ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALBERT BENASSI

Processus gaussiens, markoviens d'ordre p, fortement markoviens d'ordre p et problème de Dirichlet stochastique

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 1 (1979), p. 107-126

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_1_107_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XV, n° 1, 1979, p. 107-126. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Processus gaussiens, markoviens d'ordre p, fortement markoviens d'ordre p et problème de Dirichlet stochastique

par

Albert BENASSI
Membre du L. A. au C. N. R. S., n° 224,
Laboratoire de Probabilités, 4, place Jussieu, Tour 56, 75230 Paris Cedex 05

ABSTRACT. — Let H a Hilbert space. We define the property of H duality for two generalized Gaussian processes. We show that if X is a generalized Gaussian process the following statements are equivalent: (1) X is Markovian, (2) X has an H dual process, (3) X is a solution of a stochastic no homogen Dirichlet problem.

After having defined the strong p-Markov property, we apply the above results to p-Markov and strongly-p-Markov processes.

INTRODUCTION

0.1. La notion de processus dual d'un processus gaussien généralisé (cf. Molcan [*6*]) est liée à la propriété de Markov, de façon intime (Kallianpur, Mandrekar [*4*]).

Dans ce travail, nous définissons la notion de H dualité, qui se réduit à la notion précédente si H est un espace $L^2(T)$. Puis nous montrons, lorsque l'espace H est local, qu'il y a équivalence, pour un processus gaussien généralisé, entre le fait d'être markovien, de posséder un processus H dual, et d'être, dans un sens que nous préciserons, solution d'un problème de Dirichlet stochastique.

Nous définissons la notion de processus markovien fortement d'ordre p

(la notion de H dualité sera ici un cadre bien adapté) puis, comme pour les processus markoviens d'ordre p, nous tirons les conséquences des équivalences précédentes.

0.2. Définitions et notations

Nous donnons, dans ce paragraphe, l'essentiel des définitions et notations utilisées dans ce travail.

a) Soit T un ouvert convexe et borné de R^n. Si T désigne sa frontière, nous supposerons que T est régulière (par exemple C^∞). Soit $\mathscr{D}(T)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans T, et E un espace de Hilbert de distributions sur T; E_0 désignera l'adhérence de $\mathscr{D}(T)$ dans E. Si F et H désignent deux autres espaces de Hilbert de distributions sur T tels que

$$F_0 \equiv F \qquad \text{et} \qquad E_0 \hookrightarrow H_0 \hookrightarrow F$$

les injections étant continues à images denses, nous poserons la

DÉFINITION 0.1. — Les espaces E et F sont dits H duaux si

a) E et F sont en dualité,

b) le crochet $\langle\,,\rangle$ désignant la dualité entre E et F, alors pour tous éléments φ et ψ de $\mathscr{D}(T)$, nous avons :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_H \tag{0.1}$$

où $(.)_H$ désigne le produit scalaire dans H. ■

b) Soit p un entier positif, $H^p(T)$ désigne l'espace de Sobolev de rang p usuel; $H_0^p(T)$ (nous omettrons la lettre T si aucune confusion n'est à craindre) l'adhérence de $\mathscr{D}(T)$ dans H^p; H_0^p a pour dual H^{-p}. Soit A un opérateur d'ordre $2p$ elliptique et H_0^p elliptique. A est un isomorphisme de H_0^p dans H^{-p}. L'opérateur A définit une forme de Dirichlet $a(,)$ fortement uniformément elliptique sur H_0^p. Cette forme définit sur H_0^p une norme notée $\|\,.\,\|_A$ équivalente à la norme usuelle $\|\,.\,\|_p$. Il existe un opérateur L inversible tel que

$$A = L^*L \quad \text{et} \quad a(\varphi, \psi) = (L\varphi, L\psi)_0 \qquad \varphi, \psi \in H^p \tag{0.2}$$

où $(,)_0$ est le produit scalaire de $L^2(T)$.

Soit $K_0 : H^{-p} \to H_0^p$ l'opérateur inverse de A; la semi-norme

$$\|\varphi\|_{A,-p} = \langle K_0\varphi, \varphi \rangle_{p,-p} \qquad \varphi \in H^{-p} \tag{0.3}$$

lorsque $\langle\,,\rangle_{p,-p}$ désigne la dualité H^{-p}, H_0^p, définit une norme équivalente à la norme usuelle de H^{-p}. H^{-p} muni de $\|\,.\,\|_{A,-p}$ sera noté H_A^{-p}. Si $H_A^p(H_{A,0}^{\,p})$

désigne $H^p(H_0^p)$ muni de $\| \, . \, \|_A$, les espaces H_A^p et H_A^{-p} sont $L^2(T)$ duaux.

c) Maintenant considérons l'espace

$$H_A^{2p} = \{ u \in L^2(T) \mid Au \in L^2(T) \} \tag{0.4}$$

qui est un espace de Hilbert si on le munit de la norme

$$\| \varphi \|_{A,2p} = (A\varphi, A\varphi)_0 \tag{0.5}$$

Posons

$$\gamma^+ = (\gamma_0^+, \gamma_1^+, \dots, \gamma_{p-1}^+) \tag{0.6}$$

où les γ_j^+ sont les dérivées normales à ∂T d'ordre j dirigées vers l'extérieur de T ; alors, si l'on définit $H_{A,0}^{2p}$ par :

$$H_{A,0}^{2p} = \{ u \in H_A^{2p} \mid \gamma u = 0 \} \tag{0.7}$$

L'opérateur A est un isomorphisme de $H_{A,0}^{2p}$ sur $L^2(T)$ (cf. Baro Neto [*2*]).

