}$ *de polynôme dérivé* $\mathrm{Q}'(x)$, $\forall g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega_0, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} n \int \mathrm{Q}\left[\frac{1}{n}\sum_{m<n} g \circ \theta^m\right]\mathrm{R}d\mathbb{P} = \mathrm{Q}'(\mathbb{E}[g]).\mathrm{S}(g, \mathrm{R}).$$

Démonstration. — Considérons la fonction $f(u, x) = \dfrac{e^{ux}}{\mathbb{E}[e^{ux}]}$, $u \in \mathbb{C}$, $x \in]0, 1]$. On voit facilement que $\mathbb{E}[e^{ux}] \neq 0$ si $|\operatorname{Im} u| \leq \pi$, il en résulte que $f(u, x)$ est holomorphe dans un ouvert contenant la bande $|\operatorname{Im} u| \leq \pi$ et que le développement

$$f(u, x) = 1 + u\mathrm{K}_1(x) + \ldots + \frac{u^n}{n!}\mathrm{K}_n(x) + \ldots$$

est absolument convergent dans le disque $|u| \leq \pi$. Notons $\mathscr{G}_n$ les tribus $\sigma\{x_m, m \geq n\}$. De

$$x = \sum_{x\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{p^{n+1}},$$

on déduit

$$\mathbb{E}[e^{ux} \mid \mathscr{G}_1] = \mathbb{E}[e^{ux_0/p}]e^{ux/p} \circ \theta$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[\frac{e^{ux}}{\mathbb{E}[e^{ux}]}\middle| \mathscr{G}_1\right] = \frac{e^{ux/p} \circ \theta}{\mathbb{E}[e^{ux/p}]},$$

c'est-à-dirc

$$\mathbb{E}[f(u, x) \mid \mathscr{G}_1] = f\left(\frac{u}{p}, x\right) \circ \theta$$

et de même

$$\mathbb{E}[f(u, x) \mid \mathscr{G}_n] = f\left(\frac{u}{p^n}, x\right) \circ \theta.$$

La fonction $f(u, x)$ étant uniformément bornée dans le disque $|u| \leq \pi$ on obtient en dérivant sous le signe d'espérance :

$$\mathbb{E}[\mathrm{K}_m(x) \mid \mathscr{G}_n] = \frac{1}{p^{mn}} \mathrm{K}_m(x) \circ \theta^n . \tag{1.1}$$

On établit facilement par récurrence que les $\mathrm{K}_m(x)$ sont des polynômes en x de degré m, de coefficient de x^m égal à 1 et tels que $\mathbb{E}[\mathrm{K}_m(x)] = 0 \; \forall m \geq 1$. Tout polynôme d'espérance nulle est donc une combinaison linéaire finie des $\mathrm{K}_m(x)$ et le *a*) découle immédiatement de la formule (1.1).

Pour le *b*) nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit* $g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega_0, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *et soient* R *un polynôme d'espérance nulle et* $h_{k,n}(\omega)$ *une famille de variables* $\mathscr{G}_k$*-mesurables telles que* $\| h_{k,n} \|_1 \leq a$ $\forall k, n$ *et vérifiant* $\forall k \lim_{n\to\infty} h_{k,n} = 0$ *dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ *alors on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int (g \circ \theta^k - \mathbb{E}[g]) h_{k,n} \mathrm{R} d\mathbb{P} = 0 .$$

Démonstration. — On a :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int (g \circ \theta^k - \mathbb{E}[g]) h_{k,n} . \mathrm{R} d\mathbb{P} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int (g \circ \theta^k - \mathbb{E}[g]) h_{k,n} \mathbb{E}[\mathrm{R} \mid \mathscr{G}_k] d\mathbb{P} \right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} 2 \| g \|_\infty \| h_{k,n} \|_1 \frac{c}{p^k}$$

où la constante c est égale à $|\alpha_1| \| \mathrm{K}_1 \|_\infty + \ldots + |\alpha_j| \| \mathrm{K}_j \|_\infty$ si $\mathrm{R} = \alpha_1 \mathrm{K}_1 + \ldots + \alpha_j \mathrm{K}_j$ est la décomposition du polynôme R en fonction des $(\mathrm{K}_n)_{n\geq 0}$. Le lemme résulte alors facilement de l'hypothèse $\| h_{k,n} \|_1 \leq a$.

Reprenons la démonstration du théorème 1 et écrivons le polynôme Q sous la forme

$$\mathrm{Q}(x) = \mathrm{Q}(\mathbb{E}[g]) + (x - \mathbb{E}[g])\mathrm{Q}'(\mathbb{E}[g]) + \ldots + \frac{(x - \mathbb{E}[g])^l}{l!} \mathrm{Q}^{(l)}(\mathbb{E}[g]) .$$

On a :

$$n \int \mathrm{Q}\left(\frac{1}{n} \sum_{m<n} g \circ \theta^m\right) \mathrm{R} d\mathbb{P} = \mathrm{Q}'(\mathbb{E}[g]) \int \sum_{m<n} g \circ \theta^m \mathrm{R} d\mathbb{P}$$
$$+ \frac{\mathrm{Q}''(\mathbb{E}[g])}{2n} \int \left[\sum_{m<n} (g \circ \theta^m - \mathbb{E}[g]) \right]^2 \mathrm{R} d\mathbb{P} + \ldots$$
$$+ \frac{\mathrm{Q}^{(l)}(\mathbb{E}[g])}{l! n^{l-1}} \int \left[\sum_{m<n} (g \circ \theta^m - \mathbb{E}[g]) \right]^l \mathrm{R} d\mathbb{P} .$$

