ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARIE-FRANCE ALLAIN

Approximation par des intégrales de Stieltjes-Lebesgue d'intégrales stochastiques relatives au mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, n^o 4 (1978), p. 441-464

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_4_441_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 4, 1978, p. 441-464.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Approximation par des intégrales de Stieltjes-Lebesgue d'intégrales stochastiques relatives au mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$

par

Marie-France ALLAIN

IRISA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

RÉSUMÉ. — Nous considérons un mouvement Brownien β indexé par $\mathbb{R}_+^d$, à valeurs réelles. Si $d = 1$ il est bien connu que l'on peut approximer certaines intégrales stochastiques relatives à β, par des intégrales de Stieltjes-Lebesgue relatives à β^n, où β^n est un processus à trajectoires continues, linéaires par morceaux. Dans la première partie, nous montrons un résultat analogue pour $d > 1$; dans la deuxième partie nous supposons que $d = 2$ et nous donnons des approximations pour des intégrales relatives à β et $\bar{\beta}^\gamma \left(\bar{\beta}_t^\gamma = \int_{]]0,t]]^2} \gamma(s, u) d\beta_s d\beta_u \right)$. Les suites d'approximations considérées convergent au sens de la moyenne quadratique.

SUMMARY. — We consider a Brownian motion β with d-dimensional parameter and with values in $\mathbb{R}$. If $d = 1$ it is well known that we can approximate stochastic integrals related to β by Stieltjes-Lebesgue integrals related to β^n where β^n is a random process with continuous and piecewise linear paths. In the first part, we prove an analogous result for $d > 1$; in the second part, we suppose $d = 2$ and we give approximation results for integrals related to β and $\bar{\beta}^\gamma \left(\bar{\beta}_t^\gamma = \int_{]]0,t]]^2} \gamma(s, u) d\beta_s d\beta_u \right)$. All approximation sequences converging in the sense of mean square.

1. INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étendre au mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$ (tel qu'il est défini par Wong et Zakaï [5]), un résultat connu dans le cas du mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+$. Plus précisément, soit $(\Omega, F, (F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \beta, P)$ un mouvement Brownien à valeurs réelles et une suite d'approximations $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenues en linéarisant les trajectoires de β, il est alors facile de voir en utilisant la formule de Itô que, pour toute fonction G de classe C^2 la suite $(X^n)_{n \in N}$ définie par

$$X_t^n = G(\beta_t^n) = \int_0^t G'(\beta_s^n) d\beta_s^n + G(o)$$

converge presque sûrement, lorsque le pas des subdivisions décroît vers zéro, vers le processus X tel que :

$$X_t = G(\beta_t) = \int_0^t G'(\beta_s) d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t G''(\beta_s) ds + G(o)$$

Notons que les trajectoires de X^n sont continues et à variation bornée.

Des problèmes de ce type ont également été étudiés dans le cas du mouvement Brownien à valeurs dans R^d et dans le cas des équations différentielles stochastiques ([*1*] [*2*] [*3*] [*4*]).

Dans le cas du mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$ on est conduit à considérer plusieurs types d'intégrales stochastiques ([*5*] [*6*]).

Le premier théorème étend au cas du mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}_+^d$ le résultat connu dans le cas où $d = 1$.

Pour la suite, on suppose que $d = 2$, dans ce cas Wong et Zakaï [*5*] ont mis en évidence le rôle joué par les intégrales de premier et second types, ce sont certaines de ces intégrales que nous allons approximer en moyenne quadratique, par des intégrales de Stieltjes-Lebesgue.

Plus précisément, soit $(\Omega, F, (F_t)_{t \in [0,1]^d}, \beta, P)$ un mouvement Brownien; pour une fonction γ définie sur $[0, 1]^{2d}$ et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue, on note $I_2(\gamma)$ l'intégrale de second type ; soit alors $\bar{\beta}_t^\gamma = E(I_2(\gamma)/F_t)$. β est une martingale forte et $\bar{\beta}^\gamma$ est une martingale. Ce sont des intégrales relatives à ces deux martingales que nous considérons.

Notons qu'on peut par la même méthode donner des approximations des intégrales mixtes et obtenir la formule de Itô ; cependant l'existence des différents types d'intégrales ne permet pas de l'obtenir aussi rapidement que dans le cas où $d = 1$.

