ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. PETIT

Théorie ergodique : classification de certaines transformations réelles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 1 (1979), p. 25-32

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_1_25_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XV, n° 1, 1979, p. 25-32.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorie ergodique : classification de certaines transformations réelles

par

B. PETIT
Mathématiques, Université de Brest, 29200 Brest

SUMMARY. — Aaronson and Kemperman have shown that the transformation $Tx = \alpha x + \beta + \sum_{1}^{n} \gamma_n \mid (t_n - x)$ is strongly mixing and extends to a K system for suitable values of the parameters. We show here that these transformations extend to Bernoulli shifts with entropy $\int \log T'(x)dm(x)$ where T' is the derivative of T and m is the Cauchy invariant measure.

1. INTRODUCTION

Nous considérons les transformations *non-injectives* de $\overline{\mathbb{R}}$ sur lui-même définies par :

$$Tx = \alpha + \beta + \sum_{1}^{N} \frac{\gamma_n}{t_n - x} \tag{1}$$

où

a) $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$,

b) $N \geq 1$ (si $\alpha = 0$, on a alors $N \geq 2$); $t_1 < t_2 \ldots < t_N$ et pour $1 \leq n \leq N$, $\gamma_n > 0$.

Nous supposons en outre que T admet un point fixe $a + ib$ avec $b > 0$

(un tel point fixe est nécessairement unique). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi (voir [3]) est que :

c) Pour tout x réel tel que $T(x) = x$, on ait $T'(x) > 1$.

Ces conditions étant supposées réalisées, nous savons qu'il existe une seule mesure de probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$ invariante par T : c'est la distribution de Cauchy

$$dm = \frac{b}{\pi} \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} \text{ (cf. [4]).}$$

Nous considérons alors le système dynamique $\mathcal{S} = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, m, T)$. Depuis les travaux de Aaronson et Kemperman [1], [3], nous savons que $\mathcal{S}$ est ergodique, fortement mélangeant, et que son extension naturelle est un K-système. Nous nous proposons d'établir ici que l'extension naturelle de $\mathcal{S}$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli ayant pour entropie

$$h = \int \log T'(x) dm(x),$$

où T' est la dérivée de T.

Pour ce faire, nous étudierons uniquement le cas $\alpha > 0$, établirons que $\mathcal{S}$ est isomorphe à un shift et utiliserons les résultats de [5].

Pour le cas $\alpha = 0$, il est facile de se ramener au cas précédent de la façon suivante : soient x_0 un point fixe réel de T (il en existe !) et ϕ la transformation de $\overline{\mathbb{R}}$ sur lui-même :

$$\phi(x) = x_0 - \frac{1}{x}.$$

Posons alors $S(x) = \phi^{-1} \circ T \circ \phi(x)$.

En remarquant que S est une fraction rationnelle dont les pôles (simples) sont les N solutions finies $\{ t'_1, \ldots, t'_N \}$ de $T \circ \phi(x) = x_0$, il est facile par un simple calcul de voir que :

$$S(x) = \frac{x}{T'(x_0)} + \beta' + \sum_{1}^{N} \frac{\gamma'_n}{t'_n - x}$$

où tous les γ'_n sont strictement > 0.

ϕ constitue alors un isomorphisme entre $\mathcal{S} = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, m, T)$ et $\mathcal{S}' = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, \phi^{-1}, m, S)$. Donc, dans ce qui vient, α est supposé strictement positif.

Dans toute la suite, nous désignerons par $\mathscr{P}$ la partition de $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\begin{aligned} A_0 &= [\infty, t_1[\\ A_n &= [t_n, t_{n+1}[\qquad \text{si} \qquad 1 \leq n \leq N-1 \\ A_N &= [t_N, \infty[\end{aligned}$$

m étant T-invariante et équivalente à la mesure de Lebesgue, la partition $\mathscr{P}$ est un générateur (voir [*4*]); nous retrouverons ce résultat naturellement en cours de démonstration.

