ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

SERGE DEGERINE

Tests optimaux sur les paramètres des lois de von Mises

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 4 (1979), p. 375-392

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_4_375_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XV, n° 4, 1979, p. 375-392

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Tests optimaux sur les paramètres des lois de von Mises

par

Serge DEGERINE
Institut de Recherche en Mathématiques Avancées,
Université Scientifique et Médicale de Grenoble,
B. P. n° 53 X, Grenoble Cedex

SOMMAIRE. — Cet article est le prolongement statistique de la présentation des lois de von Mises comme lois de type exponentiel que l'auteur a données dans [*3*]. En effet, le caractère exponentiel permet de dégager les qualités optimales des tests. Ceux concernant le paramètre de concentration portent sur les hypothèses du type unilatéral ou bilatéral envisagées habituellement dans le cas d'un paramètre scalaire. Pour la direction modale on examine les tests d'une direction contre une autre, de l'intérieur d'un cône contre l'extérieur et de l'appartenance ou non à un sous-espace vectoriel. Dans chaque situation on distingue le cas où le deuxième paramètre est connu et celui où il ne l'est pas.

SUMMARY. — The present paper is the statistical prolongation of the presentation of von Mises distributions as exponential distributions given by the author in [*3*]. The exponential form get rise to optimum decision rules. Tests on the concentration parameter concern the classical one-sided and two-sided hypotheses on a one-dimensional parameter. For the modal direction we look at testing one direction against another, testing the inside against the outside of a cone of directions and testing that the modal direction lies, or not, in a linear subspace of $\mathbb{R}^s$. In each situation the two cases of known and unknown second parameter are studied.

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS

1. Les paramètres des lois de von Mises

Les lois de von Mises régissent des phénomènes aléatoires de type directionnel. Les directions dans $\mathbb{R}^s$ étant représentées par les points de la sphère unité Σ_{s-1}, la loi de von Mises s-dimensionnelle de paramètre θ est définie comme la loi de probabilité P_θ sur $(\mathbb{R}^s, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^s})$ qui admet pour densité par rapport à la distribution uniforme U_s sur Σ_{s-1} :

$$\frac{dP_\theta}{dU_s}(x) = \frac{e^{\langle \theta, x \rangle}}{L_{U_s}(-\theta)}$$

Ici U_s est regardée comme loi de probabilité singulière sur $(\mathbb{R}^s, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^s})$ et traduit une répartition uniforme sur son support Σ_{s-1}; L_{U_s} désigne sa transformée de Laplace.

Le paramètre θ varie dans $\mathbb{R}^s$. La valeur nulle correspond à la répartition uniforme U_s, sinon il se met sous la forme :

$$\theta = kM, \qquad k = \| \theta \|, \qquad M = \frac{\theta}{k}.$$

Le vecteur unitaire M est la direction modale de P_θ et k est le paramètre de concentration. M joue le rôle d'un paramètre de localisation et représente une direction privilégiée. La loi est invariante par rotation autour de cette direction; sa densité est maximum en M et décroît jusqu'à la direction opposée $-$ M où elle est minimum. La concentration de la loi au voisinage de M est mesurée par le paramètre k; pour $k = 0$ la répartition est uniforme, elle tend vers le Dirac en M lorsque k tend vers l'infini; ainsi k se comporte comme l'inverse d'une variance.

Dans la suite, la loi de von Mises s-dimensionnelle de paramètre $\theta = kM$ sera notée s-D. M. D. (θ) ou s-D. M. D. (k, M).

2. Présentation de l'article

Les tests d'hypothèses concernant le paramètre de concentration et la direction modale ont fait l'objet de nombreuses publications dans le cas du cercle ($s = 2$) et de la sphère ($s = 3$) essentiellement du point de vue de leur utilisation. Parmi les auteurs, citons M. Stephens et G. S. Watson. On trouvera une bibliographie détaillée dans le livre de Mardia [*6*].

Ici nous nous attachons à l'aspect statistique mathématique en dégageant, dans chaque situation, la structure statistique et en précisant le plus possible les qualités des tests obtenus. D'autre part, la présentation, unifiée quant à leur dimension, des lois de von Mises que nous avons donnée dans [3] permet, ici aussi, d'aborder les problèmes de manière unifiée.

Nous nous plaçons dans le cadre de la statistique sur un échantillon de taille, n, $X_1, \ldots, X_n$, issu de la loi s-D. M. D. (k, M). La résultante :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

est une statistique exhaustive pour le couple (k, M) et induit une structure exponentielle s-dimensionnelle. Dans le paragraphe II, on étudie les problèmes de tests sur le paramètre de concentration. Lorsque la direction modale M est connue, la projection orthogonale de X sur M est exhaustive pour k et induit une structure exponentielle scalaire; cela conduit aux tests U. M. P. ou U. M. P. B. selon les hypothèses étudiées sur k et fait l'objet du paragraphe II.1. Lorsque la direction modale est inconnue, les problèmes concernant le paramètre de concentration sont invariants par rotation et la norme R de la résultante est une statistique invariante maximale qui induit une structure du type Pólya-∞. Nous obtenons ainsi au paragraphe II.2 les tests optimaux parmi les tests invariants. Nous montrons alors que ces tests sont les seuls, dans l'ensemble de tous les tests, à pouvoir conserver de bonnes propriétés d'optimalité.

La dernière partie de l'article est consacrée aux tests sur la direction modale M. Le type d'hypothèse à tester n'est pas aussi standard que dans le cas du paramètre de concentration. Nous avons retenu le test d'une direction contre une autre, de l'intérieur d'un cône contre l'extérieur et de l'appartenance ou non à un sous-espace vectoriel. Au paragraphe III.1, nous supposons k connu et les tests se font conditionnellement à la norme de la résultante selon le principe ancillaire de Fisher. Lorsque k est inconnu, nous obtenons au paragraphe III.2 les tests optimaux parmi les tests libres par rapport à k.

3. Notations

On note $\mathscr{B}_E$ la tribu borélienne d'un espace topologique E. Pour tout entier positif k, k' désigne la quantité $\dfrac{k-2}{2}$ et λ_k la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$. La mesure de Lelesgue sur $\mathbb{R}^+$ est notée λ_+. Nous écrivons aussi dx ou dr pour $d\lambda_k(x)$ ou $d\lambda_+(r)$.