Il faut donc montrer que tous les termes après le premier tendent vers zéro quand $n \to \infty$. Faisons-le pour le dernier qui a la forme générale : Écrivons :

$$\Big[\sum_{m<n}(g\circ\theta^m - \mathbb{E}[g])\Big]^l = l\sum_{\substack{m_1<m_i\\ \forall i\geq 2}}(g\circ\theta^{m_1} - \mathbb{E}[g])\prod_{i=2}^{l}(g\circ\theta^{m_i} - \mathbb{E}[g])$$

$$+ C_l^2\sum_{\substack{m_1<m_i\\ \forall i\geq 2}}(g\circ\theta^{m_1} - \mathbb{E}[g])^2\prod_{i=2}^{l-1}(g\circ\theta^{m_i} - \mathbb{E}[g])$$

$$+ \dots$$

$$+ C_l^{l-1}\sum_{m_1<m_2}(g\circ\theta^{m_1} - \mathbb{E}[g])^{l-1}(g\circ\theta^{m_2} - \mathbb{E}[g])$$

$$+ \sum_{m_1}(g\circ\theta^{m_1} - \mathbb{E}[g])^l .$$

La contribution du premier terme est

$$\frac{Q^{(l)}(\mathbb{E}[g])}{(l-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\int(g\circ\theta^k - \mathbb{E}[g])\Big[\frac{1}{n}\sum_{m=k+1}^{n-1}(g\circ\theta^m - \mathbb{E}[g])\Big]^{l-1}\mathrm{R}d\mathbb{P}$$

expression qui tend vers zéro d'après le lemme appliqué à

$$h_{k,n} = \Big[\frac{1}{n}\sum_{m=k+1}^{n-1}(g\circ\theta^m - \mathbb{E}[g])\Big]^{l-1} .$$

On procède de même pour les contributions des autres termes, le raisonnement est d'ailleurs plus simple et n'utilise que le *a*) du théorème.

Remarques 1. — Dans le cas particulier où la mesure q est équirépartie et donc que $\mathbb{P}$ est la mesure de Lebesgue sur $]0, 1]$, le théorème reste valable si R est remplacé par une fonction höldérienne sur $]0, 1]$ quelconque d'espérance nulle. En effet si

$$\sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ |x-y|\leq\delta}} |\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(y)| \leq \mathrm{A}\delta^\alpha$$

on peut voir que $\|\mathbb{E}[\mathrm{R}\,|\,\mathcal{G}_n] - \mathbb{E}[\mathrm{R}]\|_\infty \leq \mathrm{A}\dfrac{1}{p^{n\alpha}}$.

2. — Dans le cas général le théorème avec g bornée s'étend aux fonctions R

de la forme $R = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n$ si les a_n sont tels que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| . |K_n(x)| \in L^1(\mathbb{P})$.
L'étude des coefficients des polynômes K_n permettrait de préciser la classe de fonctions obtenues.

Exemples 1. — Notons $N(j, n, x), j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, n \in \mathbb{N}, x \in]0, 1]$, le nombre de j dans le développement p-adique de x jusqu'à l'ordre n. La formule (1.1) donne avec $g(\omega) = 1_{\{x_0 = j\}}$ et $K_1(x) = x - \dfrac{\Sigma iq(i)}{p-1}$

$$S(g, K_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[g \cdot \frac{K_1}{p^k}\right] = \frac{q(j)}{p-1}(j - \Sigma iq(i)).$$

On a donc en prenant $Q(x) = x^k$

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{[N(j, n, x)]^k}{n^{k-1}}\left(x - \frac{\Sigma iq(i)}{p-1}\right)d\mathbb{P} = \frac{k(q(j))^k}{p-1}(j - \Sigma iq(i)).$$

2. — On prend pour q la répartition uniforme et donc $\mathbb{P}$ est la mesure de Lebesgue et pour R d'après les remarques ci-dessus la fonction $f(u, x) - 1$ pour $u = i\pi$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{[N(j, n, x)]^k}{n^{k-1}} \cos \pi x dx = \frac{2k}{\pi p^{k-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(p-1-2j)\pi/2p^{m+1} \sin \pi/2p^{m+1}}{\sin \pi/2p^m}$$

en particulier si $p = 2$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{[N(0, n, x)]^k}{n^{k-1}} \cos \pi x dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{[N(0, n, x)]^k - [N(1, n, x)]^k}{n^{k-1}} \cos \pi x dx = \frac{k}{2^{k-1}\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{m+2}}.$$

3. — Prenons pour g l'application $\omega \to x(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k(\omega)}{p^{k+1}}$. Si nous notons $\overline{y}$ la partie fractionnaire d'un réel y on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} g \circ \theta^m = \frac{1}{n}(x + \overline{px} + \ldots + \overline{p^{n-1}x}),$$

on en déduit comme ci-dessus :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{(x + \overline{2x} + \ldots + \overline{2^{n-1}x})^k}{n^{k-1}} \cos \pi x dx = \frac{k}{2^{k-1}\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{m+2}}.$$

§ 2. TENDANCES

Nous introduisons pour la commodité le vocabulaire suivant : nous appellerons *tendance* sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ une mesure bornée de masse totale nulle. On dira qu'une famille $(\mathscr{A}_i)_{i\in}$ de sous-tribus de $\mathscr{A}$ est *autonome* relativement à une probabilité $\mathbb{P}$ et une tendance $\mathbb{T}$ si pour toute famille finie d'ensembles $A_{i_k} \in \mathscr{A}_{i_k}$, $k = 1, \ldots, n$ on a :

$$\mathbb{T}\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right] = \mathbb{T}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{T}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n) + \ldots + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{T}(A_n)$$

