ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

F. BRODEAU
A. LE BRETON

Identification de paramètres pour un système excité par des bruits gaussien et poissonien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 1 (1979), p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré Section B :
Vol. XV, n° 1, 1979, p. 1-23. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Identification de paramètres pour un système excité par des bruits Gaussien et Poissonien

par

F. BRODEAU et **A. LE BRETON**
I. R. M. A., Université scientifique et médicale,
B. P. 53, 38041 Grenoble Cedex

RÉSUMÉ. — On étudie le problème de l'estimation des paramètres du modèle pour un système régi par une équation différentielle stochastique linéaire unidimensionnelle excitée par des bruits Gaussien et Poissonien. D'une part, on montre que si les paramètres des bruits sont connus on peut, sous certaines conditions, estimer les paramètres de dérive par une famille convergente et asymptotiquement normale d'estimateurs du maximum de vraisemblance. D'autre part, on envisage l'estimation des paramètres des bruits préalablement ou simultanément à celle des paramètres de dérive. Enfin, on aborde le problème de choix d'une entrée de manière à optimiser, au sens d'un critère convenable, la précision de l'estimation des paramètres de dérive.

ABSTRACT. — This paper is concerned with the problem of parameter estimation in a system modelled by a scalar linear stochastic differential equation excited by Gaussian and Poisson noises. First, assuming that the parameters in the noises are known, it is shown, under some conditions, that the drift parameters are identifiable by a family of maximum likelihood estimates which is consistent and asymptotically normally distributed. Then the estimation of the parameters in the noises is considered, previously or simultaneously to that of the drift parameters. Further the problem of designing an input in order to enhance, in some suitable sense, estimation accuracy of the drift parameters, is discussed.

1. INTRODUCTION

On considère un système dynamique stochastique à temps continu régi par une équation de la forme :

$$(1.1)\quad X_t = \int_0^t \varphi_1 X_s ds + \int_0^t \varphi_2 u_s ds + \int_0^t C dW_s + \int_{\mathbb{R}} v r([0, t], dv)\ ;\ t \geq 0,$$

où X_t est l'état à l'instant t du système, (u_t) est une entrée ou fonction de contrôle, (W_t) est un processus de Wiener standard, et r est une mesure aléatoire de Poisson centrée, telle qu'elle est définie dans [*1*], indépendante de (W_t) et de mesure associée μ, où μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$, finie sur tout compact ne contenant pas l'origine, et possédant des moments d'ordre 1 et 2. μ et les coefficients φ_1, φ_2, C sont éventuellement inconnus. La définition et l'interprétation de l'intégrale par rapport à r sont données dans [*1*].

On étudie les problèmes suivants :

(P_1) Estimer φ_1, φ_2, C et μ au vu de l'observation d'une trajectoire de l'état du système pour une réalisation de l'expérience sur $[0, t]$ quand une entrée (u_s) est donnée.

(P_2) Choisir l'entrée (u_s) de façon à optimiser, au sens d'un critère convenable, la précision de l'estimation.

Le Breton dans [*2*] a résolu les problèmes (P_1) et (P_2) en l'absence de l'intégrale par rapport à r dans le cas vectoriel, X_t et W_t étant de dimension n, u_t de dimension k, φ_1, φ_2 et C étant des matrices de dimensions appropriées. On présente ici une extension à (1.1) des méthodes et des résultats développés dans [*2*] et annoncés dans [*3*]. Cette extension est, pour des raisons de commodité d'exposition, limitée au cas où X_t, u_t, W_t sont de dimension un et où μ est une mesure sur $\mathbb{R}$; les résultats obtenus restent valables dans le cas vectoriel moyennant de légères modifications des méthodes utilisées.

Au paragraphe 2, on décrit la structure statistique associée au problème d'estimation posé (P_1). Cette description invite à estimer le paramètre $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$, lorsque seul ce paramètre est inconnu, par la méthode du maximum de vraisemblance. Ceci est l'objet du paragraphe 3 où on explicite, sous les hypothèses de stabilité du système et d'ergodicité de l'entrée, une condition d'identifiabilité de φ qui assure l'existence d'une famille convergente et asymptotiquement normale d'estimateurs du maximum de vraisemblance du paramètre. Au paragraphe 4, on montre comment estimer C préalablement à l'estimation de φ et comment estimer μ simultanément à l'estimation de φ. Enfin, le paragraphe 5 est consacré au problème (P_2) relativement à φ, pour le critère, envisagé par Mehra dans [4], de maximisation de la trace de la matrice d'information de Fisher associée à l'observation.

2. LA STRUCTURE STATISTIQUE DU PROBLÈME D'ESTIMATION

Soit D l'espace des fonctions cadlag de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Skorohod sur tout compact telle qu'elle est définie dans [5]. $\mathcal{D}_T$ désigne la tribu sur D engendrée par les applications coordonnées Π_s, $0 \leq s \leq T$ et $\mathcal{D}$ est la tribu sur D engendrée par la famille $(\mathcal{D}_T ; T \geq 0)$ qui n'est autre que la tribu borélienne de D.

On suppose qu'on observe sur [0, T] l'état $x(.) = (x_t ; t \geq 0) \in D$ d'un système dynamique stochastique contrôlé par une entrée mesurable bornée $u(.) = (u_t ; t \geq 0)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une valeur $\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ C^0 \end{pmatrix}$ du paramètre $\begin{pmatrix} \varphi \\ C \end{pmatrix}$ et une mesure μ^0, dites « vraies valeurs de $\begin{pmatrix} \varphi \\ C \end{pmatrix}$ et μ », telles que la loi de probabilité de $x(.) \in D$ est celle d'un processus $(X_t ; t \geq 0)$ solution de l'équation (1.1) avec $\varphi = \varphi^0$, $C = C^0 \neq 0$ et $\mu = \mu^0$.

On est naturellement conduit à étudier le problème (P_1) dans la structure statistique

$$(2.1) \qquad (D, \mathcal{D}_T, \{ P^T_{(\varphi,C,\mu)} ; \varphi \in \mathbb{R}^2, C \in \mathbb{R}^*, \mu \in M \})$$

où M est l'ensemble des mesures positives sur $\mathbb{R}$, finies sur tout compact ne contenant pas l'origine, possédant des moments d'ordre 1 et 2; $P^T_{(\varphi,C,\mu)}$ (resp. $Q^T_{(C,\mu)}$) désigne la restriction à $\mathcal{D}_T$ de la loi $P_{(\varphi,C,\mu)}$ (resp. $Q_{(C,\mu)}$) d'un processus solution forte de l'équation (1.1) (resp.

$$(2.2) \qquad X_t = \int_0^t C dW_s + \int v . r([0, t], dv) ; t \geq 0),$$

relativement à une base de processus portant un mouvement brownien (W_t) et une mesure de Poisson r de mesure associée μ.