2. RELÈVEMENT LOCAL DE *m* PAR T^{-1}

Sur chaque ensemble A_n $0 \leq n \leq N$, T est une bijection de A_n sur $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $T_n = T_{|A_n} : A_n \to \overline{\mathbb{R}}$.

Suivant •en cela [*2*], nous appellerons relèvement local de m par T^{-1} la mesure Qm définie par :

Pour toute fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$,

$$Qm(f) = \frac{b}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \int_{\overline{\mathbb{R}}} f(T_n^{-1}x) \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2}$$

Si, dans chacune de ces intégrales, nous posons $x = T_n u$ $(u \in A_n)$, nous obtenons :

$$Qm(f) = \frac{b}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \int_{A_n} f(u) \,.\, \frac{T'(u)}{(Tu-a)^2 + b^2} du$$

Nous en déduisons que $Qm \ll m$ et :

$$\frac{dQm}{dm} = \frac{T'(u).((u-a)^2 + b^2)}{(Tu-a)^2 + b^2}$$

Nous constatons que $\dfrac{dQm}{dm}$ est toujours > 0 sur $\overline{\mathbb{R}}$; nous poserons donc :

$$g(u) = \frac{(Tu-a)^2 + b^2}{T'(u).((u-a)^2 + b^2)}$$

En posant $g(\infty) = \alpha$, il est manifeste que :

1) g est continue sur $\overline{\mathbb{R}'}$

2) g est > 0 sur $\overline{\mathbb{R}}$.

LEMME 1. — $\| g \|_\infty < 1$.

Démonstration. — En vertu des remarques précédentes, il suffit de voir que :

pour tout $$x \in \mathbb{R}, \sum_{Ty=x} g(y) = 1$$

Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$,

$$m(f) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)g(x)dQm(x) = \frac{b}{\pi}\int_{\overline{\mathbb{P}}} \sum_{n=0}^{N} f(T_n^{-1}x)g(T_n^{-1}x)\frac{dx}{(x-a)^2+b^2}$$
$$= \int_{\overline{\mathbb{R}}} \sum_{Ty=x}\left[g(y)f(y)\right]dm(x)$$

m étant T-invariante, $m(Tf) = m(f)$, donc :

$$m(f) = \int_{\overline{\mathbb{R}}}\left[\sum_{Ty=x} g(y)f(y)\right]dm(x) = \int_{\overline{\mathbb{R}}}\left[\sum_{Ty=x} g(y)\right]f(x)dm(x) = m(Tf).$$

On a donc :

$$m\text{-presque partout} : \sum_{Ty=x} g(y) = 1.$$

m étant équivalente à la mesure de Lebesgue et g étant continue sur $\overline{\mathbb{R}}$, cette égalité a lieu partout. On a donc bien la conclusion annoncée.

Définissons maintenant sur $L^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, m)$ l'opérateur ϕ par :

Pour toute $f \in L^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, m)$:

$$\phi f(x) = \sum_{Ty=x} g(y)f(y)$$

Par définition de g, il est bien évident que :

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} \phi f\, dm = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f\, dm$$

Nous retrouvons à l'aide de ϕ le résultat :

LEMME 2. — La partition $\mathcal{P}$ est un générateur pour $\mathcal{B}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{P}_n = \bigvee_{0}^{n-1} T^{-k}\mathcal{P}$. Tout élément B de $\mathcal{P}_n$ est un intervalle $[a_n, b_n[$. Il suffit alors de voir que :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\sup_{B \in \mathscr{P}_n} m(B) < \varepsilon$.

Si $$B \in \mathscr{P}_n \quad , \quad B = \bigcap_{0}^{n-1} T^{-k} A_{i_k} \quad 0 \leq i_k \leq N.$$

T^n est injective sur B et $T^n B = \overline{\mathbb{R}}$.
On a alors :

$$m(B) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} 1_B(x) dm(x) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} \phi^n 1_B(x) dm(x)$$

Mais

$$\phi^n 1_B(x) = \sum_{T^n y = x} \left(\prod_{j=1}^{n} g(T^{n-j} y) \right) 1_B(y).$$

Un seul terme de cette somme est non nul puisque T^n est injective sur B, donc :

$$\| \phi^n 1_B \|_\infty \leq \| g \|_\infty^n.$$

D'où le résultat en vertu du lemme 1.