Σ_{s-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^s$:

$$\Sigma_{s-1} = \{ x \in \mathbb{R}^s \mid \ \| x \| = 1 \}$$

Si H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$, $H^\perp$ est l'orthogonal de H dans $\mathbb{R}^s$ et x_H la projection orthogonale de x sur H.

Nous utilisons les fonctions Γ et β classiques ainsi que les fonctions spéciales suivantes :

— fonction de Bessel d'ordre ν :

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(\nu+n+1)n!}, \ (\nu, z) \in \mathbb{C}^2$$

— fonction de Bessel modifiée d'ordre ν :

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(\nu+n+1)n!}, \ (\nu, z) \in \mathbb{C}^2$$

Nous conservons le plus possible les notations introduites dans [3], en particulier la fonction :

$$g(s, h, n ; b, v) = \frac{[2^{s'}\Gamma(s'+1)]^n}{(2\Pi)^{h'+1}} \int_0^\infty \left\{ \frac{J_{s'}[(\rho^2 - b^2)^{1/2}]}{(\rho^2 - b^2)^{s'/2}} \right\}^n \frac{J_{h'}(\rho v)}{(\rho v)^{h'}} \rho^{h-1} d\rho$$

La structure statistique associée à un échantillon de taille n issu de la loi s-D. M. D. (k, M) est celle induite sur $(\mathbb{R}^s, \mathscr{B}_s)$ par la résultante :

$$(1) \qquad \left\{ \mathbb{R}^s, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_s} ; \frac{dP_{(k,M)}}{dQ_n}(x) = \frac{e^{k\langle M, x\rangle}}{L_{Q_n}(k)}, (k, M) \in \mathbb{R}^+ \times \Sigma_{s-1} \right\}$$

dans laquelle Q_n est la loi de la résultante dans le cas uniforme :

$$\frac{dQ_n}{d\lambda_s}(x) = g(s, s, n ; 0, \|x\|).$$

L_{Q_n} est la transformée de Laplace de Q_n :

$$L_{Q_n}(z) = [L_{U_s}(z)]^n, \ z \in \mathbb{C}^s,$$

où L_{U_s} est la transformée de Laplace de la loi uniforme U_s sur Σ_{s-1}. L_{U_s}, restreinte à $\mathbb{R}^s$, est une fonction qui ne dépend que de la norme de x et nous ferons l'abus d'écriture,

$$L_{U_s}(-x) = L_{U_s}(\|x\|) = \frac{2^{s'}\Gamma(s'+1)}{\|x\|^{s'}} I_{s'}(\|x\|).$$

Les différentes lois de probabilité intervenant dans cet article ont été calculées dans [3] ou s'en déduisent par de simples arguments; c'est pourquoi nous les introduisons sans aucune référence.

II. TESTS SUR LE PARAMÈTRE DE CONCENTRATION

1. La direction modale est connue

Lorsque la direction modale M est connue, la structure statistique (1) devient :

$$\left\{ \mathbb{R}^s, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^s} ; \frac{dP_k}{dQ_n}(x) = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{Q_n}(k)}, \ k \in \mathbb{R}^+ \right\}. \tag{2}$$

La statistique Y définie sur (2) par :

$$Y(x) = < M, x >,$$

est exhaustive $\mathscr{P}$-minimum. Elle représente la projection orthogonale de la résultante sur le sous-espace vectoriel unidimensionnel engendré par la direction modale M. Y induit sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ la structure exponentielle scalaire suivante :

$$\left\{ \mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}} ; \frac{dP_k}{d_1Q_n}(y) = \frac{e^{ky}}{L_{{}_1Q_n}(k)}, \ k \in \mathbb{R}^+ \right\}, \tag{3}$$

où ${}_1Q_n$ est la loi de Y dans le cas uniforme ($k = 0$) et $L_{{}_1Q_n}$ sa transformée de Laplace. Elles sont précisées par :

$$\frac{d_1Q_n}{d\lambda_1}(y) = g(s, 1, n ; 0, | y |), \ y \in \mathbb{R} ; \ L_{{}_1Q_n}(k) = L_{Q_n}(k).$$

Nous avons choisi de maintenir, dans les hypothèses, la valeur $k = 0$ bien que, dans ce cas, la direction modale ne soit pas définie. Ceci permet, par exemple, de tester la répartition uniforme $\{ k = 0 \}$ contre une répartition de von Mises de direction M, $\{ k > 0 \}$.

La recherche de tests optimaux, dans le cas d'hypothèses de type unilatéral ou bilatéral, concernant le paramètre d'une structure exponentielle scalaire, est entièrement résolue. Le calcul des tests, leurs propriétés et en particulier la forme de leur fonction puissance sont décrits, par exemple, au chapitre XI de [*1*]. Nous énoncerons donc simplement les résultats.

II.1.1. PROPOSITION. — Soient deux hypothèses disjointes K′ et K″ de $\mathbb{R}^+$, éventuellement réduites à un point, telles que :

$$k' = \sup \{ k \mid k \in K' \} \leq k'' = \inf \{ k \mid k \in K'' \}.$$

Quel que soit α de $]0, 1[$, il existe une constante unique C′ (resp. C″) telle que le test de région critique $[C', +\infty[$ (resp. $]-\infty, C'']$) est strictement

U. M. P. de niveau α comme test de K' contre K'' (resp. de K'' contre K'). C' (resp. C'') est donnée par :

$$P_{k'}([C', +\infty[) = \alpha \text{ (resp. } P_{k''}(]-\infty, C'']) = \alpha).$$

II.1.2. PROPOSITION. — Soient deux hypothèses disjointes K' et K'' de $\mathbb{R}^+$ telles que les ensembles suivants soient non vides :

$$K'_g = \{ k' \in K' \mid k' < k'', k'' \in K'' \}, K'_d = \{ k' \in K' \mid k' > k'', k'' \in K'' \}.$$

Désignons par k'_g (resp. k'_d la borne supérieure de K'_g (resp. inférieure de K'_d). Quel que soit α de $]0, 1[$ il existe deux constantes uniques $C_1 < C_2$ telles que le test de région critique $[C_1, C_2]$ est strictement U. M. P. de niveau α comme test de K' contre K''. (C_1, C_2) est l'unique solution du système :

$$P_{k'_g}([C_1, C_2]) = P_{k'_d}([C_1, C_2]) = \alpha,$$

l'une des conditions étant remplacée par :

$$\left.\frac{dP_k([C_1, C_2])}{dk}\right|_{k=k'_g} = 0$$

dans le cas où $k'_g = k'_d$.