(Π_t) vérifie l'équation (2.2) relativement à $Q_{(C,\mu)}$ pour la mesure de Poisson q définie par les sauts de (Π_t) permettant d'écrire :

$$(2.3) \qquad P^\mu_t = \sum_{s \leq t} (\Pi_s - \Pi_{s^-}) - t \int v d\mu(v) = \int v q([0, t], dv),\ t \geq 0,$$

et le processus de Wiener standard $(M_t^{C,\mu})$ défini par

(2.4) $$M_t^{C,\mu} = C^{-1}(\Pi_t - P_t^{\mu})\ ;\ t \geq 0.$$

On peut maintenant décrire précisément la famille

$$\{ P_{(\varphi,C,\mu)};\ (\varphi,\ C,\ \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^* \times M \}$$

de mesures :

2.1. LEMME. — *Pour tout* $T > 0$ *et tout* $(\varphi,\ C,\ \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^* \times M$, *les mesures* $P^T_{(\varphi,C,\mu)}$ *et* $Q^T_{(C,\mu)}$ *sont équivalentes, la dérivée de Radon-Nikodym étant donnée par :*

(2.5)
$$\frac{dP^T_{(\varphi,C,\mu)}}{dQ^T_{(C,\mu)}} = \exp\left\{ C^{-1}\int_0^T [\varphi_1\Pi_s + \varphi_2 u_s]dM_s^{C,\mu} - \frac{C^{-2}}{2}\int_0^T [\varphi_1\Pi_s + \varphi_{2s}u_s]^2 ds \right\}$$

où $(M_t^{C,\mu})$ *est le processus défini par* (2.3)-(2.4), *l'intégrale stochastique étant prise relativement à* $Q_{(C,\mu)}$.

Les conclusions de cet énoncé découlent immédiatement d'une extension (cf. [*6*]) du théorème de Girsanov qui assure aussi que, relativement à $P_{(\varphi,C,\mu)}$, (Π_t) est solution de l'équation (1.1) pour la mesure de Poisson q et le processus de Wiener (N_t) défini par

(2.6) $$N_t = C^{-1}\left[\Pi_t - \int_0^t (\varphi_1\Pi_s + \varphi_2 u_s)ds - \int v q[(0,\ t],\ dv)\right]\ ;\ t \geq 0,$$

On a donc

(2.7) $$\Pi_t = m_t + Y_t + Z_t;\ t \geq 0,$$

où (m_t), (Y_t), (Z_t) vérifient, respectivement, les équations différentielles :

(2.8) $$\dot{m}_t = \varphi_1 m_t + \varphi_2 u_t\ ;\ t \geq 0$$

(2.9) $$dY_t = \varphi_t Y_t dt + C dN_t\ ;\ t \geq 0$$

(2.10) $$dZ_t = \varphi_1 Z_t dt + \int v.q(dt,\ dv)\ ;\ t \geq 0,$$

avec les conditions initiales $m_0 = Y_0 = Z_0 = 0$.

2.2. REMARQUES. — *a*) Ce lemme est la clé de notre approche du problème d'identification du paramètre φ dans (1.1). En effet, il montre que si C et μ sont connus, la structure statistique est dominée et, de plus, il fournit explicitement la fonction de vraisemblance pour l'estimation de φ par la méthode du maximum de vraisemblance que nous envisageons dans le paragraphe 3.

b) Un résultat classique dans le cas de l'intégration au sens de Ito concernant l'égalité presque sûre d'intégrales stochastiques relativement à des mesures équivalentes, peut aisément être étendu au cas d'intégrales par rapport à q, telles qu'elles sont définies dans [7], pour assurer que les intégrales prises relativement à $Q_{(C,\mu)}$ peuvent aussi bien être calculées relativement à $P_{(\varphi,C,\mu)}$ et inversement.

3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE DÉRIVE LORSQUE LES CARACTÉRISTIQUES DES BRUITS SONT CONNUES

On fait ici les hypothèses suivantes :

(H_0) seul le paramètre φ est inconnu,

(H_1) le système est stable *i. e.* $\varphi_1^0 < 0$,

(H_2) $\int | v |^k d\mu(v) < + \infty ; k \in \{ 1, \ldots, 5 \}$,

(H_3) l'entrée (u_t) est ergodique au sens que, pour tout $s \geq 0$,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_t . u_{t+s} dt = \rho_u(s)$$

où ρ_u est une fonction continue.

La structure statistique du problème d'estimation est alors, omettant l'indice (C, μ) dans $P^T_{(\varphi,C,\mu)}$, $Q^T_{(C,\mu)}$ et $(M_t^{C,\mu})$:

$$(3.1) \qquad \left(D, \mathscr{D}_T, \left\{ P^T_\varphi ; \varphi \in \mathbb{R}^2, \varphi_1 < 0 \right\}\right).$$

Cette structure est dominée par la mesure Q^T, avec, d'après (2.5), une fonction de Log-vraisemblance $L_T(\varphi)$ dont une version régulière est donnée par :

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} L_T(\varphi) = C^{-1} &\left[\varphi_1 \int_0^T \Pi_s dM_s + \varphi_2 \int_0^T u_s dM_s \right] \\ &- \frac{C^{-2}}{2} \left[\varphi_1^2 \int_0^T \Pi_s^2 ds + \varphi_2^2 \int_0^T u_s^2 ds + 2\varphi_1\varphi_2 \int_0^T \Pi_s u_s ds \right]. \end{aligned}$$

en choisissant des versions des différentes intégrales.

On désigne par $L_T^{(1)}(\varphi)$ et $L_T^{(2)}(\varphi) = L_T^{(2)}$ les dérivés première et seconde de $L_T(\varphi)$ obtenues par dérivation formelle de (3.2).

Un calcul élémentaire assure, compte tenu de la remarque 2.2.*b*), le lemme suivant :

3.1. LEMME. — *On a, relativement à* P_φ^T,

$$(3.3)\quad L_T^{(1)}(\varphi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\varphi_1} L_T(\varphi) \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi_2} L_T(\varphi) \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} \int_0^T \Pi_s dN_s \\ \int_0^T u_s dN_s \end{bmatrix}$$

et

$$(3.4)\quad L_T^{(2)} = \left[\!\!\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j} L_T(\varphi) \right]\!\!\right]_{i,j\in\{1,2\}} = -C^{-2} \begin{bmatrix} \int_0^T \Pi_s^2 ds & \int_0^T u_s \Pi_s ds \\ \int_0^T u_s \Pi_s ds & \int_0^T u_s^2 ds \end{bmatrix}$$

où (N_t) *est défini par* (2.6) *et* (Π_t) *est donné par* (2.7)-(2.10).

L'étude des propriétés asymptotiques de $L_T^{(1)}(\varphi)$ et $L_T^{(2)}$ en vue d'assurer l'identifiabilité de φ par résolution de l'équation de vraisemblance

$$L_T^{(1)}(\varphi) = 0$$

nécessite un certain nombre de lemmes. Le lemme suivant montre que, éventuellement en « agrandissant » convenablement l'espace probabilisé $(D, \mathscr{D}, P_\varphi)$ en vue de définir des conditions initiales adéquates, les équations (2.9) et (2.10) admettent des solutions stationnaires :

3.2. LEMME. — *Sous les hypothèses*

i) Y_0^* *est de loi gaussienne* $\mathcal{N}\left(0, -\dfrac{C^2}{2\varphi_1}\right)$,

ii) Z_0^* *admet pour fonction caractéristique*

$$\exp\left[\frac{1}{\varphi_1}\int \Phi(uv)d\mu(v) + \frac{iu}{\varphi_2}\int v d\mu(v)\right] \qquad \textit{où} \qquad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(z)dz,$$

avec

$$\varphi(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z}$$

iii) Y_0^*, Z_0^*, (N_t) *et q sont indépendants,*

les équations (2.9) *et* (2.10) *admettent des solutions stationnaires au sens restreint* (Y_t^*) *et* (Z_t^*), *de conditions initiales* Y_0^* *et* Z_0^*. $(Y_t^* + Z_t^*)$ *est alors stationnaire au sens restreint.*

Démonstration. — (Y_t^*) étant gaussien, il est classique que (Y_t^*) est stationnaire au sens restreint. Il suffit donc de démontrer le résultat pour (Z_t^*), puisque (Y_t^*) et (Z_t^*) sont indépendants. On a

$$(3.5) \quad Z_t^* = e^{t\varphi_1}Z_0^* + e^{t\varphi_1}\int_0^t\int e^{-\varphi_1 s}vq(ds, dv) = e^{t\varphi_1}Z_0^* + e^{t\varphi_1}V_t.$$

On calcule d'abord la fonction caractéristique de V_t. Pour cela, on introduit

$$\tilde{V}_t = \int_0^t\int e^{-\varphi_1 s}vp(ds, dv).$$

où p est la mesure aléatoire définie, quels que soient t, t' éléments de $\mathbb{R}_+$, $t < t'$ et A borélien de $\mathbb{R}$ ne contenant pas l'origine, par

$$p([t, t'[, A) = q([t, t'[, A) + (t' - t)\mu(A)$$

$\tilde{V}_t$ peut s'obtenir comme la limite en moyenne quadratique de sommes de la forme (cf. [7]).

$$\Delta = \sum_{k,j} e^{-\varphi_1 t_k}v_j p([t_k, t_{k+1}[, A_j)$$

où les A_j sont disjoints.