Des variables aléatoires seront dites autonomes si les tribus engendrées sont autonomes. (Elles peuvent être $\mathbb{P}$-indépendantes ou non). Si nous considérons à nouveau le schéma de Bernoulli du § 1, sur l'espace $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ la tendance $\mathbb{T} = K_1 . \mathbb{P} = (x - \mathbb{E}(x)). \mathbb{P}$ est telle que les coordonnées x_n sont autonomes relativement à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{T}$. De plus la loi $\mathbb{T}_{(x_n)}$ de x_n pour $\mathbb{T}$ vérifie $\mathbb{T}_{(x_n)} = \left(\frac{1}{p}\right)^n \mathbb{T}_{(x_0)}$. Nous dirons dans ce cas que les variables x_n sont $\frac{1}{p}$ équi-distribuées pour $\mathbb{T}$. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}, \mathbb{T})$ *un espace muni d'une probabilité* $\mathbb{P}$ *et d'une tendance* $\mathbb{T}$, *et soit* X_n *une suite de variables aléatoires réelles, autonomes, équidistribuées pour* $\mathbb{P}$ *et* λ*-équidistribuées pour* $\mathbb{T}$ *avec* $|\lambda| < 1$. *On suppose* X_0 $\mathbb{P}$*-intégrable et* $|\mathbb{T}|$*-intégrable. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{T}[\varphi(S_n)] = \frac{\mathbb{T}[X_0]}{1-\lambda}\varphi'(\mathbb{E}[X_0]) \qquad \forall\varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$$

où $S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} X_m$ *et où l'espace* $\mathscr{B}_{1,1}$ *est défini ci-dessous.*

Nous noterons suivant Hörmander [*1*] $\mathscr{B}_{p,s}$ l'espace des distributions $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\hat{u}$ est une fonction telle que

$$\| u \|_{p,s} = \left[\frac{1}{2\pi}\int |(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)|^p d\xi\right]^{1/p} < \infty \qquad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

et $\| u \|_{\infty,s} = \operatorname{ess\,sup} |(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)| < \infty$ si $p = \infty$.

$\mathscr{B}_{p,s}$ est un espace de Banach pour la norme $\| \,.\, \|_{p,s}$ et pour $1 \leq p < \infty$ l'espace $\mathscr{S}$ est dense dans $\mathscr{B}_{p,s}$ et le dual de $\mathscr{B}_{p,s}$ est $\mathscr{B}_{q,-s}$ où q est l'exposant conjugué de p (cf. [*1*] th. 2.2.9).

En particulier l'espace $\mathscr{B}_{1,1}$ est l'espace des distributions $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ telles que $\hat{u}$ et $(\mathrm{D}u)\hat{}$ soient dans L^1, alors u et sa dérivée première sont des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini.

LEMME 4. — *Soit μ_n une suite de mesures bornées sur $\mathbb{R}$, si les transformées de Fourier $\hat{\mu}_n$ convergent Lebesgue — presque partout vers ψ en restant majorées en module par une fonction de la forme $c(1 + \xi^2)^{s/2}$, il existe une distribution unique $\mathrm{T} \in \mathscr{B}_{\infty,-s}$ telle que $\mu_n \to \mathrm{T}$ pour $\sigma(\mathscr{B}_{\infty,-s}, \mathscr{B}_{1,s})$ et $\hat{\mathrm{T}} = \psi$.*

Démonstration. — L'espace $\mathscr{B}_{1,s}$ étant séparable, toute partie bornée de son dual $\mathscr{B}_{\infty,-s}$ est d'adhérence compacte métrisable pour $\sigma(\mathscr{B}_{\infty,-s}, \mathscr{B}_{1,s})$. Soit T une valeur d'adhérence de la suite μ_n qui bornée dans $\mathscr{B}_{\infty,-s}$ d'après l'hypothèse, il existe une sous-suite n_k telle que $\mu_{n_k} \to \mathrm{T}$ pour $\sigma(\mathscr{B}_{\infty,-s}, \mathscr{B}_{1,s})$ en particulier $\langle \mu_{n_k}, \varphi \rangle \to \langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathscr{S}$ d'où l'on déduit $\langle \hat{\mu}_{n_k}, \varphi \rangle \to \langle \hat{\mathrm{T}}, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathscr{S}$ donc d'après l'hypothèse par le théorème de convergence dominée $\hat{\mathrm{T}} = \psi$.

Il en résulte que la suite μ_n n'a qu'une valeur d'adhérence donc converge d'où le lemme.

Démonstration de la proposition 3. — Nous suivons les notations de [*1*] pour la transformée de Fourier. On a $(\mathbb{T}_{(\mathrm{S}_n)})\hat{}(\xi) = \mathbb{T}\,[e^{-i\xi(\mathrm{X}_0 + \ldots + \mathrm{X}_{n-1})/n}]$. Ce qui vaut puisque les variables X_m sont autonomes, λ-équidistribuées pour $\mathbb{T}$ et équidistribuées pour $\mathbb{P}$:

$$= \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} (\mathbb{T}_{(\mathrm{X}_0)})\hat{}\left(\frac{\xi}{n}\right) \cdot \left[(\mathbb{P}_{(\mathrm{X}_0)})\hat{}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right]^n$$