3. ISOMORPHISME AVEC UN SHIFT

Soit $\Omega = \{ 0, \ldots, N \}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance et de la tribu habituelles.

Soit $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to \Omega$
$$x \to \{ \omega_n(x) \}_{n \geqslant 0} \qquad \text{où} \qquad \omega_n(x) = j \Leftrightarrow T^n x \in A_j.$$

Les remarques suivantes sont immédiates :

1) Si S désigne le shift sur Ω, on a : $\varphi \circ T = S \circ \varphi$.
2) En vertu du lemme 2, φ est injective.
3) Les seuls points de Ω non atteints par φ sont les points $\{ \omega_n \}_{n \geq 0}$

pour lesquels : $\bigcap_{0}^{\infty} T^{-n} A_{\omega_n} = \phi$; compte tenu de la forme des éléments de $\mathscr{P}_n$, il faut et il suffit pour cela que, si $[a_n, b_n[\; = \bigcap_{0}^{n-1} T^{-j} A_{\omega_j}$, la suite $\{ b_n \}$ soit constante à partir d'un certain rang, ce qui revient à dire que $\omega_n = N$ à partir d'un certain rang; φ est donc surjective à un ensemble dénombrable près.

Comme $\varphi^{-1}([\omega_0\omega_1 \dots \omega_n]) = \bigcap_0^n A_{\omega_i}$, φ constitue un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}' = (\Omega, \mathcal{B}, S, \varphi m)$.

Si $Q\varphi m$ est le relèvement local de φm par S^{-1}, on a : $Q\varphi m = \varphi Q m$. Au sens de [2], φm est une g-mesure, c'est-à-dire $\dfrac{d\varphi m}{dQ\varphi m} = g_0$, et en vertu de ce qui précède : $g_0 \circ \varphi = g$.

Nous nous proposons maintenant, pour utiliser les résultats de [5], de montrer que g_0 est lipschitzienne sur Ω. Puisque φm ne charge pas les points et que $\Omega \backslash \varphi(\overline{\mathbb{R}})$ est dénombrable, il suffit de le montrer sur $\varphi(\overline{\mathbb{R}})$.

Choisissons $\lambda > 0$ tel que $\| g \|_\infty < \dfrac{1}{2^\lambda}$.

Soient $\omega, \omega' \in \varphi(\overline{\mathbb{R}})$ tels que $\delta(\omega, \omega') = \dfrac{1}{2^n}$

$$\text{i. e. } \omega_k = \omega_k' \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

Il nous suffit de montrer que :

$$\text{(L)} \quad | g_0(\omega) - g_0(\omega') | \leq K . \frac{1}{2^{n\lambda}}$$

où K est une constante indépendante de ω, ω' et n.

Ceci revient à montrer que :

$$| g(\varphi^{-1}\omega) - g(\varphi^{-1}\omega') | \leq K . \frac{1}{2^{n\lambda}}$$

Posons $x = \varphi^{-1}(\omega)$ et $x' = \varphi^{-1}(\omega')$ $x, x' \in \bigcap_0^{n-1} T^{-j}A\omega_j$.

LEMME 3. — La fonction $x \to g'(x)((x-a)^2 + b^2)$ est bornée sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. — g étant une fraction rationnelle toujours définie est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il nous suffit donc de montrer que $g'(x)((x-a)^2 + b^2)$ admet une limite finie quand $x \to \infty$.

$$g'(x)((x-a)^2 + b^2) = 2(Tx - a) - 2(x-a)\frac{(Tx-a)^2 + b^2}{T'x((x-a)^2 + b^2)} - \frac{((Tx-a)^2 + b^2)}{(T'x)^2} T''x$$

Mais $T'x = \alpha + \displaystyle\sum_1^N \frac{\gamma_n}{(t_n - x)^2}$.