II.1.3. PROPOSITION. — Avec les notations de la proposition II.1.2. et la condition :

$$\overline{K'} \cap \overline{K''} = \{ k'_g, k'_d \}$$

le test complémentaire du précédent est strictement U. M. P. B. de niveau $1 - \alpha$ comme test de K'' contre K'. Sans cette condition il n'existe pas de test U. M. P. B.

2. La direction modale est inconnue

En toute généralité, nous supposerons *a priori* que la direction modale M appartient à un sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^s$ de dimension h, $1 \leq h \leq s$. La structure statistique (1) devient alors :

$$\left\{ \mathbb{R}^s, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^s}; \frac{dP_\theta}{dQ_n}(x) = \frac{e^{\langle \theta, x \rangle}}{L_{Q_n}(k)}, \theta = kM \in H \right\}. \tag{4}$$

La statistique Y définie sur (4) par :

$$Y(\dot{x}) = x_H, x \in \mathbb{R}^s,$$

où x_H désigne la projection orthogonale de x sur H est exhaustive $\mathscr{P}$-minimum. Elle induit sur $(\mathbb{R}^h, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^h})$ la structure exponentielle :

$$\left\{ \mathbb{R}^h, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^h} ; \frac{dP_\theta}{d_hQ_n}(y) = \frac{e^{k\langle M,y\rangle}}{L_{hQ_n}(k)}, \theta = (k, M) \in \mathbb{R}^+ \times \Sigma_{h-1} \right\} \tag{5}$$

où ${}_hQ_n$ est la loi de Y dans le cas uniforme et L_{hQ_n} sa transformée de Laplace. On a :

$$\frac{d_hQ_n}{d\lambda_h}(y) = g(s, h. n ; 0, \| y \|), y \in \mathbb{R}^h ; L_{hQ_n}(k) = L_{Q_n}(k).$$

Dans (5) M est considérée comme paramètre fantôme et tout problème décisionnel relatif à k est invariant par le groupe des rotations de $\mathbb{R}^h$ (symétries par rapport à l'origine si $h = 1$). Dans la suite de ce paragraphe l'invariance sera toujours entendue au sens de ce groupe. La statistique V définie sur (5) par :

$$V(y) = \| y \|, y \in \mathbb{R}^h$$

est invariante maximale et induit sur $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+})$ la structure :

$$\left\{ \mathbb{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^+} ; \frac{dP_k}{d_h\tilde{Q}_n}(v) = \frac{L_{U_h}(kv)}{L_{hQ_n}(k)}, k \in \mathbb{R}^+ \right\} \tag{6}$$

où ${}_h\tilde{Q}_n$ est la loi de V dans le cas uniforme définie par :

$$\frac{d_h\tilde{Q}_n}{d\lambda_+}(v) = \frac{2\Pi^{h'+1}}{\Gamma(h'+1)} v^{h-1} g(s, h, n ; 0, v), v \in \mathbb{R}^+.$$

La famille des lois de probabilité figurant dans (6) est du type Pólya-∞ strict; la preuve est analogue à celle faite dans [*4*] pour la loi du khi-deux décentrée. Cela signifie que la structure (6) possède les mêmes propriétés qu'une structure exponentielle scalaire en ce qui concerne les tests d'hypothèses de type unilatéral ou bilatéral (cf. [*5*]). La relation :

$$\phi(y) = \tilde{\Phi}(\| y \|), y \in \mathbb{R}^h$$

établit une correspondance biunivoque entre les tests Φ définis sur (6) et les tests invariants Φ définis sur (5). Par la suite nous dirons que $\tilde{\Phi}$ est le profil de Φ. Ainsi, les propositions II.1.1., II.1.2. et II.1.3. énoncées relativement à la structure (6) définissent les profils des tests optimaux parmi les tests invariants.

II.2.1. Proposition. — Soit ψ un test défini sur (5) et $\tilde{\Phi}$ le test défini sur (6) par

$$\tilde{\Phi}(v) = \int_{\mathbb{R}^h} \psi(vy) dU_h(y), v \in \mathbb{R}^+.$$

Alors l'image $\beta_{\tilde{\Phi}}$ de $\tilde{\Phi}$ est égale à

$$\beta_{\tilde{\Phi}}(k) = \int_{\mathbb{R}^h} \beta_\psi(k\mathrm{M})d\mathrm{U}_h(\mathrm{M}),\ h \in \mathbb{R}^+,$$

où β_ψ est l'image de ψ.

Démonstration. — En utilisant la loi de probabilité conditionnelle de Y à V on écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^h} \beta_\psi(k\mathrm{M})d\mathrm{U}_h(\mathrm{M}) = \int_{\mathbb{R}^h}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^h} \psi(vy)\frac{e^{kv\langle y,\mathrm{M}\rangle}}{\mathrm{L}_{\mathrm{U}_h}(kv)} d\mathrm{U}_h(y)d\mathrm{P}_k(v)d\mathrm{U}_h(\mathrm{M})$$

Il suffit alors de changer l'ordre des intégrations; en intégrant d'abord par rapport à M on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^h} \psi(vy)d\mathrm{U}_h(y)d\mathrm{P}_k(v) = \beta_{\tilde{\Phi}}(k) \quad \blacksquare$$

II.2.2. Corollaire. — Soient K_0 et K_1 deux hypothèses disjointes de $\mathbb{R}^+$ et $\tilde{\Phi}$ un test défini sur (6), admissible comme test de K_0 contre K_1. Alors le test Φ défini sur (5) par :

$$\Phi(y) = \tilde{\Phi}(\| y \|),\ y \in \mathbb{R}^h,$$

est admissible comme test de $\mathrm{K}_0 \times \Sigma_{h-1}$ contre $\mathrm{K}_1 \times \Sigma_{h-1}$.