Le fait que X_0 soit $|\,\mathbb{T}\,|$-intégrable entraîne que $(\mathbb{T}_{(\mathrm{X}_0)})\hat{}(\xi)$ est de classe C^1 bornée ainsi que sa dérivée. Comme $(\mathbb{T}_{(\mathrm{X}_0)})\hat{}(0) = 0$, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|(\mathbb{T}_{(\mathrm{X}_0)})\hat{}(\xi)| \leq k\,|\,\xi\,|$. On en déduit que $n(\mathbb{T}_{(\mathrm{X}_0)})\hat{}\left(\frac{\xi}{n}\right) \to -i\xi\mathbb{T}\,[\mathrm{X}_0]$ en rentrant dominé par $k\,|\,\xi\,|$. De même le fait que X_0 soit $\mathbb{P}$-intégrable entraîne que $\left[(\mathbb{P}_{(\mathrm{X}_0)})\hat{}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right]^{n-1} \to \exp(-i\xi\mathbb{E}\,[\mathrm{X}_0])$ en rentrant dominé par 1. De sorte que

$$n(\mathbb{T}_{(\mathrm{S}_n)})\hat{}(\xi) \to \frac{-i}{1-\lambda}\,\xi\mathbb{T}\,[\mathrm{X}_0]\exp(-i\xi\mathbb{E}\,[\mathrm{X}_0])$$

en rentrant dominé en module par $2k\,|\,\xi\,|$ d'où le résultat par le lemme 4.

Une question naturelle se pose qui est de savoir s'il peut exister sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}, \mathbb{T})$ où $\mathbb{P}$ est une probabilité et $\mathbb{T}$ une tendance, une suite de variables autonomes à la fois équidistribuées pour $\mathbb{P}$ et pour $\mathbb{T}$, la réponse est négative sauf cas trivial :

PROPOSITION 5. — *Soit sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *une probabilité* π *et une tendance* τ, *le système projectif*

$$\begin{aligned} &\tau \otimes \pi \otimes \ldots \otimes \pi \\ &+ \pi \otimes \tau \otimes \ldots \otimes \pi \\ &+ \ldots \\ &+ \pi \otimes \pi \otimes \ldots \otimes \tau \end{aligned} \tag{5.1}$$

défini sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A})^{\mathbb{N}}$ *ne peut être à variation bornée que si* $\tau = 0$.

Démonstration. — Elle est inspirée de [2] exercice IV.1. Soit q une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $\pi \ll q$ et $|\tau| \ll q$. Posons $f = \frac{d\pi}{dq}$, $g = \frac{d\tau}{dq}$, notons X_n les applications coordonnées de $\Omega^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ et notons $\mathbb{Q}$ la probabilité $q^{\otimes \mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathscr{A})^{\mathbb{N}}$; dire que (5.1) est à variation bornée revient à dire que la $(\mathscr{F}_n, \mathbb{Q})$-martingale M_n définie par

$$M_n = g(X_0)f(X_1) \ldots f(X_n) + \ldots + f(X_0) \ldots f(X_{n-1})g(X_n)$$

vérifie $\sup_n . \mathbb{Q}[\,|M_n|\,] < \infty$.

Supposons cette condition réalisée et considérons la probabilité

$$\mathbb{P} = \pi^{\otimes \mathbb{N}} \text{ et } N_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{g(X_i)}{f(X_i)} 1_{\{f>0\}}(X_i).$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_n^+] = \sup_{H \in \mathscr{F}_n} \mathbb{P}[N_n 1_H] &= \sup_{H \in \mathscr{F}_n} \mathbb{Q}[1_H(g(X_0)1_{\{f>0\}}(X_0)f(X_1) \ldots f(X_n) + \ldots \\ &\quad + f(X_0) \ldots f(X_{n-1})g(X_n)1_{\{f>0\}}(X_n))] \\ &= \sup_{H \in \mathscr{F}_n} \mathbb{Q}[1_H . 1_{\{f>0\}}(X_0) \ldots 1_{\{f>0\}}(X_n) . M_n] \leq \mathbb{Q}[M_n^+] \end{aligned}$$

et de même $\mathbb{P}[N_n^-] \leq \mathbb{Q}[M_n^-]$ de sorte que $\sup_n \mathbb{P}[\,|N_n|\,] < \infty$. Or N_n est une surmartingale, une martingale ou une sous-martingale intégrable pour $(\mathscr{F}_n, \mathbb{P})$ selon que $\int g 1_{\{f>0\}}\, dq$ est > 0, $= 0$, ou < 0. Donc N_n converge $\mathbb{P}$ presque sûrement vers N_∞ $\mathbb{P}$-intégrable. Or $\mathbb{P}[N_\infty - N_n \,|\, \mathscr{F}_n] = a_n$ constante, alors le fait que $\mathbb{P}[N_\infty \,|\, \mathscr{F}_n] \to N_\infty$ presque sûrement et dans $L^1(\mathbb{P})$ entraîne que $a_n \to 0$ et donc que $N_n \to N_\infty$ dans $L^1(\mathbb{P})$. On a donc

$\mathbb{P}[\,|\,N_{n+1} - N_n\,|\,] \to 0$ donc $\int |\,g\,|\, 1_{\{f>0\}} dq = 0$. Les ensembles $\{ f > 0 \}$ $\{ g > 0 \}$ $\{ g < 0 \}$ sont disjoints q p. s. ; si $F_i = \{ f(X_i) > 0 \} \cup \{ g(X_i) > 0 \}$, M_n est positive sur $\bigcap_{i=0}^{n} F_i$, $\mathbb{Q}$ p. s. donc : $\mathbb{Q}[M_n^+] \geq \int_{\bigcap_{i=0}^{n} F_i} M_n d\mathbb{Q} = \frac{n}{2} \int |\,g\,|\, dq$ d'où $\int |\,g\,|\, dq = 0$, c. q. f. d.

Des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ peuvent être équidistribuées pour $\mathbb{P}$ et autonomes équidistribuées par rapport à un système projectif de tendances. Ce cas donne lieu à des théorèmes limite comme à la proposition 3. Le résultat suivant rentre dans ce cadre. La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.