Les variables aléatoires $p([t_k, t_{k+1}[, A_j)$ sont indépendantes et suivent respectivement la loi de Poisson de paramètre $(t_{k+1} - t_k)\mu(A_j)$.

La fonction caractéristique de Δ est donc

$$\varphi_\Delta(u) = \exp\left[\sum_{k,j}(t_{k+1} - t_k)\mu(A_j)e^{i\exp(-t_k\varphi_1)v_j u}\right].$$

Par passage à la limite, on obtient la fonction caractéristique de $\tilde{V}_t$

$$\varphi_{\tilde{V}_t}(u) = \exp\left[\int_0^t\int e^{i\exp(-\varphi_1 s)vu}ds\,d\mu(v)\right].$$

On déduit aisément de ce résultat par introduction de Φ la fonction caractéristique de $e^{t\varphi_1}.V_t$:

$$\varphi_{e^{t\varphi_1}V_t}(u) = \exp\left[\frac{1}{\varphi_1}\int\Phi(uv)d\mu(v) - \frac{1}{\varphi_1}\int\Phi(uv)e^{t\varphi_1}d\mu(v) + \frac{iu}{\varphi_1}(1 - e^{t\varphi_1})\int v\,d\mu(v)\right]$$

De (H_2) et de la définition de Φ on déduit que pour tout u

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{e^{t\varphi_1}V_t}(u) = \exp\left[\frac{1}{\varphi_1}\int \Phi(uv)d\mu(v) + \frac{iu}{\varphi_1}\int v d\mu(v)\right].$$

La fonction limite étant continue, ce qui découle de résultats ultérieurs est bien une fonction caractéristique; on donne ainsi un sens à l'hypothèse *ii*). On a, d'autre part, d'après (3.5) pour expression de la fonction caractéristique de Z_t^*

$$\varphi_{Z_t^*}(u) = \exp\left[\frac{1}{\varphi_1}\left(\int \Phi(uv)d\mu(v) + iu\int v d\mu(v)\right)\right] = \varphi_{Z_0^*}(u).$$

Pour $0 \leq t_1 \leq t_2$ et $0 \leq t$, le calcul de la fonction caractéristique de $\left(Z_{t_1+t}^*, Z_{t_2+t}^*\right)$ conduit à l'expression :

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_{t_1+t}^*,Z_{t_2+t}^*}(u_1, u_2) = \exp\Bigg[\frac{1}{\varphi_1}\int \Phi\left[\left(u_1 + u_2 e^{(t_2-t_1)\varphi_1}\right)v\right]d\mu(v) + \frac{1}{\varphi_1}\int \Phi(u_2 v)d\mu(v) \\ - \frac{1}{\varphi_1}\int \Phi\left(e^{(t_2-t_1)\varphi_1}u_2 v\right)d\mu(v) + \frac{i}{\varphi_1}(u_1+u_2)\int v d\mu(v)\Bigg] = \varphi_{Z_{t_1}^*,Z_{t_2}^*}(u_1, u_2).\end{aligned}$$

Ce résultat se généralise aux vecteurs de dimension quelconque et permet de conclure à la stationnarité restreinte. ■

3.3. LEMME. — *Au sens de la convergence en moyenne quadratique relative à* P_φ

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (Y_s^* + Z_s^*)^2 ds = \frac{-1}{2\varphi_1}K, \qquad \textit{où} \qquad K = C^2 + \int v^2 d\mu(v).$$

Démonstration. — La démonstration est une adaptation d'une démonstration de [*8*] concernant l'ergodicité des processus gaussiens et consiste à démontrer que, compte tenu du caractère restreint de la stationnarité du processus $X_t^* + Y_t^*$, si on pose $\eta_t = \left(X_t^* + Y_t^*\right)^2$, le processus stationnaire $\eta_t - E_\varphi(\eta_t)$ admet une densité spectrale, E_φ désignant l'espérance mathématique par rapport à la probabilité P_φ.

On calcule en conséquence $E_\varphi(\eta_0 . \eta_t) - [E_\varphi(\eta_t)]^2$, fonction de covariance de ce processus.

D'une part, on déduit de $Y_t^* = Y_0^* e^{t\varphi_1} + Ce^{t\varphi_1}\int_0^t e^{-\varphi_1 s}dN_s$ que

$$E_\varphi\left(Y_t^{*2}.Y_0^{*2}\right) = \frac{C^4}{4\varphi_1^2} + e^{2t\varphi_1}\frac{C^4}{2\varphi_1^2}. \tag{3.6}$$

D'autre part, d'après (3.5), on a

$$\mathrm{E}_\varphi(\mathrm{Z}_t^{*2}.\mathrm{Z}_0^{*2}) = e^{2t\varphi_1}\mathrm{E}_\varphi(\mathrm{Z}_0^{*4}) + \frac{e^{2t\varphi_1}}{-2\varphi_1}(e^{-2\varphi_1 t} - 1)\left(\int v^2 d\mu(v)\right).\mathrm{E}(\mathrm{Z}_0^{*2})$$

L'hypothèse (H_2) permet de démontrer que la fonction $\mathrm{F}(u) = \int \Phi(uv)d\mu(v)$ est dérivable jusqu'à l'ordre 4 et que, pour $k = 1, \ldots, 4$,

$$\mathrm{F}^{(k)}(u) = \int v^k \varphi^{(k-1)}(uv)d\mu(v).$$

Ce résultat permet de montrer que la fonction caractéristique de Z_0^* est 4 fois dérivable et, par calcul de ces dérivées, on obtient

$$\mathrm{E}_\varphi(\mathrm{Z}_0^{*2}) = -\frac{1}{2\varphi_1}\int v^2 d\mu(v)$$

$$\mathrm{E}_\varphi(\mathrm{Z}_0^{*4}) = -\frac{1}{4\varphi_1}\int v^4 d\mu(v) + \frac{3}{4\varphi_1^2}\left(\int v^2 d\mu(v)\right)^2.$$

On en déduit, par utilisation de (3.5) et de la décomposition de même type de Y_t^*

(3.7)

$$\mathrm{E}_\varphi(\mathrm{Z}_t^{*2}.\mathrm{Z}_0^{*2}) = \frac{1}{4\varphi_1^2}\left(\int v^2 d\mu(v)\right)^2 + e^{2t\varphi_1}\left[\frac{-\int v^4 d\mu(v)}{4\varphi_1} + \frac{\left(\int v^2 d\mu(v)\right)^2}{2\varphi_1^2}\right].$$

(3.8)
$$\mathrm{E}_\varphi(\mathrm{Y}_t^*\mathrm{Z}_t^*\mathrm{Y}_0^*\mathrm{Z}_0^*) = e^{2t\varphi_1}\frac{\mathrm{C}^2\int v^2 d\mu(v)}{4\varphi_1^2}.$$

(3.6), (3.7), (3.8) entraînent, par un calcul simple, qu'il existe une constante k telle que

$$\mathrm{E}_\varphi(\eta_0.\eta_t) - (\mathrm{E}_\varphi(\eta_t))^2 = ke^{2t\varphi_1} = -k\frac{2\varphi_1}{\Pi}\int\frac{e^{i\lambda t}d\lambda}{\lambda^2 + 4\varphi_1^2}$$

Un théorème ergodique classique permet alors de conclure que

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty}\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}(\eta_s - \mathrm{E}_\varphi(\eta_s))ds = 0$$

au sens de la convergence en moyenne quadratique par rapport à P_φ.