Démonstration. — On raisonne par l'absurde : soit ψ un test sur (5) strictement supérieur à Φ. La continuité de l'image des tests et la proposition II.2.1. montrent que le test $\tilde{\psi}$ défini sur (6) par :

$$\tilde{\psi}(v) = \int_{\mathbb{R}^h} \psi(vy)d\mathrm{U}_h(y),\ v \in \mathbb{R}^+,$$

est strictement supérieur à $\tilde{\Phi}$ et contredit l'admissibilité de ce dernier. $\blacksquare$

En d'autres termes, le corollaire précédent indique que tout test admissible parmi les tests invariants est admissible (dans l'ensemble de tous les tests).

II.2.3. Corollaire. — Soient K_0 et K_1 deux hypothèses disjointes de $\mathbb{R}^+$. S'il existe un test Φ sur (5) qui soit U. M. P. (resp. U. M. P. B.) comme test de $\mathrm{K}_0 \times \Sigma_{h-1}$ contre $\mathrm{K}_1 \times \Sigma_{h-1}$, alors le test invariant ψ défini sur (5) par :

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \Phi(\| y \| u)d\mathrm{U}_h(u),\ y \in \mathbb{R}^h,$$

est de niveau inférieur ou égal à celui de Φ et reste U. M. P. (resp. U. M. P. B.).

Démonstration. — L'image β_ψ du test ψ est invariante et donnée par la proposition II.2.1. :

$$(7) \qquad \beta_\psi(k\mathrm{M}) = \beta_\psi^\sim(k) = \int_{\mathbb{R}^h} \beta_\Phi(k\mathrm{M})d\mathrm{U}_h(\mathrm{M}), \ \forall(k, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^+ \times \Sigma_{h-1}$$

D'où l'inégalité entre les niveaux de signification :

$$\alpha_\psi = \operatorname*{Sup}_{k \in \mathrm{K}_0} \beta_\psi^\sim(k) \leq \operatorname*{Sup}_{(k,\mathrm{M}) \in \mathrm{K}_0 \times \Sigma_{h-1}} \beta_\Phi(k\mathrm{M}) = \alpha_\Phi.$$

Φ étant U. M. P. on a la majoration

$$(8) \qquad \beta_\psi(k\mathrm{M}) \leq \beta_\Phi(k\mathrm{M}), \ \forall(k, \mathrm{M}) \in \mathrm{K}_1 \times \Sigma_{h-1}.$$

Compte tenu de la continuité des fonctions β_ψ et β_Φ, les relations (7) et (8) montrent que ces fonctions coïncident sur $\mathrm{K}_1 \times \Sigma_{h-1}$. Si Φ' est un autre test de niveau inférieur ou égal à α_ψ et donc à α_Φ, sa fonction puissance est majorée sur $\mathrm{K}_1 \times \Sigma_{h-1}$ par celle de Φ et donc par celle de ψ. Ainsi, ψ est U. M. P. La démonstration est identique dans le cas U. M. P. B. car ψ est sans biais. ■

II.2.4. Remarque. — Si dans le corollaire II.2.3. on a $\overline{\mathrm{K}}_0 \cap \overline{\mathrm{K}}_1 \neq \phi$, les test Φ et ψ ont même niveau égal à la valeur commune de β_Φ et β_ψ sur $(\overline{\mathrm{K}}_0 \cap \overline{\mathrm{K}}_1) \times \Sigma_{h-1}$.

Dans le cas particulier d'hypothèses de type unilatéral ou bilatéral les résultats ci-dessus montrent que les tests invariants obtenus à partir de la structure [6] sont admissibles (corollaire II.2.2.). De plus, ce sont les seuls, à un ensemble de ${}_h\mathrm{Q}_n$-mesure nulle près, qui puissent être U. M. P. ou U. M. P. B. dans l'ensemble de tous les tests sauf dans le cas singulier où K_1 est égal à la frontière de K_0. Nous précisons ce point dans la situation, par exemple, de la proposition II.1.1. Les propositions II.1.2. et II.1.3. sont modifiées de la même façon.

II.2.5. Proposition. — Soient deux hypothèses disjointes K' et K'' de $\mathbb{R}^+$, éventuellement réduites à un point, telles que :

$$k' = \sup\{ k \mid k \in \mathrm{K}' \} \leq k'' = \inf\{ k \mid k \in \mathrm{K}'' \}.$$

Quel que soit α de $]0, 1[$, il existe une constante unique C' (resp. C'') telle que le test Φ défini sur (5) par les régions critiques :

$$\{ y \in \mathbb{R}^h \mid \| y \| \geq \mathrm{C}' \}, \text{(res. } \{ y \in \mathbb{R}^h \mid \|y\| \leq \mathrm{C}'' \}),$$

est strictement U. M. P. de niveau α parmi les tests invariants, comme test de $\mathrm{K}' \times \Sigma_{h-1}$ contre $\mathrm{K}'' \times \Sigma_{h-1}$ (resp. $\mathrm{K}'' \times \Sigma_{h-1}$ contre $\mathrm{K}' \times \Sigma_{h-1}$). La constante C' (resp. C'') est déterminée sur la structure (6) par :

$$\mathrm{P}_{k'}([\mathrm{C}', +\infty[) = \alpha \text{ (resp. } \mathrm{P}_{k''}(]-\infty, \mathrm{C}'']) = \alpha)$$

De plus, en dehors du cas trivial où $K'' = \{ k'' \} = \{ k' \}$ (resp. $\{ K' \} = \{ k' \} = \{ k'' \}$), ce test est admissible et est le seul, à un ensemble de ${}_hQ_n$-mesure nulle près, qui puisse être U. M. P. ou U. M. P. B. dans l'ensemble de tous les tests.

Démonstration. — La première partie de la proposition est une conséquence, déjà mentionnée, de ce que la structure statistique (6) est du type Pólya-∞ strict. Le corollaire II.2.2. assure l'admissibilité puisque Φ est admissible parmi les tests invariants.