PROPOSITION 6. — *Soient sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *une suite* X_n *de variables réelles indépendantes équidistribuées possédant une moyenne* μ *et une variance* σ^2. *On pose* $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$. *Alors :* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(Y_n - n\mu)\varphi\left(\frac{1}{n} Y_n\right)\right] = \sigma^2 \varphi'(\mu), \forall \varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$.

REMARQUE. — Dans le cas particulier de la proposition 6, une méthode directe permet d'obtenir le résultat et même de l'étendre aux fonctions φ boréliennes possédant une dérivée $\varphi'(\mu)$ au point μ et telles que $\varphi(\mu + h) = \varphi(\mu) + h\varphi'(\mu) + h\varepsilon(h)$ pour une fonction ε bornée telle que $\varepsilon(h) = 0(h^\alpha)$ pour un $\alpha > 0$. Nous ne ferons qu'esquisser la démonstration : posons $S_n = Y_n - n\mu$, il suffit de montrer que $(S_n^2/n)\varepsilon(S_n/n) \to 0$ dans L^1. Or d'après [*2*] proposition VII.2.4, cette convergence a lieu au sens presque sûr, et le résultat provient alors du fait que les variables S_n^2/n sont équiintégrables comme il résulte de l'inégalité de Burkholder appliquée à la martingale S_n.

§ 3. UTILISATION DES FORMULES EXPONENTIELLES

Considérons la réalisation canonique d'une suite de variables réelles indépendantes équidistribuées, c'est-à-dire que $\mathbb{P} = \pi^{\otimes \mathbb{N}}$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ et les X_n sont les applications coordonnées et posons $Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$.

La suite $M_n = \exp(uY_n - n\phi(u))$ où $\phi(u) = \operatorname{Log} \mathbb{E}[\exp uX_0]\, u \in \mathbb{R}$ est une $(\mathscr{F}_n, \mathbb{P})$ martingale intégrable, si $(\mathscr{F}_n)$ est la filtration naturelle, dès que le réel u est dans l'ensemble $\{ \phi < \infty \}$. Cf. [*2*], § IV.4.

Elle définit donc une probabilité $\mathbb{P}_u$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que la densité de $\mathbb{P}_u$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathscr{F}_n$ soit $M_n(u)$.

Si $u \neq 0$ $\mathbb{P}_u$ et $\mathbb{P}$ sont étrangères et pour $\mathbb{P}_u$ les variables X_n sont encore indépendantes équidistribuées de sorte que si φ est continue bornée :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_u\left[\varphi\left(\frac{1}{n}Y_n\right)\right] = \varphi(\mathbb{E}_u[X_0])$$

ou encore

$$(7.1)\quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp(uY_n - n\phi u)\varphi\left(\frac{1}{n}Y_n\right)\right] = \varphi(\mathbb{E}[X_0 \exp(uX_0 - \phi(u))]).$$

Si l'on dérive formellement les deux membres par rapport au paramètre u au point $u = 0$, on obtient la formule de la proposition 6.

Pour la dérivation d'ordre supérieur la proposition suivante indique une classe de fonctions φ pour lesquelles la dérivation formelle est possible :

PROPOSITION 7. — *Si X_0 possède des moments jusqu'à l'ordre $k+1$, la dérivation formelle jusqu'à l'ordre k de la formule (7.1) en $u = 0$ est licite si $\varphi \in \mathscr{B}_{1,k}$ (espace de fonctions de classe C^k).*

Pour $k = 2$ on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[((Y_n - nE_1)^2 - nE_2)\varphi\left(\frac{1}{n}Y_n\right)\right] = E_3\varphi'(E_1) + E_2^2\varphi''(E_1) \qquad \forall\varphi\in\mathscr{B}_{1,2}$$

où $E_1 = \mathbb{E}[X_0]$, $E_2 = \mathbb{E}[(X_0 - E_1)^2]$, $E_3 = \mathbb{E}[(X_0 - E_1)^3]$.

Démonstration. — La fonction ϕ est toujours définie sur un voisinage de zéro si u est imaginaire pur. Les dérivées formelles de $\exp(ux - u\phi(u))$ en $u = 0$ peuvent donc s'écrire

$$f_k(n, x) = \frac{1}{(-i)^k}\frac{\partial^k}{\partial v^k}\exp(-ivx - n\phi(-iv))\big|_{v=0}$$

$f_k(n, x)$ est un polynôme de degré k en x dont les coefficients ne font intervenir que les k premiers moments de X_0. On a en effet la récurrence

$$\begin{aligned} f_k(n, x) = xf_{k-1}(n, x) - nE_1 f_{k-1}(n, x) - nC_{k-1}^1 E_2 f_{k-2}(n, x) - \dots \\ - nC_{k-1}^{p-1} E_p f_{k-p}(n, x) - \dots - nE_k \end{aligned}$$

où les nombres E_i, $i = 1, \dots, k$ ne dépendent que des moments de X_0 jusqu'à l'ordre k et sont donnés par récurrence par la condition :

$$\mathbb{E}[f_k(1, X_0)] = 0 \qquad k \geq 1$$

a) Montrons que si X_0 a des moments, jusqu'à l'ordre $k+1$, les fonctions

$$h_n(\xi) = \mathbb{E}[f_k(n, Y_n)e^{-i\xi Y_n/n}]$$

sont les transformées de Fourier de distribution bornées dans $\mathscr{B}_{\infty,-k}$, c'est-à-dire qu'il existe c tel que $| h_n(\xi) | \leq c(1 + \xi^2)^{k/2}$.