Le résultat du lemme est alors obtenu en remarquant que

$$\mathrm{E}_\varphi(\eta_t) = \frac{-\mathrm{K}}{2\varphi_1}. \quad \blacksquare$$

(H_3) permet de montrer (cf. [9]) que $(u_t;\ t \geq 0)$ admet une mesure spectrale M^u au sens suivant : à une fonction h mesurable bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^k$ telle que pour tout $s \geq 0$, $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T h_t.h'_{t+s}dt = \rho_h(s)$, où ρ_h est une fonction continue, est associée une mesure bornée M^h sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'ensemble des matrices hermitiennes positives $k \times k$ telle que

$$\rho_h(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{is\lambda}dM^h(\lambda)$$

et, posant $h_T(\lambda) = \int_0^T e^{-it\lambda}h_t dt$, on a :

$$M^h = \underset{T\to+\infty}{\text{limite faible}} \left[\frac{1}{2\Pi T} h_T(.).\overline{h'_T}(.)\beta\right]$$

β désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

3.4. LEMME. — *La fonction* $\left(\begin{bmatrix} m_t \\ u_t \end{bmatrix};\ t \geq 0\right)$, *où* $(m_t;\ t \geq 0)$ *est solution de* (2.8) *de condition initiale* $m_0 = 0$, *admet la mesure spectrale* $M^{\varphi,u}$ *définie par*

$$dM^{\varphi,u}(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \lambda^2} & -\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1 - i\lambda} \\ -\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1 + i\lambda} & 1 \end{bmatrix} dM^u(\lambda).$$

Démonstration. — $(m_t;\ t \geq 0)$ étant mesurable bornée, $\left(\begin{bmatrix} m_t \\ u_t \end{bmatrix};\ t \geq 0\right)$ aura une mesure spectrale si et seulement si la limite faible quand $T \to +\infty$ de

$$(2\Pi T)^{-1}\begin{bmatrix} m_T(.) \\ u_T(.) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{m}_T(.) \\ \overline{u}_T(.) \end{bmatrix}' . \beta$$

existe, la limite n'étant alors autre que $M^{\varphi,u}$ (cf. [9]).

Un calcul élémentaire montre que :

$$m_T(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}.\tilde{m}_t^T.dt - \int_T^{+\infty} e^{-i\lambda t}.e^{(t-T)\varphi_1}.m_T dt$$

où, si

$$\tilde{u}_t^T = \begin{cases} u_t & \text{si} \quad t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T, \end{cases}$$

$(\tilde{m}_t^{\mathrm{T}}; t \geq 0)$ désigne la solution de (2.8) pour l'entrée $(\tilde{u}_t^{\mathrm{T}}; t \geq 0)$, de condition initiale $\tilde{m}_0^{\mathrm{T}} = 0$.

D'une part, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}.\tilde{m}_t^{\mathrm{T}} dt = \frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}.\tilde{m}_t^{\mathrm{T}}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{-\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}.\dot{\tilde{m}}_t^{\mathrm{T}} dt$$
$$= \frac{1}{i\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}[\varphi_1 \tilde{m}_t^{\mathrm{T}} + \varphi_2 \tilde{u}_t^{\mathrm{T}}]dt$$

de sorte que

$$(\varphi_1 - i\lambda).\int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}.\tilde{m}_t^{\mathrm{T}} dt = -\varphi_2 \int_0^{\mathrm{T}} e^{-i\lambda t}.u_t dt,$$

soit

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}.\tilde{m}_t^{\mathrm{T}} dt = -\varphi_2(\varphi_1 - i\lambda)^{-1} u_{\mathrm{T}}(\lambda).$$

D'autre part, on a :

$$\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} e^{-i\lambda t}.e^{(t-\mathrm{T})\varphi_1}.m_{\mathrm{T}} dt = -e^{-i\lambda \mathrm{T}}(\varphi_1 - i\lambda)^{-1}.m_{\mathrm{T}}.$$

On peut donc écrire, en posant $\mathrm{C_T}(\lambda) = e^{-i\lambda \mathrm{T}}(\varphi_1 - i\lambda)^{-1}.m_{\mathrm{T}}$,

$$m_{\mathrm{T}}(\lambda) = -(\varphi_1 - i\lambda)^{-1}.\varphi_2.u_{\mathrm{T}}(\lambda) + \mathrm{C_T}(\lambda)$$

où

$$|\mathrm{C_T}(\lambda)| = |e^{-i\lambda \mathrm{T}}.(\varphi_1 - i\lambda)^{-1}.m_{\mathrm{T}}|$$
$$\leq \nu(\varphi_1^2 + \lambda^2)^{-1/2}$$

avec $\nu = \sup_{t \geq 0} |m_t|$.

On a

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{C_T}(\lambda) u_{\mathrm{T}}(\lambda)| d\lambda \leq \left[\mathrm{T}^{-1}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{C_T}(\lambda)|^2 d\lambda\right]^{1/2}.\left[\mathrm{T}^{-1}\int_{\mathbb{R}} |u_{\mathrm{T}}(\lambda)|^2 d\lambda\right]^{1/2}$$
$$\leq \mathrm{T}^{-1/2}\left[\int_{\mathbb{R}} \nu^2[\varphi_1^2 + \lambda^2]^{-1} d\lambda\right]^{1/2}.\left[\mathrm{T}^{-1}\int_{\mathbb{R}} |u_{\mathrm{T}}(\lambda)|^2 d\lambda\right]^{1/2}$$
$$\leq \rho.\mathrm{T}^{-1/2}$$

pour une certaine constante $\rho > 0$ puisque, d'une part

$$\int_{\mathbb{R}} [\varphi_1^2 + \lambda^2]^{-1}.d\lambda < +\infty$$

et d'autre part,

$$\lim_{\mathrm{T} \to +\infty} (2\pi \mathrm{T})^{-1}.\int_{\mathbb{R}} |u_{\mathrm{T}}(\lambda)|^2 d\lambda = \mathrm{M}^u(\mathbb{R}) < +\infty.$$

Ainsi, on a montré que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{\mathbb{R}} | C_T(\lambda) . u_T(\lambda) | \, d\lambda = 0.$$

De même, on a pour toute fonction continue bornée g,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{\mathbb{R}} | g(\lambda) . C_T(\lambda) . u_T(\lambda) | \, d\lambda = 0.$$

Compte tenu de la majoration de $C_T(\lambda)$ on a aussi :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{\mathbb{R}} | g(\lambda) . C_T^2(\lambda) | \, d\lambda = 0.$$