Soit ψ un test supposé U. M. P. de niveau α comme test de $K' \times \Sigma_{h-1}$ contre $K'' \times \Sigma_{h-1}$. D'après le corollaire II.2.3. le test ψ' défini par

$$\psi'(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \psi(\| y \| u) dU_h(u), \; y \in \mathbb{R}^h,$$

est encore U. M. P. de niveau $\alpha' \leq \alpha$ et leurs fonctions puissances coïncident sur $K'' \times \Sigma_{h-1}$:

$$\beta_\psi(kM) = \beta_{\psi'}(kM), \; \forall (k, M) \in K'' \times \Sigma_{h-1}.$$

Or ψ' étant invariant, Φ U. M. P. parmi les tests invariants et ψ U. M. P. de même niveau que Φ, on a :

$$\beta_{\psi'}(kM) \leq \beta_\Phi(kM) \leq \beta_\psi(kM), \; \forall (k, M) \in K'' \times \Sigma_{h-1}.$$

Ainsi les trois fonctions puissances sont égales sur $K'' \times \Sigma_{h-1}$. Par suite, les fonctions puissances des profils des tests ψ' et Φ sont égales sur K'' :

$$\beta_{\tilde{\psi}'}(k) = \beta_{\tilde{\Phi}}(k), \; \forall k \in K''. \tag{9}$$

D'autre part, le fait que la structure (6) est du type Pólya-∞ strict assure que l'image $\beta_{\tilde{\Phi}}$ du test $\tilde{\Phi}$ ne peut avoir, sur $\mathbb{R}^+$, au plus (en tenant compte de l'ordre de multiplicité) qu'un point commun avec l'image de tout autre test Φ'. De plus, si les deux images sont sécantes en un k_0 on a $\beta_{\tilde{\Phi}}(k) < \beta_{\Phi'}(k)$ pour $k < k_0$. Dans le cas où ces conditions ne sont pas satisfaites, les images sont confondues et les deux tests sont égaux ${}_h\tilde{Q}_n$. p. p. (cf. [5], théorème 3). En excluant le cas $K'' = \{ k'' \} = \{ k' \}$, pour lequel tout test sans biais est U. M. P., l'égalité (9) et la relation $\alpha' \leq \alpha$ impliquent :

$$\tilde{\psi}' = \tilde{\Phi} \; {}_h\tilde{Q}_n. \text{ p. p.}$$

La forme de Φ et la définition de ψ' à partir de ψ permettent de conclure

$$\psi = \Phi \; {}_hQ_n. \text{ p. p.}$$

La démonstration est analogue dans le cas du test de K'' contre K' ainsi que pour la propriété U. M. P. B. ■

II.2.6. PROPOSITION. — Le paramètre de concentration k étant fixé non nul, la structure statistique :

$$\left\{ \mathbb{R}^h, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^h} ; \frac{dP_M}{dU_h}(y) = \frac{e^{k\langle M,y\rangle}}{L_{U_h}(k)}, M \in \Sigma_{h-1} \right\}$$

est complète.

Ce résultat est démontré dans [2]. Notons qu'il ne s'agit pas d'une propriété classique des structures exponentielles car, ici, l'espace des paramètres est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^h$.

II.2.7. COROLLAIRE — Soient K_0 et K_1 deux hypothèses disjointes de $\mathbb{R}^+$, éventuellement réduites à un point, pour lesquelles il existe k_0 non nul vérifiant

$$k_0 \in \overline{K_0} \cap \overline{K_1}$$

Si Φ est un test de $K_0 \times \Sigma_{h-1}$ contre $K_1 \times \Sigma_{h-1}$, U. M. P. B. parmi les tests invariants, alors Φ est U. M. P. parmi les tests sans biais conditionnellement à la norme V de Y.

Démonstration. — Soit U la variable aléatoire sur $(\mathbb{R}^h, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^h})$ égale à Y/V. La loi de probabilité conditionnelle $P^v_{U/V}$ de U à V conduit à la structure conditionnelle suivante :

$$\left\{ \mathbb{R}^h, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^h} ; \frac{dP^v_{U/V}}{dU_h}(u) = \frac{e^{kv\langle M,u\rangle}}{L_{U_h}(kv)}, (k, M) \in \mathbb{R}^+ \times \Sigma_{h-1} \right\}. \tag{10}$$

Soit ψ un test sans biais conditionnellement à V. La statistique T^v définie sur (10) par

$$T^v(u) = \psi(vu), u \in \mathbb{R}^h,$$

a une image β_{T^v} constante sur $k_0 \times \Sigma_{h-1}$. La proposition II.2.6. implique alors que la statistique T^v est constante U_h. p. p. Ainsi le test ψ est équivalent au test invariant de profil :

$$\tilde{\psi}'(v) = \int_{\mathbb{R}^h} \psi(vu)dU_h(u), v \in \mathbb{R}^+. \blacksquare$$

Pour terminer l'étude des tests sur le paramètre de concentration, il reste à envisager les questions d'existence de tests U. M. P. ou U. M. P. B. dans les situations où on a obtenu un test U. M. P. ou U. M. P. B. parmi les tests invariants.

Dans le cas particulier où $h = 1$ la structure statistique (5) est scalaire. Les réponses sont alors obtenues en exprimant les hypothèses sur k au moyen du paramètre scalaire $\theta = k$M et en appliquant les propriétés des structures du type Pólya (cf. [5]). Avec les notations de la proposition

II.1.1. le test de K″ contre K′ est U. M. P., celui de K′ contre K″ est U. M. P. B. sous la condition $k' = k''$. Dans le cas bilatéral (propositions II.1.2. et II.1.3.) le test de K′ contre K″ est U. M. P. B. si $k'_g \in \overline{\mathrm{K}}''$, celui de K″ contre K′ reste U. M. P. B. sous la condition $\{ k'_g, k'_d \} = \overline{\mathrm{K}}' \cap \overline{\mathrm{K}}''$. Les autres questions ont toutes des réponses négatives y compris celle d'existence d'un test U. M. P. là où nous avons obtenu un test U. M. P. B.

Pour $h > 1$ certains points sont résolus par des arguments classiques :

— si l'hypothèse alternative se réduit à l'hypothèse simple $\{ k = 0 \}$, le test est U. M. P.,

— dans le cas unilatéral (proposition II.1.1.) il n'existe pas de test U. M. P. de K′ contre K″ ni de test U. M. P. B. entre ces mêmes hypothèses si $k' < k''$ ou $k' = k'' = 0$.