Soit $\{ S_j^2 ; 0 \leqslant j \leqslant 2p - 1 \}$ le système des opérateurs tangentiels sur ∂T de l'opérateur A^2, $\{ S_j ; \leqslant 0 \leqslant j \leqslant p - 1 \}$ celui de l'opérateur A, nous avons les formules de Green suivantes :

$$(Au, Av)_0 = \langle A^2 u, v \rangle_{-2p,2p} + \sum_{j=0}^{2p-1} \langle S_j^2 u, \gamma_j v \rangle \tag{0.8}$$

où

$$\langle S_j^2 u, \gamma_j v \rangle = \int_{\partial T} S_j^2 u(s) \gamma_j v(s) d\sigma(s) \quad j \in [0, 2p[\tag{0.9}$$

d'autre part, si $Au \in H_A^p$, alors

$$(Au, Av)_0 = \langle A^2 u, v \rangle_{-2p,2p} + \sum_{j=0}^{p-1} \langle S_j u, \gamma_j v \rangle \tag{0.10}$$

qui provient de la formule de Green dans H_A^p.

Maintenant si l'on identifie $H_{A,0}^p$ à son dual, les espaces H_A^{2p} et L^2 (T) sont H_A^p duaux, en posant :

$$\langle u, v \rangle = (Au, v)_0 = (u, v)_A \qquad \forall u, v \in \mathscr{D}(T) \tag{0.11}$$

d) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité et X un processus gaussien généralisé (P. G. G.), c'est-à-dire

$$X : \mathscr{D}(T) \to L^2(\Omega, \mathscr{A}, P) \tag{0.12}$$

Nous supposerons dans toute la suite de ce travail que les P. G. G. utilisés sont de moyenne nulle.

Soit O un ouvert de T, et F un fermé; nous poserons

$$(0.13) \qquad \Sigma(\mathrm{O}) = \sigma\{ \mathrm{X}(\varphi) \mid \operatorname{supp} \varphi \subset \mathrm{O} \,;\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{T}) \}$$

$$(0.14) \qquad \Sigma(\mathrm{F}) = \bigcap_{\mathrm{O} \supset \mathrm{F}} \Sigma(\mathrm{O})$$

Nous dirons que deux ouverts O_- et O_+ de frontière commune sont complémentaires dans T si $\mathrm{O}_- \cup \Gamma \cup \mathrm{O}_+ = \mathrm{T}$; que nous noterons $(\mathrm{O}_-, \Gamma, \mathrm{O}_+)$.

DÉFINITION 0.2. — Un P. G. G. X sera dit markovien par rapport aux ouverts si les tribus $\Sigma(\mathrm{O}_-)$ et $\Sigma(\mathrm{O}_+)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\Sigma(\Gamma)$; ce qui se note :

$$(0.15) \qquad \Sigma(\mathrm{O}_-) \underset{\Sigma(\Gamma)}{\perp\!\!\!\perp} \Sigma(\mathrm{O}_+)$$

Ceci pour tout couple d'ouverts complémentaires $(\mathrm{O}_-, \Gamma, \mathrm{O}_+)$.

Nous poserons :

$$(0.16) \qquad \mathscr{H}(\mathrm{X}, \mathrm{O}_-) = sp\{ \mathrm{X}(\varphi) \;;\; \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{T}) \;;\; \operatorname{supp} \varphi \subset \mathrm{O}_- \}$$

et si

$$\mathrm{K}(\varphi, \psi) = \mathrm{E}[\mathrm{X}(\varphi)\mathrm{X}(\psi)]$$

$$(0.17) \qquad \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{O}_-) = sp\{ \mathrm{K}(., \varphi) \;;\; \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{T}) \;;\; \operatorname{supp} \varphi \subset \mathrm{O}_- \}$$

$\mathscr{H}(\mathrm{X}, \mathrm{O}_-)$ est le sous-espace gaussien de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ dont les éléments sont $\Sigma(\mathrm{O}_-)$ mesurables; et $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{O}_-)$ est le sous-espace de noyaux de $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{T})$. Si $\mathrm{O}_- \equiv \mathrm{T}$, nous noterons $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{T})$ par $\mathrm{H}(\mathrm{X})$ et $\mathscr{H}(\mathrm{X}, \mathrm{T})$ par $\mathscr{H}(\mathrm{X})$.

DÉFINITION 0.3. — Soit X et X* deux P. G. G. définis sur le même espace de probabilité ; nous dirons que X et X* sont H duaux si

i) $$\mathrm{EX}(\varphi)\mathrm{X}^*(\psi) = (\varphi, \psi)_{\mathrm{H}} \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathrm{T})$$

ii) $$\mathscr{H}(\mathrm{X}) \equiv \mathscr{H}(\mathrm{X}^*)$$

Dans toute la suite de ce travail, nous supposerons que les P. G. G. utilisés sont réels.

I. PROPRIÉTÉ DE MARKOV ET H DUALITÉ

Ce paragraphe a un caractère général et relie les notions de H dualité, de propriété de Markov et d'équations linéaires stochastiques.

1.1. Préliminaires

Soit $T \subset R^n$, un ouvert régulier.

1.1.1. Soit E un espace de distribution (e, v, t). Nous le supposerons normal (c'est-à-dire $E_0 \equiv E$). Si E^* désigne son dual, à tout opérateur positif K de $L(E^*, E)$, il est associé une probabilité cylindrique gaussienne (P. C. G.) sur E de covariance K (cf. Baxendall [*3*]) telle que

$$(1.1) \qquad \int_E \langle \xi, x \rangle \langle \eta, x \rangle d\mu(x) = \langle K\xi, \eta \rangle$$

le crochet $\langle \, , \rangle$ désignant la dualité entre E et E^*.

Si l'on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, on peut associer à μ (Badrikian [*1*]) un processus linéaire X

$$X : E^* \to L^2(\Omega, P)$$

vérifiant :

$$(1.2) \qquad EX(\varphi)X(\psi) = \langle K\varphi, \psi \rangle \qquad \forall \varphi, \psi \in E^*$$

1.1.2. Soit E, H, F un triplet d'espaces de Hilbert de distributions sur T vérifiant la définition 1.0. Et posons

$$(1.3) \qquad E_\infty = E \Theta E_0$$

Désignons par $L^+(F, E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus et positifs de F dans E, et par $L_0^+(F, E)$ le sous-ensemble de $L^+(F, E)$ des éléments $K_0 : F \to E_0$, ainsi que par $L_\infty^+(F, E)$ celui des éléments K_∞ : $F \to E_\infty$.