Nous donnons ici l'essentiel des démonstrations, on pourra trouver des calculs plus détaillés dans le « Séminaire de Probabilités I » (Publication des Séminaires de Mathématiques et Informatique de Rennes I, parution fin 1978).

Pour la définition des intégrales stochastiques et des martingales, on se réfère à Wong et Zakaï ([5] [6]).

2. APPROXIMATION D'INTÉGRALES RELATIVES A β

2.1. Notations

— $(\Omega, F, (F_t)_{t\in R_+^d}, P, \beta)$ est un mouvement Brownien indexé par R_+^d tel qu'il est défini par Wong et Zakaï [5].

— Pour tout t de R_+^d, $t = (t^1, \ldots, t^d)$ on note $\| 0, t \|$ le pavé :

$$\prod_{r=1}^{d} [0, t^r] .$$

— n étant fixé, on considère des partitions de [0, 1] et la partition produit, on note $(C_k^n)_{k=1\ldots k(n)}$ les pavés de $\| 0, 1 \|$ ainsi obtenus.

Soient

$$(i_k^n)^r = \operatorname{Inf} \{ t^r : t \in C_k^n \}$$

$$(s_k^n)^r = \operatorname{Sup} \{ t^r : t \in C_k^n \}$$

alors

$$C_k^n = \prod_{r=1}^{d} [(i_k^n)^r, (s_k^n)^r [$$

— Si $t \in C_{k_0}^n$ $I^n(k_0) = \{ k : C_k^n \subseteq [\![0, t]\!] \}$

— Nous utiliserons les notations suivantes :

$$(h_k^n)^r = (s_k^n)^r - (i_k^n)^r \qquad r = 1 \ldots d$$

$$\lambda_k^n = \prod_{r=1}^{d} (h_k^n)^r \qquad | h_k^n | = \sum_{r=1}^{d} (h_k^n)^r$$

$$| h^n | = \operatorname*{Sup}_{k=1\ldots k(n)} | h_k^n |$$

— Pour une fonction f définie sur $\| 0, 1 \|$, à valeurs réelles et r fois continûment différentiable, on définit $\| D^r f \|$ par :

$$\| D^r f \| = \operatorname*{Sup}_{t\in\|0,1\|} \operatorname*{Sup}_{k\in J_r^d} \left| \frac{\partial^r f(t)}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_d^{k_d}} \right|$$

où :

$$J_r^d = \left\{ k : k = (k_1, \ldots, k_d)\ k_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{d} k_i = r \right\}$$

2.2. DÉFINITIONS. — Soit $\Delta_k^n \beta = \int_{C_k^n} d\beta_s$.

On pose

$$\Psi^n(s) = \sum_{k=1}^{k(n)} \frac{\Delta_k^n \beta}{\lambda_k^n} 1_{C_k^n}(s)$$

et

$$\beta_t^n = \int_{]]0,t]]} \Psi^n(s) ds$$

Pour toute la suite, on suppose que $\lim_n | h^n | = 0$ et qu'il existe K_0 tel que $\forall k$, $\forall n$ $| h_k^n |^d \leqslant K_0 \lambda_k^n$, notons qu'alors $| h_k^n |^d$ et λ_k^n sont comparables puisque $\lambda_k^n \leq | h_k^n |^d$.

Remarque. — Dans chaque énoncé et au cours des démonstrations interviennent des constantes de majoration, pour simplifier l'écriture nous les noterons toujours par K, elles dépendent de d et des bornes imposées dans l'hypothèse, elles dépendent également de T si l'on considère $]]0, T]]$ au lieu de $]]0, 1]]$.

2.3. PROPOSITION. — Soit $\phi(s, \omega)$ une fonction à valeurs réelles telle que

— $\phi(s, .)$ est F_s-mesurable,

— $\phi(., \omega)$ est de classe C_{d_0} avec $2d_0 \geq d + 1$,

On suppose qu'il existe une constante C telle que :

$$\operatorname*{Sup}_{\omega \in \Omega} \operatorname*{Sup}_{r=0\ldots d_0} \| D^r \phi(., \omega) \| \leq C$$