Dans les autres cas il ne semble pas que l'on puisse obtenir de réponse immédiate. Nous pensons, par exemple, que le test unilatéral de K′ contre K″ avec la condition $k' = k'' > 0$ est U. M. P. B. mais nous n'avons pas pu le prouver. Notons que cette dernière question est identique à celle concernant le test de $\| m \| \leq \| m_0 \|$ contre $\| m \| > \| m_0 \|$ dans le cas d'un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^h$ d'espérance m et de matrice de variance-covariance connue.

III. TESTS SUR LA DIRECTION MODALE

1. Le paramètre de concentration est connu

Dans tout ce paragraphe, le paramètre de concentration k est fixé non nul. La structure statistique à considérer, sans hypothèses *a priori* sur la direction modale, est donc la suivante :

$$\left\{ \mathbb{R}^s, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^s} ; \frac{d\mathrm{P}_\mathrm{M}}{d\mathrm{Q}_n}(x) = \frac{e^{k\langle \mathrm{M}, x \rangle}}{\mathrm{L}_{\mathrm{Q}_n}(k)}, \ \mathrm{M} \in \Sigma_{s-1} \right\}. \tag{11}$$

a) Test de $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0$ contre $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1$.

Soient M_0 et M_1 deux hypothèses simples de Σ_{s-1} et Y la statistique définie sur (11) par

$$\mathrm{Y}(x) = \frac{\langle x, \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_0 \rangle}{\| \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_0 \|}, \ x \in \mathbb{R}^s.$$

Y est la projection orthogonale de x sur le sous-espace unidimensionnel engendré par le vecteur $M_1 - M_0$. Y est une statistique exhaustive pour $\{ M_0, M_1 \}$ et induit sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ la structure exponentielle scalaire :

$$(12) \qquad \left\{ \mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}} ; \frac{dP_\lambda}{dP_b}(y) = \frac{e^{\lambda y}}{L_{F_b}(a)}, \lambda \in \{ -a, +a \} \right\}$$

dans laquelle nous avons posé pour $M \in \{ M_0, M_1 \}$:

$$\lambda = Y(M), a = | \lambda |, b = (k^2 - a^2)^{1/2}.$$

La mesure dominante P_b et sa transformée de Laplace L_{P_b} sont données par :

$$\frac{dP_b}{d\lambda_1}(y) = \frac{g(s, 1, n ; b, | y |)}{L_{Q_n}(b)}, y \in \mathbb{R} ; L_{P_b}(a) = \frac{L_{Q_n}(b)}{L_{Q_n}(k)}$$

Ainsi tester $M = M_0$ contre $M = M_1$ sur (11) est équivalent à tester $\lambda = -a$ contre $\lambda = +a$ sur (12). Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

III.1.1. Proposition. — Quel que soit α de $]0, 1[$, il existe une constante unique C telle que le test défini sur la structure (11) par la région critique

$$\{ x \in \mathbb{R}^s \mid < x, M_1 - M_0 > \geq C. \| M_1 - M_0 \| \},$$

est strictement U. M. P. de niveau α comme test de $M = M_0$ contre $M = M_1$. La constante C est déterminée sur (12) par

$$P_{-a}([C, +\infty[) = \alpha.$$

b) Test de $M \in H$ contre $M \notin H$.

Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ de dimension h, $1 \leq h < s$. On définit sur (11) les statistiques suivantes :

$$R(x) = \| x \|, \Theta(x) = \text{Arc} \cos \frac{\| x_H \|}{\| x \|}, x \in \mathbb{R}^s.$$

Le problème de test de $M \in H$ contre $M \notin H$ est invariant par le groupe des rotations de $\mathbb{R}^s$ qui laissent H globalement invariant. Le couple (Θ, R) est une statistique invariante maximale dont la loi est caractérisée par

$$\frac{dP_\phi}{dP_0}(\theta, r) = L_{U_l}(kr \sin \phi \sin \theta) \frac{L_{U_h}(kr \cos \phi \cos \theta)}{L_{U_h}(kr \cos \theta)}, (\theta, r) \in [0, \Pi/2] \times \mathbb{R}^+$$

dans laquelle on a posé :

$$\phi = \Theta(M), l = s - h.$$

La loi dominante P_0 est celle du couple (Θ, R) lorsque $\phi = 0$. Elle est elle-même précisée par

$$\frac{dP_0}{d(\lambda_1 \otimes \lambda_+)}(\theta, r) = \frac{L_{U_h}(kr \cos \theta)}{L_{U_s}(kr)} \frac{2(\sin \theta)^{l-1}(\cos \theta)^{h-1}}{\beta\left(\frac{l}{2}, \frac{h}{2}\right)} . \tilde{f}_k^n(r), (\theta, r) \in [0, \Pi/2] \times \mathbb{R}^+$$

où $\tilde{f}_k^n$ est la densité par rapport à λ_+ de la loi de R :

$$\tilde{f}_k^n(r) = \frac{L_{U_s}(kr)}{L_{Q_n}(k)} \frac{2\Pi^{s'+1}}{\Gamma(s'+1)} r^{s-1} g(s, s, n ; 0, r), r \in \mathbb{R}^+$$

Le couple (Θ, R) est exhaustif pour ϕ et, k étant connu, R est libre bien que Θ ne soit pas exhaustive. En fait R précise, en quelque sorte, la qualité de l'information sur ϕ contenue dans Θ; ceci suggère de raisonner conditionnellement à R : c'est le principe ancillaire de Fisher. Nous sommes ainsi conduits à tester $\phi = 0$ contre $\phi > 0$ sur la structure conditionnelle :

$$(13) \quad \left\{ [0, \Pi/2], \mathscr{B}_{[0,\Pi/2]} ; \frac{dP_\phi^r}{dP_0^r}(\theta) = L_{U_l}(kr \sin\phi \sin\theta) \frac{L_{U_h}(kr\cos\phi\cos\theta)}{L_{U_h}(kr\cos\theta)}, \phi \in [0, \Pi/2] \right\}$$

dans laquelle P_0^r est la loi de Θ conditionnée par $R = r$ lorsque $\phi = 0$:

$$\frac{dP_0^r}{d\theta}(\theta) = \frac{L_{U_h}(kr\cos\theta)}{L_{U_s}(kr)} \frac{2(\sin\theta)^{l-1}(\cos\theta)^{h-1}}{\beta\left(\frac{l}{2}, \frac{h}{2}\right)}, \theta \in [0, \Pi/2].$$