On est alors en mesure d'assurer que la limite faible de

$$(2\Pi T)^{-1} . \begin{bmatrix} | m_T(.) |^2 & m_T(.) . \bar{u}_T(.) \\ u_T(.) . \bar{m}_T(.) & | u_T(.) |^2 \end{bmatrix} . \beta$$

n'est autre que celle de

$$\frac{d\lambda}{2\Pi T} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_2^2 . (\varphi_1^2 + \lambda^2)^{-1} . | u_T(\lambda) |^2 & - \varphi_2(\varphi_1 - i\lambda)^{-1} . | u_T(\lambda) |^2 \\ - \varphi_2 . (\varphi_1 + i\lambda)^{-1} . | u_T(\lambda) |^2 & | u_T(\lambda) |^2 \end{bmatrix}$$

ce qui fournit le résultat annoncé. ■

3.5. LEMME. — *On a, par rapport à* P_φ

$$(3.9) \qquad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} Y_s + Z_s \\ m_s \\ u_s \end{bmatrix}^{2\otimes} ds = \begin{bmatrix} -\dfrac{K}{2\varphi_1} & 0 \\ 0 & M^{\varphi,u}(\mathbb{R}) \end{bmatrix} = \Gamma_u(\varphi)$$

au sens de la convergence L^1 *et*

$$(3.10) \qquad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \begin{bmatrix} Y_s + Z_s \\ m_s \\ u_s \end{bmatrix} dN_s = \Delta_u(\varphi)$$

au sens de la convergence en loi, où $\Delta_u(\varphi) = [\Delta_u^i(\varphi); i = 1, 2, 3]$ *est un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariances* $\Gamma_u(\varphi)$.

Démonstration. — On démontre d'abord que

$$(3.11) \qquad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} Y_s^* + Z_s^* \\ m_s \\ u_s \end{bmatrix}^{2\otimes} ds = \Gamma_u(\varphi) \text{ en moyenne quadratique.}$$

(3.11) est une conséquence immédiate des lemmes 3.3 et 3.4, puisque

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \begin{bmatrix} m_s \\ u_s \end{bmatrix}^{2\otimes} ds = M^{\varphi,u}(\mathbb{R}),$$

si l'on montre que

$$(3.12)\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (Y_s^* + Z_s^*).\begin{bmatrix} m_s \\ u_s \end{bmatrix}' ds = 0 \text{ en moyenne quadratique.}$$

Un calcul préliminaire dans l'esprit de ceux de la démonstration du lemme 3.3 permet de montrer que

$$E_\varphi[(Y_0^*+Z_0^*)(Y_t^*+Z_t^*)] = e^{t\varphi_1}E_\varphi(Y_0^{*2}+Z_0^{*2}) = \frac{-Ke^{t\varphi_1}}{2\varphi_1} = \frac{K}{2\Pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\lambda t}}{\lambda^2+\varphi_1^2}\,d\lambda.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} E_\varphi\left\|\frac{1}{T}\int_0^T (Y_s^*+Z_s^*)\begin{bmatrix} m_s \\ u_s \end{bmatrix}' ds\right\|^2 &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \frac{K}{2\Pi}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\lambda(s-s')}}{\lambda^2+\varphi_1^2}d\lambda\right)(m_s m_{s'}+u_s u_{s'})ds\,ds' \\ &= \frac{1}{T^2}\int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_0^T\int_0^T \frac{K}{2\Pi}\cdot\frac{e^{i\lambda(s-s')}}{\lambda^2+\varphi_1^2}(m_s m_{s'}+u_s u_{s'})ds\,ds' \\ &= \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} \frac{K}{2\Pi}\cdot\frac{1}{\lambda^2+\varphi_1^2}\left(\frac{1}{T}\left|\int_0^T e^{i\lambda s}m_s ds\right|^2 + \frac{1}{T}\left|\int_0^T e^{i\lambda s}u_s ds\right|^2\right)d\lambda. \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\lambda^2+\varphi_1^2}$ étant une fonction de λ continue et bornée

$$\lim_{T\to+\infty} T E_\varphi\left\|\frac{1}{T}\int_0^T (Y_s^*+Z_s^*)\begin{bmatrix} m_s \\ u_s \end{bmatrix}' ds\right\|^2 = K\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^2+\varphi_1^2}\left(dM_{1,1}^{\varphi,u}+dM_{2,2}^{\varphi,u}\right) < +\infty,$$

où $M^{\varphi,u} = \left(\left(M_{i,j}^{\varphi,u}\right)\right)_{i,j=1,2}$.

(3.12) est donc vérifiée, et par suite (3.11) aussi.

(3.9) découle alors de (3.11) en remarquant que (u_t) et (m_t) sont bornées, et que, d'autre part,

$$E_\varphi\left|\frac{1}{T}\int_0^T (Y_s+Z_s)^2 ds - \frac{1}{T}\int_0^T (Y_s^*+Z_s^*)^2 ds\right| \leq \frac{K\sqrt{2}}{T\varphi_1^2},$$

inégalité qui résulte par un calcul élémentaire de

$$Y_t^* + Z_t^* = e^{t\varphi_1}(Y_0^*+Z_0^*) + Y_t + Z_t.$$

(3.10) découle, par un théorème limite de Taraskin [*10*], de (3.9) et de l'égalité, facile à vérifier

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E_\varphi\begin{bmatrix} Y_s+Z_s \\ m_s \\ u_s \end{bmatrix}^{2\otimes} ds = \Gamma_u(\varphi). \quad \blacksquare$$

La proposition suivante décrit alors le comportement asymptotique des dérivées de $L_T(\varphi)$.

3.6. PROPOSITION. — *On a relativement à* P_φ,

i) $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} L_T^{(1)}(\varphi) = 0$ *au sens de la convergence en moyenne quadratique*

ii) $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} L_T^{(2)} = -J_u(\varphi)$ *au sens de la convergence en moyenne d'ordre 1*

iii) $\lim_{T\to\infty+} \frac{1}{\sqrt{T}} L_T^{(1)}(\varphi) = \nabla_u(\varphi)$ *au sens de la convergence en loi*

où la matrice $J_u(\varphi)$ *est donnée par*

$$J_u^{i,j}(\varphi) = H_i.\Gamma_u(\varphi).H_j' \; ; \; i, j = 1, 2 \tag{3.13}$$

avec

$$H_i = C^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_i}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_i}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_i}\right) \; ; \; i = 1, 2,$$

$\Gamma_u(\varphi)$ *étant définie par* (3.9). *et* $\nabla_u(\varphi)$ *est un vecteur aléatoire de loi normale centrée, de matrice de covariances* $J_u(\varphi)$.