On définit Y et Y^n par :

$$Y_t = \int_{]]0,t]]} \phi(s, \omega) d\beta_s$$

$$Y_t^n = \int_{]]0,t]]} \phi(s, \omega) d\beta_s^n$$

Alors il existe une constante K telle que :

$$\operatorname*{Sup}_{t \in]]0,1]]} E \{ [Y_t^n - Y_t]^2 \} \leq K | h^n |$$

Esquisse de la démonstration

Si t appartient à $C^n_{k_0}$ il suffit d'écrire :

$$\int_{]]0,t]]} \phi(s, \omega)\psi^n(s)ds = \int_{]]0,t]]-]]0,i^n_{k_0}]]} \phi(s, \omega)\Psi^n(s)ds + \sum_{k\in I^n(k_0)} \left(\int_{C^n_k} \phi(s, \omega)ds \right) \frac{\Delta^n_k\beta}{\lambda^n_k}$$

compte tenu des hypothèses de dérivabilité faites sur la fonction ϕ, on écrit pour $s \in C^n_k$ le développement de Taylor de ϕ :

$$\phi(s, \omega) = \phi(i^n_k, \omega) + \sum_{p=1}^{d_0-1} \frac{1}{p\,!} D^p\phi(i^n_k, \omega)(s - i^n_k)^{\otimes p} + R^n_k(s)$$

on a : $|R^n_k(s)| \leq C\,|h^n_k|^{d_0}$; on pose $R^n(s) = \sum_{k=1}^{k(n)} R^n_k(s)1_{C^n_k}(s)$ on vérifie alors que

$$E\left(\left[\int_{]]0,t]]-]]0,i^n_{k_0}]]} \phi(s, \omega)d\beta_s\right]^2\right) \leq \int_{]]0,t]]-]]0,i^n_{k_0}]]} E([\phi(s, \omega)]^2)ds \leq C^2\,|h^n|$$

$$E\left(\left[\int_{]]0,t]]-]]0,i^n_{k_0}]]} \phi(s, \omega)\Psi^n(s)ds\right]^2\right) \leq K\,|h^n|$$

$$E\left(\left[\sum_{k\in I^n(k_0)} \phi(i^n_k, \omega)\Delta^n_k\beta - \int_{]]0,i^n_{k_0}]]} \phi(s, \omega)d\beta_s\right]^2\right) \leq K\,|h^n|$$

$$E\left(\left[\sum_{k\in I^n(k_0)} D^p\phi(i^n_k, \omega) \int_{C^n_k} (s - i^n_k)^{\otimes p} \frac{\Delta^n_k\beta}{\lambda^n_k} ds\right]^2\right) \leq K\,|h^n|$$

pour $p = 1 \dots d_0 - 1$

$$E\left(\left[\int_{]]0,i_{k_0}]]} R^n_k(s)\Psi^n(s)ds\right]^2\right) \leq K\,|h^n|$$

La raison pour laquelle on doit développer ϕ jusqu'à l'ordre $d_0 - 1$ avec $2d_0 \geq d + 1$ est liée à l'indépendance de $\Delta^n_k\beta$ par rapport à $F_{i^n_k}$ et au fait que, pour le reste, en l'absence d'indépendance de $R^n(s)$ et $\Psi^n(s)$ on a la majoration :

$$E\left(\left[\int_{]]0,i^n_{k_0}]]} R^n(s)\Psi^n(s)ds\right]^2\right) \leq \sum_{k\in I^n(k_0)} \int_{C^n_k} C^2\,|h^n_k|^{d_0}[E[\Delta^n_k\beta]^2]\,[\lambda^n_k]^{-2}ds \leq K \sum_{k\in I^n(k_0)} |h^n_k|^{2d_0}$$

pour pouvoir conclure, il suffit donc que $2d_0 \geq d + 1$ puisque $|h_k^n|^d \leq K\lambda_k^n$. Notons qu'on peut remplacer l'hypothèse :

$$\operatorname*{Sup}_{\omega\in\Omega}\ \operatorname*{Sup}_{r\in\{0\ldots d_0\}} \| D^r\phi(.,\omega)\| \leq C$$

par

$$\operatorname*{Sup}_{r\in\{0,\ldots,d_0-1\}} E[\| D^r\phi\|^2] + E[\| D^{d_0}\phi\|^4] \leq C$$

2.4. THÉORÈME. — Soit G une fonction définie sur R à valeurs réelles de classe C^b_{d+1}.

Soit ϕ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2.3.