La famille des lois de probabilité de (13) est de rapport de vraisemblance strictement monotone. Il suffit donc d'appliquer le lemme de Neymann et Pearson pour prouver le résultat suivant :

III.1.2. PROPOSITION. — Quel que soit α de]0. 1[, il existe une fonction C_α telle que le test défini sur la structure (11) par la région critique :

$$\{ x \in \mathbb{R}^s \mid \Theta(x) > C_\alpha(R(x)) \},$$

est strictement U. M. P. de niveau α parmi les tests invariants de niveau α conditionnellement à R, comme test de $M \in H$ contre $M \notin H$. La fonction C_α est définie par la condition

$$P_0^r([C_\alpha(r), \Pi/2]) = \alpha, r \in \mathbb{R}^+$$

c) Test de $M = M_0$ contre $M \neq M_0$.

Soit M_0 une direction donnée et soit H le sous-espace vectoriel unidimensionnel de $\mathbb{R}^s$ de vecteur unitaire M_0. On définit sur (11) les statistiques suivantes :

$$R(x) = \| x \|, \qquad \Theta(x) = \text{Arc} \cos \frac{x_H}{\| x \|}, x \in \mathbb{R}^s.$$

Le test est obtenu de la même manière qu'en section *b*) ci-dessus.

L'invariance est relative au groupe des rotations de $H^{\perp}$. La structure conditionnelle est la suivante :

$$(14)\qquad \left\{ [0, \Pi], \mathscr{B}_{[0,\Pi]} \,;\, \frac{dP^r_\phi}{dP^r_0}(\theta) = L_{U_{s-1}}(kr \sin\phi \sin\theta) e^{kr(\cos\phi - 1)\cos\theta},\ \phi \in [0,\Pi] \right\}$$

avec :

$$\frac{dP^r_0}{d\theta}(\theta) = \frac{e^{kr\cos\theta}(\sin\theta)^{s-2}}{L_{U_s}(kr)\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{s-1}{2}\right)},\ \theta \in [0, \Pi] \,;\ \phi = \Theta(M).$$

III.1.3. PROPOSITION. — Quel que soit α de $]0, 1[$, il existe une fonction C_α telle que le test défini sur la structure (11) par la région critique :

$$\{ x \in \mathbb{R}^s \mid \Theta(x) > C_\alpha(R(x)) \},$$

est strictement U. M. P. de niveau α parmi les tests invariants de niveau α conditionnellement à R, comme test de $M = M_0$ contre $M \neq M_0$. La fonction C_α est définie par la condition :

$$P^r_0([C_\alpha(r), \Pi]) = \alpha,\ r \in \mathbb{R}^+.$$

III.1.4. REMARQUE. — On peut tester de la même manière le cône des directions M satisfaisant $\langle M, M_0 \rangle \geq e$, $-1 < e \leq 1$, contre $\langle M, M_0 \rangle < e$. Il suffit en effet de considérer le test de $\phi \leq \phi_0$ contre $\phi > \phi_0$, avec $\phi_0 = \text{Arc} \cos e$, sur la structure conditionnelle (14). Le résultat s'énonce comme dans la proposition III.1.3., la fonction C_α étant définie par :

$$P^r_{\phi_0}([C_\alpha(r), \Pi]) = \alpha,\ r \in \mathbb{R}^+.$$

2. Le paramètre de concentration est inconnu

La structure est *a priori* :

$$(15)\qquad \left\{ \mathbb{R}^s, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^s} \,;\, \frac{dP_M}{dQ_n}(x) = \frac{e^{k\langle M,x\rangle}}{L_{Q_n}(k)},\ M \in \Sigma_{s-1},\ k \in \mathbb{R}^{+*} \right\}.$$

Dans tout ce paragraphe, k est un paramètre fantôme et nous noterons simplement P les hypothèses de la forme $P \times \mathbb{R}^{+*}$, $P \subset \Sigma_{s-1}$.

a) Test de $M = M_0$ contre $M = M_1$.

III.2.1. PROPOSITION. — Quel que soit α de $]0, 1[$, il existe une constante C telle que le test défini sur la structure (15) par la région critique :

$$\{ x \in \mathbb{R}^s \mid \langle x, M_0 \rangle < C \},$$

est strictement U. M. P. de niveau α comme test de $M = M_0$ contre $M = -M_0$. La constante C est définie par

$$\int_{-\infty}^{C} g(s, 1, n ; 0, |y|)dy = \alpha.$$

Démonstration. — Dans le cas particulier où $M_1 = -M_0$, la statistique $\langle x, M_0 \rangle$ est exhaustive pour (k, M) restreint à $\mathbb{R}^{+*} \times \{ -M_0, M_0 \}$. Nous sommes ainsi conduits à tester $\lambda > 0$ contre $\lambda < 0$ sur la structure exponentielle scalaire :

$$\left\{ \mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}} ; \frac{dP_\lambda}{d_1Q_n}(y) = \frac{e^{\lambda y}}{L_1Q_n(k)}, \lambda = kM \in \mathbb{R}^* \right\}. \quad \blacksquare$$

Le test décrit dans la proposition III.2.1. ne prend pas en compte le fait que k est un paramètre fantôme, c'est-à-dire que k a une même valeur inconnue sous les hypothèses $-M_0$ et M_0. Il serait plus juste de rechercher un test qui soit libre relativement à k mais ici la statistique $\langle x, M_0 \rangle$ est exhaustive et complète pour (k, M) restreint à $\mathbb{R}^{+*} \times \{ M_0 \}$ de sorte que seul le test trivial constamment égal à α est libre de niveau α.