Posons $\chi(\xi) = \mathbb{E}[e^{-i\xi X_0}]$, et remarquons que $h_n(\xi)$ est au facteur $(-1)^k$ près la k-ième dérivée en $v = 0$ de la fonction :

$$\mathbb{E}\left[\frac{e^{-ivY_n}}{\mathbb{E}[e^{-ivY_n}]} \cdot e^{-i\xi Y_n/n}\right] = \left[\frac{\chi(v + \xi/n)}{\chi(v)}\right]^n$$

Si X_0 a des moments, jusqu'à l'ordre $k + 1$, χ est de classe C^{k+1} à dérivées jusqu'à l'ordre $k + 1$ bornées. Si nous posons $\varphi(v, \xi) = \dfrac{\chi(v + \xi)}{\chi(v)}$ les $k + 1$ premières dérivées de φ en $v = 0$ sont des fonctions bornées de ξ qui s'annulent pour $\xi = 0$, donc les k premières dérivées de φ sont des fonctions telles que

$$| \varphi^{(i)}(\xi) | \leq c_i | \xi | .$$

La dérivée k-ième de $(\varphi(v, \xi))^n$ pour $v = 0$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(\xi) = n\varphi^{n-1}\varphi^{(k)} &+ n(n-1)\varphi^{n-2}\left[\sum_{i,j} \varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\right] + \dots \\
&+ n(n-1)\dots(n-p+1)\varphi^{n-p}\left[\sum_{i_1,\dots,i_p} \varphi^{(i_1)} \dots \varphi^{(i_p)}\right] + \dots \\
&+ n(n-1)\dots(n-k+1)\varphi^{n-k}[\varphi']^k
\end{aligned}$$

de sorte que compte tenu de ce que $| \varphi(0, \xi) | \leq 1$ on a

$$| h_n(\xi) | = | \mathrm{H}(\xi/n) | \leq \lambda_1 | \xi | + \dots + \lambda_k | \xi |^k$$

b) Pour pouvoir appliquer le lemme 4, il nous reste à montrer que pour chaque ξ, $h_n(\xi)$ converge vers la valeur en ξ de la transformée de Fourier de la distribution

$$\varphi \rightsquigarrow \frac{1}{(-i)^k}\frac{\partial^k}{\partial v^k}\varphi\left(\frac{\mathbb{E}[Xe^{-ivX_0}]}{\mathbb{E}[e^{-ivX_0}]}\right)\Bigg|_{v=0} .$$

C'est-à-dire qu'il faut montrer que :

$$\frac{\partial^k}{\partial v^k}\left[\frac{\chi(v + \xi/n)}{\chi(v)}\right]^n\Bigg|_{v=0} \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial^k}{\partial v^k}\exp\left(-i\xi\frac{\mathbb{E}[Xe^{-ivX_0}]}{\mathbb{E}[e^{-ivX_0}]}\right)\Bigg|_{v=0} = \frac{\partial^k}{\partial v^k} e^{\xi\frac{\chi'(v)}{\chi(v)}}\Bigg|_{v=0}$$

La fonction $\varphi(v, \xi) = \dfrac{\chi(v + \xi)}{\chi(v)}$ est bornée, vaut 1 en $\xi = 0$, est de classe C^{k+1} à dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k + 1$ bornées, si l'on se restreint à une bande $-\alpha < v < +\alpha$ telle que $|\chi(v)|$ ne s'approche pas de zéro. On peut donc écrire

$$\varphi(v, \xi) = 1 + \xi\psi(v, \xi)$$

où ψ est bornée de classe C^k à dérivée partielle jusqu'à l'ordre k bornées. On a donc pour $n > |\xi| . \|\psi\|_\infty$

$$\frac{\partial^k}{\partial v^k}\left[\frac{\chi(v+\xi/n)}{\chi(v)}\right]^n\Bigg|_{v=0} = \frac{\partial^k}{\partial v^k}\exp n \operatorname{Log}\left[1 + \frac{\xi}{n}\psi(v, \xi/n)\right]\Bigg|_{v=0}$$
$$= \frac{\partial^k}{\partial v^k}\exp\left(\xi\psi(v, \xi/n) + \ldots + (-1)^{k-1}\xi^k\frac{[\psi(v, \xi/n)]^k}{kn^{k-1}} + \ldots\right)\Bigg|_{v=0}$$
$$= \frac{\partial^k}{\partial v^k}G_n(\xi\psi(v, \xi/n))\Bigg|_{v=0}$$

où on a posé

$$G_n(\eta) = \exp\left[\eta + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{\eta^k}{kn^{k-1}} + \ldots\right].$$

La fonction G_n est analytique dans le disque $|\eta| < n$ et uniformément bornée sur tout disque pour n suffisamment grand. On a effet si $|\eta| < \rho$.

$$|G_n(\eta)| \leq \exp\rho\left(1 + \ldots + \frac{\rho^k}{kn^{k-1}} + \ldots\right) \leq \exp\rho\left(1 + \rho\frac{1}{1-\rho/n}\right)$$
$$\leq \exp(\rho + 2\rho^2) \qquad \text{si } n \geq 2\rho .$$

Il en résulte que les dérivées de G_n convergent vers les dérivées de $\exp\eta$ donc vers $\exp\eta$ uniformément sur tout disque $|\eta| \leq \rho$.