Soient Y^n et Y définis précédemment.

Et soient $X_t = \int_{\|0,t\|} G(Y_s)d\beta_s$

$$X_t^n = \int_{\|0,t\|} G(Y_s^n)d\beta_s^n - \frac{1}{2^d}\int_{\|0,t\|} G'(Y_s^n)\phi(s,\omega)ds$$

Alors, il existe une constante K telle que

$$\operatorname*{Sup}_{t\in\|0,1\|}\{E([X_t^n - X_t]^2)\} \leq K\,|h^n|$$

Démonstration. — Écrivons $X_t^n = X_t^n - X_{i_{k_0}^n}^n + X_{i_{k_0}^n}^n$ soit

$$A_n = X_{i_{k_0}^n}^n = \sum_{k\in I_{k_0}^n} G(Y_{i_k^n}^n)\Delta_k^n\beta$$
$$+ \sum_{k\in I_{k_0}^n} G'(Y_{i_k^n}^n)\frac{\Delta_k^n\beta}{\lambda_k^n}\int_{C_k^n}(Y_s^n - Y_{i_k^n}^n)ds - \frac{1}{2^d}\int_{\|0,t\|} G'(Y_s^n)\phi(s,\omega)ds + R^n$$

On vérifie alors que

$$E\left(\left[\sum_{p\in I^n(k_0)} G(Y_{i_p^n}^n)\Delta_p^n\beta - \int_{\|0,t\|} G(Y_s)d\beta_s\right]\right) \leq K\,|h^n|$$

et que

$$E\left(\left[\sum_{p\in I^n(k_0)} G'(Y_{i_p^n}^n)\frac{\Delta_p^n\beta}{\lambda_p^n}\int_{C_p^n}(Y_s^n - Y_{i_p^n}^n)ds - \frac{1}{2^d}\int_{\|0,t\|} G'(Y_s^n)\phi(s,\omega)ds\right]^2\right) \leq K\,|h^n|$$

pour ce dernier terme, on est amené à écrire $Y_s^n - Y_{i_p^n}^n$ sous la forme :

$$Y_s^n - Y_{i_p^n}^n = \frac{\Delta_p^n\beta}{\lambda_p^n}\int_{\pi_{i=1}^{d}[i_p^{nr},s^r]}\phi(u,\omega)du + \sum_{q=1}^{2^d-2}\int_{C_q^n(s)}\phi(u,\omega)\Psi^n(u)du$$

où $C_q^n(s)$ est défini de la façon suivante :

$$\text{pour} \quad I \subseteq \{1, 2 \ldots d\} \qquad I \neq \emptyset \quad \text{et} \quad I \neq \{1, 2 \ldots d\}$$

on pose :

$$C_I^n(s) = \{ u \in ||0, t|| : u^r < (i_p^n)^r \ r \in I, (i_p^n)^r \leq u^r < s^r \ r \in I^c \}$$

on obtient ainsi $2^d - 2$ ensembles qu'on note $(C_q^n(s))_{q=1\ldots 2^d-2}$.

Le premier terme de la décomposition de $Y_s^n - Y_{i_p^n}^n$ après développement de ϕ par la formule de Taylor à l'ordre $d_0 - 1$ fait apparaître

$$\frac{1}{2^d}[\Delta_p^n\beta]^2\phi(i_p^n, \omega)$$

et on vérifie que :

$$E\left(\left[\sum_{p\in I^n(k_0)} G'(Y_{i_p^n}^n)\phi(i_p^n, \omega)([\Delta_p^n\beta]^2 - \lambda_p^n)\right]^2\right) \leq K\,|\,h^n\,|$$

La somme pour q variant de 1 à $2^d - 2$ est orthogonale à $\Delta_p^n\beta$, la contribution des termes correspondants tend vers zéro quand n tend vers l'infini, en étant majorée par $K\,|\,h^n\,|$

Pour le reste, on obtient la majoration en développant G jusqu'à l'ordre d.

Pour achever la démonstration, on établit la majoration de

$$E\left(\left[\int_{||0,t||-||0,i_{k_0}^n||} G(Y_s^n)\Psi^n(s)ds\right]^2\right)$$

en utilisant les mêmes arguments.