Démonstration. — D'après le lemme (3.1), on a

$$E_\varphi \left\| \frac{L_T^{(1)}(\varphi)}{T} \right\|^2 = \frac{1}{T^2}\int_0^T C^{-2} E_\varphi \mid \Pi_s \mid^2 ds + \frac{1}{T^2}\int_0^T C^{-2} u_s^2 ds. \tag{3.14}$$

La décomposition (2.7) conduit, par un calcul élémentaire, à une majoration de la forme

$$\int_0^t E_\varphi \mid \Pi_s \mid^2 ds \leq \alpha e^{2t\varphi_1} + \beta e^{t\varphi_1} + \gamma t + \delta, \; \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ constantes.}$$

Cette majoration et le fait que (u_t) est borné assurent le point *i)* grâce à (3.14). Le point *ii)* découle immédiatement de (3.9) en remarquant que (3.4) peut s'écrire

$$L_{T,i,j}^{(2)} = -\int_0^T H_i.\begin{bmatrix} Y_s + Z_s \\ m_s \\ u_s \end{bmatrix}^{2\otimes} .H_j' ds \; ; \; i, j = 1, 2.$$

Le fait que $\frac{1}{\sqrt{T}} L_T^{(1)}(\varphi)$ converge en loi vers un vecteur de loi normale centrée résulte de ce que (3.3) peut s'écrire tr $\int_0^T H_i \begin{bmatrix} Y_s + Z_s \\ m_s \\ u_s \end{bmatrix} .dN_s; \; i = 1, 2,$

et de (3.10). Un calcul simple montre que la matrice de covariances du vecteur limite a la valeur donnée dans l'énoncé. ■

Cette proposition conduit à la solution suivante des problèmes d'identifiabilité et d'identification de φ dans la structure statistique (3.1) :

3.7. PROPOSITION. — *Si la vraie valeur φ^0 du paramètre φ vérifie la condition* (C)$J_u(\varphi^0)$ *est régulière, alors le système est identifiable. De façon plus précise sous la condition* (C) *l'élément de $\mathscr{D}_T$ défini par*

$$D_T = \{ x \in D \mid L_T^{(2)}(x) \text{ est régulière} \}$$

satisfait

$$\lim_{T \to +\infty} P_{\varphi^0}(D_T) = 1,$$

et si l'on pose, pour un élément quelconque $\widehat{\varphi}$ de $\mathbb{R}^2$

$$\widehat{\varphi}_T(x) = \begin{cases} -[L_T^{(2)}(x)]^{-1} . L_T^{(1)}(0, x) & \text{si} \quad x \in D_T \\ \widehat{\varphi} & \text{si} \quad x \notin D_T \end{cases}$$

la famille $\{ \widehat{\varphi}_T \}_{T \geq 0}$, adaptée à $\{ \mathscr{D}_T \}_{T \geq 0}$ vérifie

i) $\lim_{T \to \infty} P_{\varphi^0}[L_T^{(1)}(\widehat{\varphi}_T) = 0] = 1,$

ii) $\lim_{T \to +\infty} \widehat{\varphi}_T = \varphi^0$ *au sens de la convergence en probabilité par rapport à* P_{φ^0},

iii) $T^{1/2} . [\widehat{\varphi}_T - \varphi^0]$ *converge en loi, par rapport à* P_{φ^0}, *vers un vecteur de loi gaussienne centrée de matrice de covariances* $[J_u(\varphi^0)]^{-1}$, *où* $J_u(\varphi^0)$ *est donnée par* (3.13).

Démonstration. — L'hypothèse d'inversibilité de $J_u(\varphi^0)$ assure que cette matrice est définie-positive. On a donc

(3.15) $$\inf_{v \in \mathbb{R}^2, \|v\| = 1} \{ v' J_u(\varphi^0) v \} = \gamma^0 > 0, \quad \text{et} \quad v' J_u(\varphi^0) v \geq \gamma^0 \| v \|^2 \quad \text{pour tout } v.$$

On a d'autre part,

$$\left\langle \frac{1}{T} L_T^{(2)} v, v \right\rangle = \langle - J_u(\varphi^0) v, v \rangle + \left\langle \left[\frac{1}{T} L_T^{(2)} + J_u(\varphi^0) \right] v, v \right\rangle,$$

relation qui assure que

$$\left\langle \frac{1}{T} L_T^{(2)} v, v \right\rangle < 0, v \neq 0, \qquad \text{si} \qquad \left\| \frac{1}{T} L_T^{(2)} + J_u(\varphi^0) \right\| < \frac{\gamma^0}{2}.$$

On a donc

$$D_T \supset \left\{ \left\| \frac{1}{T} L_T^{(2)} + J_u(\varphi^0) \right\| < \frac{\gamma^0}{2} \right\}.$$

Le point *ii*) de la proposition 3.6 entraîne donc que $\lim\limits_{T \to +\infty} P_{\varphi^0}(D_T) = 1$.

Comme, par construction,

$$\{ L_T^{(1)}(\widehat{\varphi}_T) = 0 \} \supset D_T$$

on a le point *i*).

On peut écrire

$$\varphi^0 - \widehat{\varphi}_T(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{T} L_T^{(2)}(x)\right]^{-1} \cdot \left[\frac{1}{T} L_T^{(1)}(\varphi^0, x)\right] & \text{si} \quad x \in D_T \\ \varphi^0 - \widehat{\varphi} & \text{si} \quad x \notin D_T \end{cases}$$

d'où le point *ii*) d'après *i*) et *ii*) de la proposition 3.6, et le fait que

$$\lim_{T \to +\infty} P_{\varphi^0}(D_T) = 1.$$

On conclut de même pour le point *iii*) en remarquant que

$$T^{1/2}(\varphi^0 - \widehat{\varphi}_T(x)) = \left[\frac{1}{T} L_T^{(2)}(x)\right]^{-1} \cdot \left[\frac{1}{T^{1/2}} L_T^{(1)}(\varphi^0, x)\right],$$

et en utilisant *ii*) et *iii*) de la proposition 3.6. ■

3.8. Remarques. — *a*) Il est facile de démontrer que toute famille $\{ \tilde{\varphi}_T \}_{T \geq 0}$ adaptée à $\{ \mathcal{D}_T \}_{T \geq 0}$ d'estimateurs vérifiant *i*) vérifie aussi *ii*) et *iii*), et est telle que

$$\lim_{T \to +\infty} P_{\varphi^0}\{ \tilde{\varphi}_T = \widehat{\varphi}_T \} = 1.$$

b) La dépendance en (u_t) de la matrice de covariances asymptotique de l'estimateur $\widehat{\varphi}_T$ invite à traiter le problème du choix de l'entrée en vue d'améliorer la précision de l'estimation. C'est ce qui est fait au paragraphe 5.

4. ESTIMATION DES CARACTÉRISTIQUES DES BRUITS

Soit p la mesure de Poisson liée à q par

$$p(\Delta, A) = q(\Delta, A) + |\Delta| \mu(A)$$

où $|\Delta|$ désigne la mesure de Lebesgue du borélien Δ de $\mathbb{R}_+$.

A l'aide de p, et relativement à Q, le processus (Π_t) s'écrit

$$\Pi_t = A_t + B_t \qquad \text{où} \qquad A_t = CM_t - t\int v d\mu(v), \qquad B_t = \int vp([0, t], dv).$$

4.1. Estimation de C

Soit l'intervalle [0, T]. Pour tout entier N on divise cet intervalle en K_N intervalles par une suite croissante $\{ t_i^N \}_{i=0,\dots,K_N}$ et on pose

$$\delta_N = \max_{i=1,\dots,K_N} | t_i^N - t_{i-1}^N |.$$

Soit

$$G_N = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{K_N} | A_{t_i} - A_{t_{i-1}} |^2$$

4.1.1. Proposition. — *Si* $\sum_N \delta_N < +\infty$, *alors* P_φ^T *p-s.* $\{ G_N \}$ *converge vers* C^2.

Démonstration. — Si on pose $\int v d\mu(v) = \lambda$, un calcul conduit à

$$E_{Q^T} | G_N - C^2 |^2 = \frac{2C^4}{K_N} + 4\frac{\lambda^2 C^2 T}{K_{N^2}} + \frac{\lambda^4 T^2}{K_{N^2}}.$$

Cette égalité implique la convergence en moyenne quadratique, relativement à Q^T, de G_N vers C^2. L'hypothèse $\sum_N \delta_N < +\infty$ entraîne alors que

$$\sum_N E_{Q^T} | G_N - C^2 | < +\infty.$$

Cette condition assure que la convergence a lieu aussi Q^T*p-s.*, donc P_φ^T *p-s.*, puisque ces deux mesures sont équivalentes. ■

4.2. Estimation de μ

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ ne contenant pas l'origine. Pour tout $t > 0$, $p([0, t], I)$ représente le nombre de sauts sur $[0, t]$ du processus (B_s)

dont l'amplitude appartient à I; relativement à Q et P_φ, c'est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $t.\mu(I)$ (cf. [*1*]).