Comme $\frac{\partial^k}{\partial v^k}G_n(\xi\psi(v, \xi/n))$ s'écrit sous la forme :

$$\xi\frac{\partial^k}{\partial v^k}\psi(v, \xi/n)G'_n(\xi\psi(v, \xi/n)) + \xi\sum_{i,j}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\psi(v, \xi/n)G''_n(\xi\psi(v, \xi/n)) + \ldots$$
$$+ \xi\frac{\partial}{\partial v}\psi(v, \xi/n)G_n^{(k)}(\xi\psi(v, \xi/n))$$

on a bien

$$\frac{\partial^k}{\partial v^k}G_n(\xi\psi(v, \xi/n))\Bigg|_{v=0} \to \frac{\partial^k}{\partial v^k}\exp(\xi\psi(v, 0))\Bigg|_{v=0} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Passons maintenant en temps continu, soit $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité vérifiant les conditions habituelles et X_t un $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ – mouvement brownien réel issu de zéro.

D'après le théorème de Cameron-Martin-Girsanov, si pour $t > 0$ fixé et pour $\theta \in \mathbb{R}$ nous définissons la probabilité $\mathbb{P}_\theta$ sur $(\Omega, (\mathscr{F}_s)_{s\leq t})$ par $\mathbb{P}_\theta = e^{\theta X_t - \frac{\theta^2}{2}t} . \mathbb{P}$, le processus

$$Y_s^\theta = X_s - \theta s$$

est un $(\mathscr{F}_s, \mathbb{P}_\theta)$ mouvement brownien.

Il en résulte que si nous considérons un partage régulier de $[0, t]$ de pas $\frac{t}{n}$ on a pour toute φ borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta X_t - \frac{\theta^2}{2}t} \varphi\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X_{kt/n} - X_{(k-1)t/n} - \frac{\theta t}{n}\right)^2\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}(X_{kt/n} - X_{(k-1)t/n})^2\right)\right]$$

d'où on déduit par un calcul élémentaire que si φ est un polynôme

$$(8.1) \qquad \lim_{n\to\infty} n\mathbb{E}\left[(e^{\theta X_t - \frac{\theta^2}{2}} - 1)\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}(X_{kt/n} - X_{(k-1)t/n})^2\right)\right] = \theta^2 t^2 \varphi'(t)$$

et une méthode analogue à celle de la proposition 3 montre que cette convergence a également lieu si $\varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$ et on a :

THÉORÈME 8. — 1) *La formule* (8.1) *ainsi que celles obtenues par dérivation formelle par rapport à θ sont valables* $\forall \varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$.

2) *Si $\varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$ on a plus généralement pour toute fonction ψ telle que $\psi(X_t) \in L^2(\mathbb{P})$ et telle que* $\mathbb{E}[\psi(X_t)] = 0$

$$(8.2) \qquad \lim_{n\to\infty} n\mathbb{E}\left[\psi(X_t)\varphi\left(\sum_{j=1}^{n}(X_{jt/n} - X_{(j-1)t/n})^2\right)\right] = \varphi'(t)\mathbb{E}[X_t^2\psi(X_t)]$$

3) *Notons $\mathscr{G}_t$ la tribu engendrée par X_t et posons*

$$\Sigma_n = \sum_{j=1}^{n}(X_{jt/n} - X_{(j-1)t/n})^2 .$$

On a $\forall \varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$

$$(8.3) \qquad \lim_{n\to\infty} n(\mathbb{E}[\varphi(\Sigma_n) \mid \mathscr{G}_t] - \mathbb{E}[\varphi(\Sigma_n)]) = \varphi'(t)(X_t^2 - t)$$

La convergence ayant lieu dans $L^2(\mathscr{G}_t, \mathbb{P})$.

Démonstration. — Nous supposons $t = 1$ pour alléger les notations.

1) Notons μ_n^θ la mesure de Radon $\varphi \rightsquigarrow n\mathbb{E}[(e^{\theta X_t - \frac{\theta^2}{2}} - 1)\varphi(\Sigma_n)]$. Il est aisé de calculer :

$$(\mu_n^\theta)\hat{}(\xi) = n\left(\frac{1}{\sqrt{1 + i2\xi/n}}\right)^n\left(\exp\left[-\frac{\theta^2}{2}\frac{i2\xi/n}{1 + i2\xi/n}\right] - 1\right)$$

où le radical désigne la racine carré de partie réelle positive. On a $\lim_{n\to\infty}(\mu_n^\theta)\hat{}(\xi) = -i\theta^2 e^{-i\xi}$ et la majoration valable $\forall\theta \in \mathbb{C}$:

$$|(\mu_n^\theta)\hat{}(\xi)| \leq \frac{|\theta|^2}{2} e^{|\theta|^2/2} |\xi|$$

donc les distributions μ_n^θ sont bornées dans $\mathscr{B}_{\infty,-1}$ uniformément sur tout compact en θ :

$$\|\mu_u^\theta\|_{\infty,-1} \leq \frac{|\theta|^2}{2} e^{|\theta|^2/2}.$$

Donc si $\varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$, les applications analytiques $\theta \rightsquigarrow \langle \mu_n^\theta, \varphi \rangle$ sont uniformément bornées sur tout compact par $\|\varphi\|_{1,1} \frac{|\theta|^2}{2} \exp \frac{|\theta|^2}{2}$. Leur convergence entraîne donc celle de leurs dérivées successives, ce qui démontre le 1).

2) Le 2) est une conséquence du 3) la convergence forte dans $L^2(\mathscr{G}_t, \mathbb{P})$ entraînant la convergence faible.

3) Notons $H_k(x)$ les polynômes d'Hermite donnés par

$$H_k(x) = \frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\exp\left(\theta x - \frac{\theta^2}{2}\right)\bigg|_{\theta=0} = (-1)^k e^{x^2/2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2/2}$$

Les fonctions $H_k(x)/\sqrt{k!}$ constituent une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ relativement à la mesure $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$, de telle sorte que les variables $\frac{1}{\sqrt{k!}}H_k(X_1)$ constituent une base orthonormée de $L^2(\mathscr{G}_1, \mathbb{P})$.