Donc $\lim_{x \to \infty} T'x = \alpha$

$$T''x = 2 \sum_{1}^{N} \frac{\gamma_n}{(t_n - x)^3}$$

Donc quand $x \to \infty$, $T''x$ est un infiniment petit en $\frac{1}{x}$, d'ordre 3.

Par suite $\lim_{x \to \infty} ((Tx - a)^2 + b^2)T''x = 0$.

D'autre part, $\dfrac{(x-a)((Tx-a)^2+b^2)}{T'x((x-a)^2+b^2)} \sim \dfrac{\alpha^2 x^3}{\alpha x^2} \sim \alpha x$ quand $x \to \infty$.

Comme $Tx \sim \alpha x$ quand $x \to \infty$, $g'(x)((x-a)^2 + b^2)$ admet bien une limite finie quand $x \to \infty$.

Ceci nous permet d'établir la propriété (L) :

On peut toujours supposer $x \leq x'$.

$$|g(x)-g(x')| = \left| \int_x^{x'} g'(u)du \right| \leq \operatorname*{Sup}_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \frac{\pi}{b} |g'(x)((x-a)^2+b^2)| \cdot \frac{b}{\pi} \int_{x'}^{x} \frac{dt}{(t-a)^2+b^2}$$

Donc :

$$|g(x) - g(x')| \leq K.m([x, x']) \leq K.m\left(\bigcap_0^{n-1} T^{-j} A\omega_j \right)$$

ce qui donne, grâce au lemme 2 :

$$|g(x) - g(x')| \leq K. \|g\|_\infty^n \leq K. \frac{1}{2^{n\lambda}} = K.\delta(\omega, \omega')^\lambda.$$

4. CONCLUSION

En utilisant les résultats de [5] et l'isomorphisme φ, on en déduit :

1° $\mathscr{S}$ est fortement mélangeant, donc ergodique, ce que nous savions déjà, et son extension naturelle est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

2° L'entropie de $\mathscr{S}$ est donnée par :

$$h = - \int_{\overline{\mathbb{R}}} \log g(x)dm(x)$$

c'est-à-dire encore :

$$h = \int_{\overline{\mathbb{R}}} \log T'(x)dm(x) + \int_{\overline{\mathbb{R}}} \log ((x-a)^2 + b^2)dm(x) - \int_{\overline{\mathbb{R}}} \log ((Tx-a)^2 + b^2)dm(x)$$

Du fait que m est T-invariante, les deux dernières intégrales sont égales, de sorte que :

$$h = \int_{\bar{\mathbb{R}}} \log \mathrm{T}'(x) dm(x).$$

Dans le cas particulier où $\mathrm{T}x = \alpha x - \frac{\beta}{x}$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$.

On a :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 1$$

et un simple calcul montre que :

$$h = \log\left(1 + 2\sqrt{\alpha\beta}\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AARONSON, *Ergodic theory for inner functions of the upper half-plane* (à paraître aux *Annales de l'I. H. P.*).

[2] M. KEANE, Strongly mixing g-measures, *Invent. Math.*, t. **16**, 1972, p. 309-324.

[3] J. H. B. KEMPERMAN, *The ergodic behaviour of a class of real transformations. Stochastic processes and related topics. Proceedings of Summer research Institute on statistical inference for stochastic processes* (Editor Puri), Ind. Univ. Bloomington (Ind.), 1974, p. 249-258, Academic Press, N. Y., 1975.

[4] G. LETAC, *Which functions preserve Cauchy laws ?* (à paraître in *P. A. M. S.*).

[5] B. PETIT, Schémas de Bernoulli et g-mesures, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, t. **280**, 1975, p. 17-20.

(Manuscrit reçu le 30 juin 1978).