La proposition suivante est de démonstration élémentaire.

4.2.1. PROPOSITION. — *En moyenne quadratique relativement à* P_φ,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} p([0, t], I) = \mu(I).$$

4.3. Commentaires

a) Les propositions 4.1.1 et 4.2.1 permettent théoriquement d'estimer C et μ, puisque, pour tout $t > 0$, $Q^t p$-*s*.,

$$B_s = \sum_{v \leq s} \Pi_v - \Pi_{v^-}, \qquad \text{et} \qquad A_s = \Pi_s - B_s, \ s \leq t.$$

$Q^t p$-*s*., pour chaque trajectoire $x(.)$ observée sur $[0, t]$ on peut donc obtenir $A_s(x(.))$ et $B_s(x(.))$, $s \leq t$. Toutefois, ceci n'est effectivement envisageable que si le nombre de sauts de (Π_s) sur $[0, t]$ est fini.

La fonction caractéristique de B_t étant donnée par

$$\varphi_{B_t}(s) = \exp\left[t \int (e^{ivs} - 1) d\mu(v)\right]$$

il résulte de [*1*] que, si μ *est finie*, pour tout intervalle $[0, t]$, $Q^t p$-*s*., (B_s) est un processus dont les trajectoires sont constantes par morceaux, avec un nombre fini de discontinuités.

L'hypothèse μ finie semble donc l'hypothèse raisonnable à imposer pour obtenir (A_s) et (B_s).

b) La proposition 4.1.1 montre que, (A_s) étant connu sur un intervalle de temps fini, C peut être théoriquement estimé sur cet intervalle de temps, et ce, préalablement à l'estimation de tous les autres paramètres inconnus. On signale d'ailleurs que, dans le cas où (1.1) ne contient pas l'intégrale par rapport à une mesure de Poisson, Le Breton dans [*2*] a montré que la suite $\{ \delta_N^{1/2} \mid G_N - C^2 \mid \}_N$ est bornée en moyenne quadratique.

c) La proposition 4.2.1 montre que, à l'aide d'un recouvrement de $\mathbb{R} - \{ 0 \}$ par un ensemble dénombrable d'intervalles disjoints, on peut, par observation d'une trajectoire sur un intervalle de temps suffisamment grand, obtenir une approximation de μ aussi bonne que possible, et ce, indépendamment de la connaissance des autres paramètres. La connaissance d'une approximation de μ permet pour une intégrale stochastique par rapport à q d'obtenir une approximation de cette intégrale; ainsi, dans le cas de la formule (2.5), où apparaît une telle intégrale par l'intermédiaire de (M_t) et de (2.3), (2.4).

d) L'obtention de μ, au contraire de celle de C qui se pratique sur un intervalle de temps fini, doit, si l'expérience ne peut être répétée, se faire simultanément à celle de φ, ce qui pose le problème du choix de l'intervalle où est effectuée l'estimation.

Dans tous les cas, le problème de l'erreur introduite dans l'estimation de φ par une approximation de μ ou de C se pose.

5. ENTRÉE OPTIMALE POUR L'ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE DÉRIVE

Le problème de choix d'entrées en vue d'améliorer les performances de méthodes d'estimation de paramètres a fait l'objet d'une littérature assez abondante, surtout dans le cas des systèmes à temps discret (voir par exemple [*11*], [*4*]). L'approche que nous choisissons ici est basée sur l'optimisation d'un critère construit sur la matrice d'information de Fisher (cf. [*4*]).

5.1. LEMME. — *La matrice d'information de Fisher* $J_{u,T}(\varphi)$ *associée à la structure statistique* (3.1) *est* :

$$J_{u,T}(\varphi) = C^{-2}\begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^T m_s^2 ds + K\int_0^T\left(\int_0^s e^{2(s-v)\varphi_1}dv\right)ds & \displaystyle\int_0^T u_s m_s ds \\ \displaystyle\int_0^T u_s m_s ds & \displaystyle\int_0^T u_s^2 ds \end{bmatrix}$$

Ce lemme découle par un calcul élémentaire du fait que

$$E_\varphi\big(L_T^{(1)}(\varphi)\big) = 0, \quad \text{égalité qui entraîne que}$$
$$J_{u,T}(\varphi) = E_\varphi[L_T^{(1)}(\varphi).\big(L_T^{(1)}(\varphi)\big)'].$$

En vue d'optimiser la qualité de l'estimation, on pourrait envisager de choisir dans la classe $\mathcal{U}$ des entrées admissibles une entrée qui rende minimale tr $(J_{u,T}(\varphi))^{-1}$, ou tr $(J_u(\varphi))^{-1}$, suivant qu'il s'agit d'estimer φ au vu d'une observation sur [0 ,T] pour T fini ou T croissant indéfiniment. Cette approche conduit à des problèmes de contrôle optimal non linéaires dont la résolution nécessite, par exemple, des méthodes de gradient.

On propose ici d'aborder (P_2) sur [0, T], (resp. pour T croissant indéfiniment) relativement au critère Max tr $(J_{u,T}(\varphi))$ (resp. Max Tr $J_u(\varphi)$). Cette approche conduit au problème de contrôle optimal classique : maximiser sur $\mathcal{U}$

$$\int_0^T (u_s^2 + m_s^2)ds \left(\text{resp.} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (u_s^2 + m_s^2)\right)ds$$

lorsque m_t vérifie

$$\dot{m}_t = \varphi_1 m_t + \varphi_2 u_t \quad ; \quad m_0 = 0.$$

L'ensemble $\mathcal{U}$ est défini par une contrainte sur l'amplitude ou une contrainte sur l'énergie.

5.2. Remarque. — Il est important d'étudier la dépendance éventuelle vis-à-vis de φ des contrôles optimaux, et la possibilité d'utiliser des contrôles adaptés à l'estimateur. Il convient de remarquer l'antagonisme qu'il y a entre la volonté d'améliorer l'identification du système et celle qu'on pourrait avoir de le réguler par minimisation d'une énergie. Ainsi se pose le problème de choisir un compromis entre ces deux objectifs, si régulation et estimation doivent être menées simultanément.

5.3. Exemples pour l'estimation sur [0, T].

5.3.1. La classe $\mathcal{U}$ est définie par la contrainte

$$\sup_{t\in[0,T]} |u_t| \leq 1.$$

Le principe du maximum (cf. théorème 7, [*12*]) assure que, pour que u soit optimal, il doit exister une fonction ψ non nulle telle que

$$\dot{\psi}_t = -\varphi_1 . \psi_t - 2m_t \quad ; \quad t \geq 0 \quad ; \quad \psi_T = 0 \tag{5.1}$$

et pour tout t, $0 \leq t \leq T$,

$$\psi_t . \varphi_2 . u_t + u_t^2 = \sup_{|u|\leq 1} \{ \psi_t . \varphi_2 . u + u^2 \}.$$

Il est clair que la solution de cette dernière équation est donnée par

$$u_t = \text{signe}\,(\psi_t . \varphi_2)$$

et donc, s'il existe un contrôle optimal, celui-ci est nécessairement « bang-bang ». Puisque pour un tel contrôle on a $|u_t|^2 = 1$, il suffit de rechercher un contrôle optimal parmi les contrôles « bang-bang » relativement au critère

$$\text{Max} \int_0^T m_t^2 . dt.$$

Un calcul facile montre que

$$\int_0^T m_t^2 dt \leq \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 . \int_0^T (1 - e^{t\varphi_1})^2 dt$$

et que les contrôles constants $u_t^\varepsilon = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, $t \in [0, T]$, réalisent la borne supérieure. Ces contrôles sont donc optimaux, et ce, uniformément par rapport à φ_1 et φ_2.