Puisque φ est bornée, on a dans $L^2(\mathscr{G}_1, \mathbb{P})$:

$$\mathbb{E}[\varphi(\Sigma_n) \mid \mathscr{G}_1] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{k!}}H_k(X_1).\varphi(\Sigma_n)\right]\frac{1}{\sqrt{k!}}H_k(X_1)$$

Si k est impair H_k est une fonction impaire, on a $H_0 = 1$ et $H_2(x) = x^2 - 1$ donc :

$$n(\mathbb{E}[\varphi(\Sigma_n) \mid \mathcal{G}_1] - \mathbb{E}[\varphi(\Sigma_n)])$$

$$= n\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_2(X_1).\varphi(\Sigma_n)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1^2 - 1) + n\sum_{p=2}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{H_{2p}(X_1)}{\sqrt{(2p)!}}\varphi(\Sigma_n)\right]\frac{H_{2p}(X_1)}{\sqrt{(2p)!}}$$

D'après le 1) on a en dérivant deux fois la formule (8.1) en $\theta = 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_2(X_1)\varphi(\Sigma_n)\right] = \sqrt{2}\varphi'(1)$$

donc le 1^er^ terme du second membre de (8.4) converge (dans $L^2(\mathcal{G}_1, \mathbb{P})$) vers $\varphi'(1)(X_1^2 - 1)$, pour démontrer (8.3) il faut donc montrer que la norme dans $L^1(\mathcal{G}_1, \mathbb{P})$ du 2^e^ terme du second membre de (8.4) tend vers zéro quand $n \uparrow \infty$. C'est-à-dire en posant

$$\alpha(p, n) = n\mathbb{E}\left[\frac{H_{2p}(X_1)}{\sqrt{(2p)!}}\varphi(\Sigma_n)\right]$$

montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \alpha^2(p, n) = 0$$

Pour évaluer $\alpha(p, n)$ notons que, en reprenant les mesures μ_n^θ du 1),

$$\alpha(p, n) = \frac{1}{\sqrt{(2p)!}}\frac{\partial^{2p}}{\partial\theta^{2p}}\langle \mu_n^\theta, \varphi \rangle\Big|_{\theta=0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2p)!}}\frac{\partial^{2p}}{\partial\theta^{2p}}\langle (\mu_n^\theta)\hat{}, (\hat{\varphi})\check{} \rangle\Big|_{\theta=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{(2p)!}}\left\langle \frac{\partial^{2p}}{\partial\theta^{2p}}(\mu_n^\theta)\hat{}\Big|_{\theta=0}, (\hat{\varphi})\check{} \right\rangle$$

Or

$$\frac{\partial^{2p}}{\partial\theta^{2p}}(\mu_u^\theta)\hat{}(\xi)\Big|_{\theta=0} = n\left(\frac{1}{\sqrt{1 + i2\xi/n}}\right)^n\left(\frac{-i2\xi/n}{1 + i2\xi/n}\right)^p H_{2p}(0).$$

D'après la récurrence $H_{k+1}(x) = xH_k(x) - kH_{k-1}(x)$, on a

$$H_{2p}(0) = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^p p!}$$

On a donc :

$$\left|\frac{\partial^{2p}}{\partial\theta^{2p}}(\mu_u^\theta)\hat{}(\xi)\Big|_{\theta=0}\right| \leq \frac{2|\xi|}{(1 + 4\xi^2/n)^{n/4+1/2}}\left(\frac{4\xi^2/n^2}{1 + 4\xi^2/n^2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\frac{(2p)!}{2^p p!}$$

Si nous posons $h(\xi) = |\xi| \cdot |(\hat{\varphi})\check{}(\xi)|$, $h(\xi)$ est dans L^1 puisque $\varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$ et on a :

$$|\alpha(p, n)| \leq \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{(2p)!}}{2^p p!} \int \frac{1}{(1 + 4\xi^2/n^2)^{n/4+1/2}} \cdot \left(\frac{4\xi^2/n^2}{1 + 4\xi^2/n^2}\right)^{\frac{p-1}{2}} h(\xi) d\xi$$

d'où

$$\alpha^2(p, n) \leq \frac{1}{\pi^2} \| h \|_1 \int \frac{1}{(1 + 4\xi^2/n^2)^{n/2+1}} \left(\frac{4\xi^2/n^2}{1 + 4\xi^2/n^2}\right)^{p-1} h(\xi) d\xi$$

et enfin

$$\sum_{p=2}^{\infty} \alpha^2(p, n) \leq \frac{1}{\pi^2} \| h \|_1 \int \frac{4\xi^2/n^2}{(1 + 4\xi^2/n^2)^{n/2+1}} h(\xi) d\xi$$

expression qui tend vers zéro d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, c. q. f. d.

Remarque. — Plusieurs des résultats précédents s'étendent au cas où l'on utilise le théorème de la limite centrale au lieu de la loi des grands nombres, on a ainsi, par une démonstration semblable à celle de la proposition 3 sous les mêmes hypothèses et en supposant de plus $X_0 \in L^2(\mathbb{P})$ pour toute $\varphi \in \mathscr{B}_{1,1}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\mathbb{T}[\varphi(\sqrt{n}(S_n - \mathbb{E}[X_0]))] = \frac{\mathbb{T}[X_0]}{1 - \lambda} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \varphi'(x) dx,$$

où $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_0 - \mathbb{E}[X_0])^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer, 1964.
[2] J. NEVEU, *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.

(Manuscrit reçu le 13 juillet 1979)