Un élément K de $L^+(F, E)$ se décompose (d'une façon non nécessairement unique) en

$$(1.4) \qquad K = K_0 + K_\infty$$

Posons la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. — Soit X un P. G. G. de covariance $K \in L^+(F, E)$. Nous dirons que :

i) X est un P. G. G. régulier si la décomposition (1.4) est unique et si $K \equiv K_0 \in L_0^+(F, E)$,

ii) X est un P. G. G. singulier si la décomposition (1.4) est unique et si $K \equiv K_\infty \in L^+(F, E)$,

iii) X est un P. G. G. minimal s'il existe une décomposition unique (1.4) de K telle que K_0 soit continûment inversible. ■

La notion de minimalité est due à Rozanov (réf. [*8*]).

1.2. Résultats

Soit E, F, H, les trois espaces de la définition 1.0.

Soit X et X* deux P. G. G. définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$: X étant basé sur F, X* l'étant sur E. Soit μ (resp μ^*) la P. C. G. associée à X (resp X*) et définie sur E (resp F).

PROPOSITION 1.1. — Supposons que les espaces E et H soient normaux. Pour tout P. G. G. X minimal et régulier, il y a équivalence entre les assertions suivantes :

a) X et X* sont H duaux,

b) il existe $A \in L^+(E, F)$, A inversible tel que

$$A\mu = \mu^* \quad , \quad K_0 = A^{-1} \qquad \text{si } K_0 \text{ est la covariance de X.}$$

DÉMONSTRATION. — $a \Rightarrow b$: si X et X* sont H duaux, alors $\mathscr{H}(X) = \mathscr{H}(X^*)$ (définition 3.0). Il existe alors un opérateur unitaire U

$$U : H(X) \to H(X^*).$$

En effet, H(X) et $\mathscr{H}(X^*)$ sont isométriquement isomorphes ainsi que $H(X^*)$ et $\mathscr{H}(X^*)$, il en est donc de même de H(X) et $H(X^*)$. Alors, d'après le théorème 1.3 de Baxendall [*3*], il existe $A \in L(E, F)$ tel que $A\mu = \mu^*$. Mais la définition de H dualité implique aussi que

$$\text{(1.5)} \qquad EX(\varphi)X^*(\psi) = (\varphi, \psi)_H \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(T)$$

et puisque $A\mu = \mu^*$, on a $X^*(\varphi) = X(A\varphi)$ pour $\varphi \in \mathscr{D}(T)$. Ce qui conduit à l'égalité

$$\langle K_0 A\psi, \varphi \rangle = (\psi, \varphi)_H \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(T)$$

Soit

$$K_0 A\psi = \psi \qquad \forall \psi \in \mathscr{D}(T)$$

et comme $\mathscr{D}(T)$ est dense dans E (E normal), on a bien $K_0 = A^{-1}$ et A inversible et positif.

$b \Rightarrow a$: soit X et X* les P. G. G. liés à μ et μ^* respectivement. Nous devons montrer que X et X* sont H duaux. Or, puisque $A\mu = \mu^*$, on a comme ci-dessus $X^*(\varphi) = X(A\varphi)$; il est alors immédiat que (1.5) est satisfaite. L'égalité des sous-espaces gaussiens $\mathscr{H}(X)$ et $\mathscr{H}(X^*)$ résulte de la continuité de A.

Remarquons que. sous les hypothèses faites, le dual de X, X*, s'il existe, est unique. Ce qui résulte de l'unicité de l'inverse.

Si nous ne supposons plus les espaces E et H normaux, nous avons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.2. — Soit X un P. G. G. minimal de covariance $K = K_0 + K_\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) X et X* sont H duaux,

b) il existe $A \in L^+(E, F)$ tel que $A\mu = \mu^*$; A restreint à E_0 est inversible et $A^{-1} = K_0$; $AK_\infty = 0$.

Démonstration. — $a \Rightarrow b$: soit μ_0 et μ_∞ les projections de μ respectivement sur E_0 et E_∞. X_0 et X_∞ désignent les P. G. G. associés à μ_0 et μ_∞ respectivement. Comme X est supposé minimal, on a $\mu = \mu_0 \times \mu_\infty$ $(K = K_0 + K_\infty)$. En effet, puis que X et X* sont supposés H duaux, il en est de même pour X_0 et X*; on a

$$EX_0(\varphi)X^*(\psi) = EX(\varphi)X^*(\psi) = (\varphi, \psi)_H \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(T)$$

ce qui conduit à :

$$E(X - X_0)(\varphi)X^*(\psi) = 0 \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(T) \tag{1.6}$$

Un calcul rapide montre que $X - X_0$ est de covariance K_∞ et donc que $X_\infty = X - X_0$; alors (1.6) implique que $AK_\infty = 0$.

Mais la proposition implique que $A\mu_0 = \mu^*$; $A^{-1} = K_0$.

On a donc $A\mu = \mu^*$ puisque $A\mu_\infty = 0$.

$b \Rightarrow a$: si $A\mu = \mu^*$, $A^{-1} = K_0$ et $AK_\infty = 0$.

On en déduit que $X(\varphi) = X(A\varphi)$, et comme dans la proposition que X et X* sont H duaux. ■

REMARQUE 1.3. — Sous les hypothèses du corollaire, X et X* H duaux est équivalent à

$$\begin{cases} A\mu = \mu^* \\ M_\infty \mu = \mu_\infty, \end{cases} \tag{1.7}$$

où M_∞ est la projection de E sur E_∞.

Sous réserve que $A\mu_\infty = 0$, la solution μ de (1.7) est unique dans la classe des P. C. G. minimales. (1.7) est une forme de problème de Dirichlet stochastique.

DÉFINITION 1.2. — Molčan [*6*]. Soit X un P. G. G. Nous dirons que X est à valeurs indépendantes en chaque point (V. I. P.) si pour tout couple d'éléments de $\mathscr{D}(T)$ (φ, ψ) tel que $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \psi = \varnothing$, les variables aléatoires $X(\varphi)$ et $X(\psi)$ sont indépendantes.

PROPOSITION 1.4. — Sous les hypothèses de la proposition 1.1, et si l'espace H est supposé local, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) X est markovien, régulier de covariance K_0,

b) *i*) X possède un processus dual X* V. I. P.; *ii*) il existe un opérateur différentiel $A \in L^+(E, F)$ tel que $A\mu = \mu^*$ et $K_0 = A^{-1}$.