Lorsque M_1 est distinct de $-M_0$ on considère, dans le sous-espace engendré par les vecteurs M_0 et M_1, le vecteur unitaire M_1' vérifiant :

$$\langle M_1', M_0 \rangle = 0, \qquad \langle M_1', M_1 \rangle > 0.$$

On définit alors sur la structure (15) les statistiques suivantes :

$$Y(x) = \langle x, M_0 \rangle \quad , \quad Z(x) = \langle x, M_1' \rangle \quad , \quad x \in \mathbb{R}^s.$$

III.2.2. PROPOSITION. — Quel que soit α de $]0, 1[$, il existe une fonction C_α telle que le test défini sur la structure (15) par la région critique

$$\{ x \in \mathbb{R}^s \mid Z(x) \geq C_\alpha(Y(x)) \},$$

est strictement U. M. P. de niveau α parmi les tests libres de M_0 contre M_1. La fonction C_α est déterminée par

$$\int_{C_\alpha(y)}^{+\infty} g(s, 2, n ; 0, (y^2 + z^2)^{1/2}dz = \alpha g(s, 1, n ; 0, |y|), y \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. — Le couple (Y, Z) est exhaustif pour (k, M) restreint à $\mathbb{R}^{+*} \times \{ M_0, M_1 \}$. Y seule est exhaustive et complète pour (k, M) restreint à l'hypothèse nulle $\mathbb{R}^{+*} \times \{ M_0 \}$; ainsi tout test libre est libre conditionnellement à Y. Ceci conduit à considérer la structure conditionnelle :

$$\left\{ \mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}} ; \frac{dP_\theta^y}{dz}(z) = e^{k\theta z} \frac{g(s, 2, n ; 0, (y^2 + z^2)^{1/2})}{g(s, 1, n ; k\theta, |y|)}, \theta \in \{ 0, \theta_1 \}, k \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$$

dans laquelle on a posé

$$\theta = Z(M) \quad , \quad \theta_1 = Z(M_1).$$

Cette structure est exponentielle scalaire et le test de région critique $[C_\alpha(y), +\infty[$ est strictement U. M. P. de niveau α comme test de $\theta = 0$ contre $\theta = \theta_1$. Le résultat s'obtient alors par des arguments classiques (cf. [7], p. 386). ■

b) Test de $M \in H$ contre $M \notin H$.

Le problème est encore invariant par le groupe des rotations de $\mathbb{R}^s$ qui laissent H globalement invariant. Le couple (V, W) défini sur (15) par :

$$V(x) = \| x_H \| \quad , \quad W(x) = \| x_{H^\perp} \| \quad , \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

est une statistique invariante maximale. Sur la structure induite V seule est exhaustive et complète pour k sous l'hypothèse nulle. La loi de W conditionnée par $V = v$ est donnée par :

$$\frac{dP_b^v}{dw}(w) = L_{U_l}(bw) . \frac{g(s, s, n ; 0, (v^2 + w^2)^{1/2})}{g(s, h, n ; b, v)} \frac{2\Pi^{l'+1}}{\Gamma(l' + 1)} w^{l-1}, \ w \in \mathbb{R}^+,$$

avec :

$$b = W(kM) \quad , \quad l = s - h.$$

Toutes les conditions qui fondent la proposition III.2.2. sont à nouveau satisfaites; nous pouvons alors énoncer :

III.2.3. PROPOSITION. — Quel que soit α de $]0, 1[$, il existe une fonction C_α telle que le test défini sur la structure (15) par la région critique :

$$\{ x \in \mathbb{R}^s \mid W(x) \geq C_\alpha(V(x)) \}$$

est strictement U. M. P. de niveau α parmi les tests invariants et libres relativement à k comme test de $M \in H$ contre $M \notin H$. La fonction C_α est déterminée par :

$$\frac{2\Pi^{l'+1}}{\Gamma(l' + 1)} \int_{C_\alpha(v)}^{+\infty} g(s, s, n ; 0, (v^2 + w^2)^{1/2}) w^{l-1} dw = \alpha g(s, h, n ; 0, v), \ v \in \mathbb{R}^+.$$

c) Test de $M = M_0$ contre $M \neq M_0$.

La méthode étant identique, nous énonçons simplement le résultat :

III.2.4. PROPOSITION. — Quel que soit α de $]0, 1[$, il existe une fonction C_α telle que le test défini sur la structure (15) par la région critique :

$$\{ x \in \mathbb{R}^s \mid W(x) \geq C_\alpha(Y(x)) \}$$

est strictement U. M. P. de niveau α parmi les tests invariants et libres (relativement à k) comme test de $M = M_0$ contre $M \neq M_0$. La fonction C_α est déterminée par :

$$\frac{2\Pi^{s'+1/2}}{\Gamma(s'+1/2)}\int_{C_\alpha(y)}^{+\infty} g(s, s, n; 0, (y^2+w^2)^{1/2})w^{s-2}dw = \alpha g(s, 1, n; 0, |y|), y \in \mathbb{R}.$$

Dans cette proposition l'invariance est relative au groupe des rotations de $H^\perp$ où H est le sous-espace unidimensionnel de vecteur unitaire M_0. On a également posé

$$Y(x) = x_H \quad , \quad W(x) = \| x_{H^\perp} \| \quad , \quad v \in \mathbb{R}^s.$$

RÉFÉRENCES

[1] J. R. BARRA, *Notions fondamentales de statistique mathématique*. Dunod, éditeur, Paris, 1971.
[2] S. DEGERINE, Sur la complétion des structures de von Mises. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **287**, 3 juillet 1978, série A, p. 29-31.
[3] S. DEGERINE, Lois de von Mises et lois liées. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, section B, vol. XV, n° 1, 1979, p. 63-77.
[4] S. KARLIN, Decision Theory for Pólya Type Distributions, case of two actions. I. *Proc. Third Berkeley Symp. prob. statist.*, vol. I. University of California Press, 1956, p. 115-129.
[5] S. KARLIN, Pólya type distribution. II. *Ann. Math. Statist.*, t. **28**, 1957, p. 281-308.
[6] K. V. MARDIA, *Statistics of directional data*. Academic Press, London and New York, 1972.
[7] C. R. RAO, *Linear Statistical Inference and its Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1965.

(Manuscrit reçu le 5 juillet 1979).