5.3.2. La classe $\mathcal{U}$ est définie par la contrainte

$$\int_0^T u_t^2 dt \leq 1.$$

Le problème de contrôle est équivalent au problème de la minimisation parmi les contrôles mesurables de

$$\int_0^T [- m_t^2 - (1 - \lambda)u_t^2] dt,$$

où le multiplicateur de Lagrange λ est choisi de manière que la contrainte soit satisfaite. Le principe du maximum (cf. [*12*]) assure que, pour que u soit optimal, il doit exister une fonction ψ non nulle telle que (5.1) soit vérifiée et, pour tout t, $0 \leq t \leq T$,

$$\psi_t . \varphi_2 . u_t + (1 - \lambda)u_t^2 = \sup_{u \in \mathbb{R}} \{ \psi_t . \varphi_2 . u + (1 - \lambda)u^2 \}$$

Pour $1 - \lambda < 0$, cette équation admet une solution unique donnée par :

$$u_t = - \frac{\psi_t . \varphi_2}{2(1 - \lambda)} .$$

Ainsi le problème se ramène à celui de la recherche d'un λ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - \lambda < 0 \\ \begin{bmatrix} \dot{m}_t \\ \dot{\psi}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & - \varphi_2^2/2(1 - \lambda) \\ - 2 & - \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t \\ \psi_t \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} m_0 \\ \psi_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \displaystyle\int_0^T \frac{\varphi_2^2 . \psi_t^2}{4(1 - \lambda)^2} dt = 1 \\ \displaystyle\int_0^T m_t^2 dt \text{ maximum} \end{array}\right.$$

Une solution à ce problème ne peut exister qu'avec $\varphi_1^2 + \varphi_2^2/1 - \lambda < 0$, car dans le cas contraire les solutions de l'équation différentielle sont de type exponentiel et ne peuvent à la fois vérifier $m_0 = 0$, $\psi_T = 0$ et $\int_0^T \psi_t^2 dt \neq 0$.

Dans le cas où $\varphi_1^2 + \varphi_2^2/1 - \lambda < 0$, ce qui équivaut à $1 < \lambda < 1 + \varphi_2^2/\varphi_1^2$ puisque $1 - \lambda < 0$, posant

$$\delta = [-(\varphi_1^2 + \varphi_2^2/1 - \lambda)]^{1/2}$$

ou

$$1 - \lambda = \frac{-\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \delta^2}.$$

la solution de l'équation différentielle est de la forme

$$\begin{aligned} m_t &= a \sin(\delta t + p) \\ \psi_t &= b \sin(\delta t + q). \end{aligned}$$

Les conditions initiale et finale impliquent que δ doit être solution de l'équation

$$\text{(5.2)} \qquad \operatorname{tg} \delta \mathrm{T} = \delta/\varphi_1,$$

dont on notera $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n < \delta_{n+1} \ldots$ les solutions strictement positives, auquel cas on a

$$\begin{cases} m_t = \dfrac{(-1)^k . \varphi_2^2 . b}{2(1-\lambda)\delta} . \sin \delta \mathrm{T} . \sin \delta t \\ \psi_t = (-1)^k . b . \sin \delta(t - \mathrm{T}). \end{cases}$$

Ainsi, on doit rechercher un contrôle optimal parmi ceux de la famille $\{ u^i ; i = 1, 2, \ldots \}$ où

$$u_t^i = (-1)^k \frac{b_i(\varphi_1^2 + \delta_i^2) . \sin \delta_i(t - \mathrm{T})}{2\varphi_2} ; \qquad i = 1, 2, \ldots$$

et b_i est choisi de manière à réaliser l'égalité :

$$\int_0^{\mathrm{T}} (u_t^i)^2 dt = 1,$$

à savoir,

$$b_i = \frac{\pm 2\varphi_2}{(\varphi_1^2 + \delta_i^2)\left(\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \sin^2 \delta_i t . dt\right)^{1/2}}.$$

Comme la trajectoire d'état correspondant à u^i est définie par

$$m_t^i = \frac{(-1)^{k+1} b_i(\varphi_1^2 + \delta_i^2)}{2\delta_i} . \sin \delta_i \mathrm{T} . \sin \delta_i t \quad ; \quad t \geq 0,$$

de manière à maximiser $\int_0^T (m_t^i)^2 dt$, il faut faire en sorte que la quantité

$$\frac{b_i^2(\varphi_1^2 + \delta_i^2)}{4\delta_i^2} . \sin^2 \delta_i T . \int_0^T \sin^2 \delta_i t . dt$$

soit maximum. On obtient immédiatement que δ_i doit être choisi le plus petit possible. Ainsi les contrôles

$$v_t^\varepsilon = \frac{\varepsilon \operatorname{Sin}(\delta_1(t - T))}{\left(\int_0^T \operatorname{Sin}^2(\delta_1 t) dt\right)^{1/2}}, \qquad \varepsilon = \pm 1,\ t \in [0, T],$$

δ_1 étant la plus petite solution positive de l'équation (5.2), sont optimaux uniformément par rapport à φ_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. I. GIHMAN, A. V. SKOROKHOD, *Introduction to the theory of random processes*, Saunders, 1969.

[2] A. LE BRETON, *Parameter estimation and input design in a linear dynamical system*, Rapport de Recherches n° 86, L. A. au C. N. R. S. n° 7, Institut de Recherches en Mathématiques avancées, B. P. 53, 38041 Grenoble Cedex, 1977, 48 p.

[3] A. LE BRETON, Estimation de paramètres dans un système dynamique linéaire contrôlé, Note *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **284**, série A, 1977, p. 1299-1302.

[4] R. MEHRA, Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems. Survey and new results, *I. E. E. E. Automat. Contr.*, vol. A. C. 19, 1974, p. 753-768.

[5] J. P. LEPELTIER, B. MARCHAL, Problèmes des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, section B, vol. XII, n° 1, 1976, p. 43-103.

[6] J. H. VAN SCHUPPEN, Estimation theory for continuous time processes, a martingale approach, *El. Res. Lab.*, Mem. n° ERL-M405, College of Eng., Berkeley, Calif., 1973.

[7] I. I. GIHMAN, A. V. SKOROKHOD, *Stochastic differential equations*, Springer, 1972.

[8] Yu. A. ROZANOV, *Stationary Random Processes*, Holden Day, San Francisco, 1967.

[9] A. S. KHOLEVO, On estimates of regression coefficients, *Theor. of Prob. and its Appl.*, vol. 14, 1969, p. 79-104.

[10] A. F. TARASKIN, Some limit theorems for stochastic integrals, in *Theory of Stochastic processes*, J. Wiley, vol. 1, 1974, p. 136-151.

[11] A. A. LOPEZ-TOLEDO, M. ATHANS, Optimal policies for identification of stochastic linear systems. *I. E. E. E. Trans. Automat. Contr.*, vol. A. C. 20, 1975, p. 754-765.

[12] L. S. PONTRYAGIN *et al.*, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers, J. Wiley, New York, 1962.