Démonstration. — $b \Rightarrow a$: d'après la proposition 1.1, la P. C. G. μ^* a pour covariance A. Le fait que X* soit V. I. P. entraîne :

$$\forall \varphi, \psi \in E \quad \text{tels que} \quad \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \psi = \varnothing$$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = 0 \tag{1.8}$$

Soit H(X) l'espace de noyaux reproduisants de X. Alors si

$$K(\varphi, \psi) = \langle K\varphi, \psi \rangle \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(T) \quad , \quad K_\varphi = K(., \varphi) \in H(X)$$

Puisque A est inversible, tout élément $\varphi \in F$ s'écrit $\varphi = A\psi$ pour un ψ dans E.

En posant $\varphi_i = A\psi_i$ $(i = 1, 2)$, il vient :

$$EX(\varphi_1)X(\varphi_2) = EX(A\psi_1)X(A\psi_2).$$

Mais :

$$EX(\varphi_1)X(\varphi_2) = K(\varphi_1, \varphi_2) = (K_{\varphi_1}, K_{\varphi_2})_{H(X)} = (K_{A\psi_1}, K_{A\psi_2})_{H(X)}$$

Or, si

$$\operatorname{supp} \psi_1 \cap \operatorname{supp} \psi_2 = \varnothing$$

on a

$$(K_{A\psi_1}, K_{A\psi_2})_{H(X)} = K(A\psi_1, A\psi_2) = \langle A\psi_1, \psi_2 \rangle = 0$$

De plus, puisque A est local (différentiel), on a :

$$\operatorname{supp} \varphi_1 \cap \operatorname{supp} \varphi_2 = \varnothing.$$

Alors par continuité on a $(K_\varphi, K_\psi)_{H(X)} = 0$ dès que $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \psi = \varnothing$ avec φ, ψ dans F; et par densité de $\{ K_\varphi ; \varphi \in \mathscr{D}(T) \}$ dans H(X) on a $\langle F, G \rangle_{H(X)} = 0$ dès que $\operatorname{supp} F \cap \operatorname{supp} G = \varnothing$.

Alors le théorème 1, réf. [*4*] (équivalence de (*a*) et (*b*)) permet de conclure.

$a \Rightarrow b$: soit J l'isomorphisme canonique de H' dans H qui permet d'identifier H à son dual H'. Comme E s'injecte continûment et densément dans H, H' est dense dans E'. J se prolonge alors à E' en $\tilde{J}$; $\tilde{J} : E' \to F$. X se prolonge en un processus linéaire $\tilde{X}$ basé sur E' par

$$\tilde{X}(\xi) = X(\tilde{J}\xi) \qquad \xi \in E'$$

Puisque X est markovien et J local (car H est local), $\tilde{X}$ l'est aussi. D'après le théorème 1, réf. [*4*], déjà cité, $\tilde{X}$ possède un $L^2(T)$ dual X^* basé sur E tel que $E\tilde{X}(\xi)X^*(\eta) = (\xi, \eta)_0 = \langle \tilde{J}\xi, \eta \rangle = (\xi, \eta)_H$ $\xi, \eta \in \mathscr{D}(T)$, car $J = \tilde{J}$ sur $\mathscr{D}(T)$; le crochet désigne la dualité E, F.

D'où :

$$EX(\varphi)X^*(\psi) = (\varphi, \psi)_H \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(T)$$

Comme $\mathscr{H}(X) = \mathscr{H}(X^*)$, on en déduit que $\mathscr{H}(X) = \mathscr{H}(X^*)$ et donc que les processus X et X^* sont H duaux.

D'autre part, d'après la proposition 1.1, on a nécessairement $A\mu = \mu^*$ et comme le théorème 1 (réf. [*4*]) montre que X^* est V. I. P., ceci conduit à l'égalité

$$EX^*(\varphi)X^*(\psi) = \langle A\varphi, \psi \rangle = 0 \tag{1.9}$$

dès que supp $\varphi \cap$ supp $\psi = \emptyset$, φ, ψ éléments de E. Puisque H est local, E et F, H duaux, l'égalité (1.8) montre que si $u \in E$, $v \in F$ et supp $u \cap$ supp $v = \emptyset$, on a $\langle u, v \rangle = 0$.

Dans ces conditions, (1.9) n'est possible que si A est local. Comme les espaces E et F sont des sobolev d'ordre fini, ceci implique que A est différentiel. Le reste de *b ii)* se déduit de la proposition 1.1.

COROLLAIRE 1.5. — Soit X un P. G. G. minimal de covariance $K = K_0 + K_\infty$. Sous les hypothèses de la proposition 1.4, les assertions suivantes sont équivalentes.

a) X est markovien,

b) *i*) il existe un opérateur différentiel inversible $A \in L^+(E, F)$ tel que

$$A\mu = \mu^* \quad , \quad K_0 = A^{-1} \quad , \quad AK_\infty = 0$$

ii) X possède un H processus dual X^* V. I. P.

Démonstration. — $a \Rightarrow b$: soit X_0 et X_∞ les parties régulières et singulières de X. D'après la proposition 4.1, X_0 markovien $\Leftrightarrow$ X_0 et X^* H duaux,

X^* V. I. P. $AX_0 = X^*$ et $K_0 = A^{-1}$. D'après la démonstration du corollaire 1.2, X_∞ et X^* sont indépendants et $A\mu_\infty = 0$; ce qui conduit à $A\mu = \mu^*$.

$b \Rightarrow a$: soit μ_0 et μ_∞ les P. C. G. sur E de covariance K_0 et K_∞ respectivement. D'après la proposition, X_0 est markovien. D'après la première partie de la démonstration, X_0 et X_∞ sont indépendants. Il reste à montrer que X_∞ est markovien. Mais ceci résulte de : X_∞ possède un H dual nul, donc en particulier V. I. P. ■

REMARQUE 1.6. — Puisque l'opérateur A est positif, il s'écrit :

$$A = L^*L$$
$$L : E \to H \text{ inversible}$$

a) Soit X le P. G. G. du corollaire. On définit $LX(\varphi)$ par :

$$LX(\varphi) = X(L^*\varphi) \tag{1.10}$$

Définissons l'opérateur $\tilde{M}_\infty$ sur $\mathscr{H}(X)$ par $\tilde{M}_\infty X = X_\infty$; alors si η désigne le bruit blanc gaussien sur H, X est solution du problème de « Dirichlet » stochastique suivant :

$$\begin{cases} LX = \eta \\ M_\infty X = X_\infty \end{cases} \tag{1.11}$$

En effet :

$EX(L^*\varphi)X(L^*\psi) = \langle KL^*\varphi, L^*\psi \rangle = \langle LKL^*\varphi, \psi \rangle$; $\forall \varphi, \psi$ dans $\mathscr{D}(T)$. Comme $\langle LKL^*\varphi, \psi \rangle = \langle LK_0L^*\varphi, \psi \rangle$ sur $\mathscr{D}(T) \times \mathscr{D}(T)$, en tenant compte de $A = K_0^{-1}$, il vient:

$$EX(L^*\varphi)X(L^*\psi) = (\varphi, \psi)_H = E\eta(\varphi)\eta(\psi).$$

b) Soit K_∞ la composante singulière de K.

Supposons que le problème suivant

$$\begin{cases} AK_\infty = 0 \quad \text{sur} \quad \mathscr{D}(T) \\ K_\infty |_{\mathscr{D}(\partial T)} = K |_{\mathscr{D}(\partial T)} \end{cases} \tag{1.12}$$

au sens des distributions ait une solution unique.

Alors, X est solution unique de (1.11). L'unicité étant comprise au sens suivant :

$$X = Y \Leftrightarrow E[X(\varphi) - Y(\varphi)]^2 = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\overline{T}) \tag{1.13}$$

En effet, on a déjà $X_0 = Y_0$ par (1.11) et $X_\infty = Y_\infty$ résulte de (1.12).

THÉORÈME 1.7. — Soit X un P. G. G. de covariance $K = K_0 + K_\infty$. Supposons que K_∞ soit solution unique de (1.12).
Alors si l'espace H est local, il y a équivalence entre

a) X est markovien minimal,
b) X est solution unique de (1.11).

Démonstration. — $a \Rightarrow b$: d'après le corollaire 1.5 et la remarque 1.6*a*), il suffit de montrer l'unicité, ce qui est immédiat d'après l'hypothèse faite sur K.

Montrons l'implication réciproque :
Soit X* le P. G. G. défini par

$$X^* = L^*\eta \tag{1.14}$$

Puisque H est local et L différentiel, il est immédiat que X* soit V. I. P. Par construction, X et X* sont H duaux. Le corollaire 1.5 permet de conclure.

REMARQUE 1.7.— *a*) Sous les hypothèses du théorème, on a :

$$X_\infty(\varphi) = \widehat{X}(\varphi) = E[X(\varphi) \mid \Sigma(\partial T)] \tag{1.15}$$

En effet, le P. G. G. $\widehat{X}$ est singulier et par unicité de la composante singulière, (1.15) est assuré.

b) Soit (O_-, Γ, O_+) deux ouverts complémentaires, et posons

$$X^- = X\,|_{\mathscr{D}(O_-)} \qquad X^+ = X\,|_{\mathscr{D}(O_+)} \tag{1.16}$$

Soit $K^-(K^+)$ la covariance de $X^-(X^+)$.
En définissant

$$\Sigma^\pm(\Gamma) = \bigcap_{O \supset \Gamma} \Sigma(O^\pm \cap O) \tag{1.17}$$

Si l'on suppose que $K_\infty^\pm$ est solution unique de

$$\begin{cases} AK_\infty^\pm = 0 \\ K_\infty^\pm\,|_{\mathscr{D}(\Gamma)} = K\,|_{\mathscr{D}(\Gamma)} \end{cases} \tag{1.18}$$

On en déduit immédiatement que

$$\Sigma^+(\Gamma) = \Sigma^-(\Gamma) = \Sigma(\Gamma) \tag{1.19}$$

Mandrekar (réf. [*5*]) a démontré (1.19) dans le cas d'un processus stochastique gaussien $\{ X(t);\ t \in T \}$ P. p. s. à trajectoires continues. Rozanov annonce dans [*8*] la démonstration de (1.19) dans le cas P. G. G. Pour notre part, dans le prochain paragraphe, nous verrons que (1.18) est assuré si A est un opérateur différentiel d'ordre $2p > n$ et fortement elliptique et donc que l'égalité (1.10) sera acquise.

II. PROPRIÉTÉS DE MARKOV D'ORDRE p ET FORTE D'ORDRE p

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition d'un processus stochastique gaussien-markovien d'ordre p (P. G. pM.) due à Pitt [7]. Nous donnons la définition d'un processus stochastique gaussien-markovien fortement d'ordre p (P. G. F. pM.). A l'aide du théorème 1.7, nous caractérisons des P. G. pM. (resp. P. G. F. pM.) comme solution faible (resp. forte) unique d'un problème de Dirichlet stochastique. Nous en déduisons la propriété (1.17) de continiuté des tribus du processus.

2.1. Définitions et notations

Reprenons les notations et définitions antérieures. Soit T un ouvert borné de R^n de frontière ∂T. Soit donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sur lequel est défini un processus gaussien $\{ X(t);\ t \in T \}$ P presque sûrement à trajectoires continues. Si (O_-, Γ, O_+) désigne un couple d'ouverts complémentaires de T, posons la

DÉFINITION 2.1. — *a*) Pour tout f de $L^2(\Gamma)$, nous définirons la dérivée normale externe d'ordre j, Γ_j^+ (resp. interne Γ_j^-) en moyenne quadratique de X par

$$(2.1) \qquad \langle f, \Gamma_j^{\pm} X \rangle = \left[\frac{d^j}{du^j} \int_\Gamma f(s) X_{S + u\dot{S}_\pm} d\sigma(s) \right]_{u=0}$$

où $\dot{S}_+$ (resp. $\dot{S}_-$) désigne la normale extérieure à Γ (resp. intérieure) au point s de Γ; $d\sigma(s)$ est la mesure de surface de Γ.

b) Si X est à trajectoires suffisamment régulières, nous définissons sa dérivée normale externe γ_j^+ (resp. interne γ_j^-) d'ordre j à Γ de façon usuelle; posons

$$(2.2) \qquad \langle f, \gamma_j^{\pm} X \rangle = \int_\Gamma f(s) \gamma_j^{\pm} X(s) d\sigma(s)$$

pour f dans $L^2(\Gamma)$.

Naturellement, si γ_j $(= \gamma_j^{\pm})$ existe, nous aurons :

$$(2.3) \qquad \langle f, \gamma_j X \rangle = \langle f, \Gamma_j X \rangle \text{ P. p. s.} \qquad f \in L^2(\Gamma).$$

NOTATION. — Nous définissons la tribu différentielle faible d'ordre p, $\Sigma_p(\Gamma)$ par :

(2.4) $\Sigma_p(\Gamma) = \sigma\{\langle f, \Gamma_j X\rangle \quad ; \quad f \in L^2(\Gamma) \quad ; \quad 0 \leqslant j \leqslant p-1\}$

Ainsi que la tribu différentielle forte d'ordre p, $S_p(\Gamma)$

(2.5) $S_p(\Gamma) = \{\gamma_j X(s) \quad ; \quad s \in \Gamma \quad ; \quad 0 \leqslant j \leqslant p-1\}$

DÉFINITION 2.2. — Soit $\{X(t); t \in T\}$ un champ stochastique markovien (définition 0.2). Nous dirons qu'il est

a) markovien d'ordre p si $\Sigma(\Gamma) = \Sigma_p(\Gamma)$,

b) markovien fortement d'ordre p si $\Sigma(\Gamma) = S_p(\Gamma)$ pour tout couple d'ouverts complémentaires (O_-, Γ, O_+).

2.2. Caractérisation des P. G. pM.

Soit $A = L^*L$ un opérateur fortement elliptique d'ordre $2p > n$ qui soit aussi $H_0^p(T)$ elliptique.

2.2.1. L'ESPACE DE NOYAUX $H_A^p(T)$

Les espaces $H_0^p(T)$ et $H_{0A}^p(T)$ sont identiquement isomorphes; et puisque $2p > n$, H_{0A}^p est un espace de noyaux reproduisants (Pitt [7]). En considérant $H_A^p(T)$ plongé dans $H_A^p(R^n)$, $H_A^p(T)$ est un espace de noyaux caractérisé par :

LEMME 2.1. — Les noyaux $R(t, s)$ de $H_A^p(T)$ se décomposent en :

(2.6) $$R = R_0 + R_\infty$$

où R_0 est le noyau de $H_0^p(T)$.

De plus : R_0 est solution unique du problème

(2.7) $$\begin{cases} A_t R_0(t, s) = \delta(t-s) & \forall t, s \in T \\ \gamma R_0(., s) = 0 & \forall s \in T \end{cases}$$

où γ est défini en (0.6).

R_∞ est solution unique du problème

(2.8) $$\begin{cases} A_t R_\infty(t, s) = 0 & \forall t, s \in T \\ \gamma R_\infty(., s) = \gamma R(., s) & \forall s \in T \end{cases}$$

La décomposition (2.6) est donc unique. ■

Soit η la mesure brownienne sur $L^2(T)$, c'est-à-dire

(2.9) $E\eta(\varphi)\eta(\psi) = (\varphi, \psi)_0 \qquad \forall \varphi, \psi \in L^2(T)$

on peut aussi écrire

(2.10) $$\eta(\varphi) = \int_T \varphi(s)d\eta(s)$$

PROPOSITION 2.2. — Soit $R(t, s)$ le noyau de $H_A^p(T)$ et soit $\{ X(t) ; t \in T \}$ un processus stochastique gaussien ; les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $X(t)$ est un P. G. pM.,

b) $X(t)$ a pour covariance $R(t, s)$,

c) *i*) l'opérateur $A = L^*L$ est fortement elliptique, d'ordre $2p > n$; *ii*) X est solution faible unique du problème de Dirichlet stochastique

(2.11) $$\begin{cases} LY(t) = \eta(t) & \text{P. p. s.} \\ \Gamma_j Y \ = \Gamma_j X & \text{P. p. s.} \quad j \in [0, p[\end{cases}$$

Démonstration. — $a \Leftrightarrow b$ résulte du théorème 5.4 de Pitt [7].

$a \Rightarrow c$: soit $H(R) = H_A^p(T)$ l'espace de noyaux reproduisants de X. H_A^{-p} désignant le dual de $H_{0,A}^p$, les espaces H_A^p et H_A^{-p} sont $L^2(T)$ duaux. Soit $K = K_0 + K_\infty$ l'opérateur de covariance déduit de R :

$$K\varphi(t) = \langle R(., t), \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(T).$$

On sait que $A^{-1} = K_0$. Soit Y le processus linéaire basé sur H_A^{-p} défini par :

(2.12) $$Y(\varphi) = \int_T X(s)\varphi(s)ds \quad \varphi \in \mathcal{D}(T)$$

Y a pour covariance K et est markovien puisque X l'est ([*4*], théorème 1). D'après le théorème 7.1, Y vérifie $LY = \eta$, ce qui se traduit par :

(2.13) $$\int_T LX(s)\varphi(s)ds = \eta(\varphi) \quad \text{P. p. s.} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(T)$$

Puisque R_∞ vérifie (2.8), K_∞ qui s'en déduit est solution unique de (1.12). Donc Y est solution unique de (1.11), ce qui montre que X est solution faible unique de (2.11).

$c \Rightarrow a$: soit X la solution de (2.11) et Y le processus linéaire (2.12) qui s'en déduit. Soit $R(t, s)$ la covariance de $X(t)$ et K celle de Y. Il suffit de montrer que R vérifie (2.6), (2.7) et (2.8).

Mais par définition de LY, on a :

(2.14) $$\begin{aligned} E[LY(\psi)LY(\varphi)] &= E[Y(L^*\varphi)Y(L^*\psi)) \\ &= (\varphi, \psi)_0 \end{aligned}$$

pour tout couple (φ, ψ) d'éléments de $\mathscr{D}(T)$, par hypothèse. De (2.14) on tire

$$\langle KL^*\varphi, L^*\psi \rangle = (\varphi, \psi)_0 \tag{2.15}$$

Mais par le théorème des noyaux, (2.15) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\langle KL^*\varphi, L^*\psi \rangle &= \iint_{T\times T} R(t, s)L_t^*\varphi(t)L_s^*\psi(s)dtds \\
&= \iint_{T\times T} L_sR(t, s)L_t^*\varphi(t)\psi(s)dtds \\
&= \iint_{T\times T} L_tL_sR(t, s)\varphi(t)\psi(s)dtds
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Or, le noyau $R(t, s)$ est symétrique ; on a donc :

$$L_tR(t, s) = L_s^*R(t, s) \tag{2.17}$$

Alors, en portant (2.17) dans (2.16), (2.15) devient :

$$\langle AK\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_0 \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(T) \tag{2.18}$$

R vérifie donc (2.7) et (2.8) faiblement. Mais comme ces problèmes ont une solution forte unique, R vérifie (2.6), (2.7) et (2.8) fortement. L'équivalence de *a*) et *b*) permet de conclure. ■

Soit $R(t, s)$ la covariance précédente.

COROLLAIRE 2.3. — Soit X un P. G. pM. de covariance $R(t, s)$. X se décompose d'une manière unique :

$$X = X_0 + X_\infty \tag{2.19}$$

en une partie régulière X_0 et une partie singulière X_∞. De plus, X_0 et X_∞ sont solutions faibles uniques des problèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{ll} LX_0 = \eta & \\ \Gamma_j X_0 = 0 & j \in [0, p[\end{array}\right\} \text{P. p. s.} \tag{2.20}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} LX_\infty = 0 & \\ \Gamma_j X_\infty = \Gamma_j X & j \in [0, p[\end{array}\right\} \text{P. p. s.} \tag{2.21}$$

X_0 est de covariance R_0 et X_∞ de covariance R_∞.

Démonstration. — Immédiate.

2.3. Caractérisation des P. G. F. pM.

En premier lieu, nous construisons un P. G. F. pM. qui sera en quelque sorte un modèle canonique, puis nous en donnerons une caractérisation analogue à celle des P. G. pM.

2.3.1. CONSTRUCTION D'UN P. G. F. pM.

Soit A l'opérateur précédent et H_A^p, H_A^{2p} (voir paragraphe zéro pour la définition de ces espaces), les espaces de Sobolev sur T de norme respective $\| \, . \, \|_A$ et $\| \, . \, \|_{2p,A}$. L'espace H_A^{2p} est un espace de noyaux reproduisants $G(t, s)$ que le lemme suivant caractérise :

LEMME 2.4. — Les noyaux $G(t, s)$ de H_A^{2p} sont définis par

$$G = G_0 + G_\infty \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} AG_0(t, s) = R(t, s) & \forall s, t \in T \\ \gamma G_0(., s) = 0 & \forall s \in T \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\begin{cases} AG_\infty(t, s) = 0 & \forall s, t \in T \\ \gamma G_\infty(., s) = \gamma G(., s) & \forall s \in T \end{cases} \tag{2.24}$$

où $R(t, s)$ est définie par (2.6), (2.7) et (2.8).

Démonstration. — Posons :

$$G_0(t, s) = \int_T R_0(t, u) R(u, s) du \tag{2.25}$$

$$G_\infty(t, s) = \int_T R_\infty(t, u) R(u, s) du \tag{2.26}$$

Par définition de R, G_0 est solution de (2.23) et G_∞ de (2.24). D'autre part, $G = G_0 + G_\infty$ vérifie

$$(AG(., t), AG(., s))_0 = (G(t, .), G(s, .))_{H_A^{2p}} = G(t, s)$$

ce qui démontre le lemme. ■

Nous pouvons passer à la construction annoncée.

En identifiant $H_{0,A}^p$ à son dual, les espaces H_A^{2p} et $L^2(T)$ sont H_A^p duaux (cf. introduction).

Soit μ la P. C. G. sur H_A^{2p} de covariance K, K étant définie par $R(t, s)$.

Soit μ^* la P. C. G. sur $L^2(T)$ de covariance A, c'est-à-dire :

$$\int_{H_A^{2p}} \langle x, \xi \rangle \langle x, \eta \rangle d\mu(x) = \langle K\xi, \eta \rangle \qquad \varphi, \psi \in L^2(T) \tag{2.27}$$

$$(2.28) \qquad \int_{L^2(T)} \langle x, \varphi \rangle \langle x, \psi \rangle d\mu^*(x) = \langle A\varphi, \psi \rangle \quad \varphi, \psi \in H_A^{2p}$$

le crochet $\langle \, , \rangle$ désignant la H_A^p dualité entre H_A^{2p} et $L^2(T)$.

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ soit Y et Y* les P. G. G. (processus linéaires) associés à μ et μ^* respectivement.

$$\begin{aligned} Y \ &: L^2(T) \rightarrow L^2(\Omega, \mathscr{A}, P) \\ Y^* \ &: H_A^{2p}(T) \rightarrow L^2(\Omega, \mathscr{A}, P) \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes :

1) $AY = Y^*$,

2) Y^* est V. I. P.

En effet,

1) il résulte de $A\mu = \mu^*$ (par le lemme 1.2),

2) résulte de : H_A^p est local et A différentiel;

on en déduit :

3) Y est markovien.

D'autre part, le processus $\{ X(t); \, t \in T \}$ défini par :

$$(2.29) \qquad Y(\varphi) = \int_T X(s)\varphi(s)ds$$

a pour covariance $G(t, s)$; en effet :

$$(2.30) \qquad EY(\varphi)Y(\psi) = \langle K\varphi, \psi \rangle$$

et comme $\varphi \in L^2(T)$ s'écrit $K\xi$ avec $\xi \in H_A^{-2p}$, (2.30) devient :

$$EY(\varphi)Y(\psi) = \langle K.K\xi, K\psi) = (K\xi, K\eta)_0 \quad \text{si} \quad \xi, \eta \in \mathscr{D}(T)$$

par H_A^p dualité. Comme G est solution fondamentale de A^2, le processus $X(t)$ est $2p$ markovien, ceci grâce à la proposition 2.2.

On termine l'étude de $X(t)$ par le

THÉORÈME 2.5. — Le processus $\{ X(t); \, t \in T \}$ de covariance $G(t, s)$ défini par (2.29) est markovien fortement d'ordre p.

Démonstration. — Soit (O_-, Γ, O_+) deux ouverts complémentaires de T.

Posons :

$$(2.31) \qquad \widehat{X}(t) = E(X(t) \mid \Sigma(O_-)) = E(X(t) \mid \Sigma(\Gamma)) \qquad t \in O_+$$

D'après le corollaire 2.3, ou le paragraphe 7 de Pitt [7], on a :

$$(2.32) \qquad \widehat{X}(t) = \sum_{j=0}^{2p-1} \langle S_j^2 G(.,t), \Gamma_j X \rangle \quad \text{P. p. s.}$$

Mais puisque AG = R $\in H_A^p$, on a, par les formules de Green (0.7) et (0.9)

$$(2.33) \qquad \widehat{X}(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \langle S_j R(.,t), \Gamma_j X \rangle$$

D'autre part, puisque $2p > n$, l'injection de H_A^{2p} dans H_A^p est radonifiante, il s'ensuit que X est P. p. s. à trajectoires dans H_A^p. Alors $\Gamma_j X = \gamma_j X$ et (2.33) devient :

$$(2.34) \qquad \widehat{X}(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \langle S_j R(.,t), \gamma_j X \rangle$$

Finalement, les égalités (2.32) et (2.54) impliquent

$$\Sigma_{2p}(\Gamma) = \Sigma_p(\Gamma) = S_p(\Gamma)$$

Comme $\Sigma_{2p}(\Gamma) = \Sigma(\Gamma)$, on en déduit que $S_p(\Gamma) = \Sigma_p(\Gamma)$ et que X(t) est markovien d'ordre p.

Soit η le bruit blanc gaussien sur $L^2(T)$.

COROLLAIRE 2.6. — X(t) est solution forte unique de

$$(2.35) \qquad \begin{cases} AY = \eta \\ \gamma Y = \gamma X \end{cases} \quad \text{P. p. s. sur T}$$

Démonstration. — η étant une mesure aléatoire, η peut être considéré comme un P. G. G. à trajectoires dans H_A^{-p} et comme $P(X. \in H_A^p) = 1$, (2.35) a bien un sens au sens fort. Par construction, X est solution de (2.35). L'unicité résulte de celle du problème de Dirichlet trajectoire par trajectoire.

2.3.2. CARACTÉRISATION DES P. G. F. pM.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les P. G. F. pM.

PROPOSITION 2.7. — Soit $\{X(t);\ t \in T\}$ un processus gaussien. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

a) X(t) est un P. G. F. pM.,

b) X(t) a pour covariance G(t, s) définie au lemme 2.4,
c) X est solution forte unique de

$$\begin{cases} AY = \eta \\ \gamma Y = \gamma X \end{cases}$$

Démonstration. — $a \Leftrightarrow b$ résulte de la construction précédente.

$a \Rightarrow c$: puisque X(t) est un P. G. F. pM., on a vu que $P(X. \in H_A^p) = 1$. Posons

$$\xi = AX \tag{2.36}$$

qui est bien défini. Alors $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(T)$, on a :

$$\begin{aligned} E[\langle \xi, \varphi \rangle_{\mathscr{D}} \langle \xi, \varphi \rangle_{\mathscr{D}}] &= \langle GA\varphi, A\psi \rangle_{\mathscr{D}} \\ &= (AGA\varphi, \psi)_0 \\ &= (\varphi, \psi)_0 \end{aligned}$$

par définition de G.

Le théorème 1.7 et X P. G. F. pM. impliquent $\gamma Y = \gamma X$.

$c \Rightarrow a$: en utilisant les résultats obtenus lors de la construction ci-dessus, l'implication $c \Rightarrow a$ se démontre comme dans la proposition 2.2.

En utilisant les notations (1.17), puisque les opérateurs K déduits de R ou de G vérifient (1.12), la remarque 1.7 donne le

THÉORÈME 2.8. — Soit X(t) un processus stochastique gaussien. Si X est soit un P. G. F. pM., soit un P. G. pM., alors on a la propriété de continuité suivante :

$$\Sigma^-(\Gamma) = \Sigma(\Gamma) = \Sigma^+(\Gamma)$$

pour tout couple d'ouverts complémentaires (O_-, Γ, O_+) de T.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] BADRIKIAN, Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques, *Lectures notes in Math.*, Springer-Verlag, p. 139.

[*2*] BARO NETO, *Problèmes aux limites non homogènes*, Cours d'été de l'OTAN, Les presses de l'Université de Montréal, mai 1966.

[*3*] BAXENDALL, Gaussian measures on function spaces, *American Journal of Math.*, vol. **98**, n° 4, p. 891, 952.

[*4*] G. KALLIANPUR and V. MANDREKAR, The Markov property for generalized Gaussian Random Fields, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. **24**, 2, 1974, p. 143-167.

[*5*] V. MANDREKAR, Germ-field Markov property for multiparameter processes, Séminaire de probabilité de Strasbourg X, *Lectures Notes in Math.*, Springer, 1976, p. 78-85.

[6] G. M. MOLČAN, Characterization of Gaussian fields with Markovian property, *Translation Soviet Math. Dokl.*, t. **12**, 1971, p. 563-567.
[7] L. PITT, A Markov property for Gaussian processes with a multidimensional parameter. *Arch. for ratio. Mech. and Analysis*, vol. **43**, 1971, p. 367, 391.
[8] ROZANOV, Stochastics Markov fields, *Advances in Appl. Probability*, vol. **10**, n° 2, June 1978, p. 272.
[9] H. SATO, Gaussian measures on a Banach space and Abstract Wiener measure, *Nagoya Math. J.*, vol. **36**, 1969, p. 65-81.

(Manuscrit reçu le 1er décembre 1978)