2.5. Corollaire. — Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 2.4, soit :

$$V_t = \int_{||0,t||} G(Y_s)d\beta_s + \frac{1}{2^d}\int_{||0,t||} G'(Y_s)\phi(s, \omega)ds$$

$$V_t^n = \int_{||0,t||} G(Y_s^n)d\beta_s^n$$

alors il existe une constante K telle que :

$$\operatorname*{Sup}_{t\in||0,1||} \{ E[V_t^n - V_t]^2 \} \leq K\,|\,h^n\,|$$

Démonstration. — G′ est lipschitzienne, ϕ est bornée et d'après la proposition 2.3, on a :

$$\operatorname*{Sup}_{t\in||0,1||} \{ E([Y_t^n - Y_t]^2) \leq K\,|\,h^n\,|$$

d'où le corollaire.

3. APPROXIMATION D'INTÉGRALES RELATIVES A β ET $\bar{\beta}$

Pour toute la suite, nous supposons que $d = 2$.

3.1. Définitions, notations et propriétés

3.1.1. Définition de l'intégrale de second type

Soit $\phi(s, u, w)$ une fonction définie sur $]]0, 1[[^2 \times \Omega$ vérifiant les hypothèses H* :

— ϕ est mesurable par rapport à $F \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}$, ($\mathbb{B}$ est la tribu borélienne de $]]0, 1[[$) ;

— pour tout couple (s, u) fixé $\phi(s, u, w)$ est $F_{s \vee u}$-mesurable,

— $$\int_{]]0,1[[^2} E[\phi(s, u, w)]^2 ds du < +\infty .$$

Nous dirons que s et u sont non comparables si ($s^1 < u^1$ et $s^2 > u^2$) ou ($s^1 > u^1$ et $s^2 < u^2$), soit :

$$H = \{ (s, u) : s \text{ et } u \text{ non comparables} \}$$

Pour une fonction satisfaisant aux hypothèses et de la forme :

$$\phi(s, u, w) = \alpha(w) 1_{C_1}(s) 1_{C_2}(u)$$

avec $C_1 \times C_2 \subset H$ on définit l'intégrale de second type par :

$$\int_{]]0,1[[^2} \phi(s, u, w) d\beta_s d\beta_u = \alpha(w) \int_{C_1} d\beta_s \int_{C_2} d\beta_u$$

Si la condition $C_1 \times C_2 \subset H$ n'est pas satisfaite, on procède de la façon suivante : on se donne un treillis sur $]]0, 1[[$ de pas ε, s étant fixé, il existe un couple unique $(i_k^\varepsilon, s_k^\varepsilon)$ du treillis tel que $s \in C_k^\varepsilon = \prod_{r=1}^{2} [(i_k^\varepsilon)^r, (s_k^\varepsilon)^r[$; on définit alors $I_2^\varepsilon(\phi)$ par :

$$I_2^\varepsilon(\phi) = \sum_{k,k'} \phi(i_k^\varepsilon, i_{k'}^\varepsilon) 1_H(i_k^\varepsilon, i_{k'}^\varepsilon) \int_{C_k^\varepsilon} d\beta_s \int_{C_{k'}^\varepsilon} d\beta_u$$

On montre (cf. [5]) que la limite en moyenne quadratique de $I^\varepsilon(\phi)$ existe quand ε tend vers zéro. On définit alors l'intégrale de second type de ϕ par :

$$I_2(\phi) = \int_{]|0,1|[^2} \phi(s, u, w)d\beta_s d\beta_u = \lim_{\substack{\|\cdot\|_2 \\ \varepsilon\to 0}} I_2^\varepsilon(\phi).$$

On étend la définition aux fonctions ϕ satisfaisant H* en approximant ϕ par des fonctions simples.

En particulier si $\gamma(s, u)$ est une fonction définie sur $]|0, 1|[^2$ à valeurs réelles, telles que :

$$\int_{]|0,1|[^2} [\gamma(s, u)]^2 ds du < +\infty$$

on sait définir :

$$\bar{\beta}_t^\gamma = \int_{]|0,t|[^2} \gamma(s, u)d\beta_s d\beta_u$$

Remarquons que $\bar{\beta}^\gamma$ est une martingale à trajectoires continues et que

$$E([\bar{\beta}_t^\gamma]^2) = \int_{]|0,t|[^2} 1_H(s, u)[\gamma(s, u)]^2 ds du$$

3.1.2. Soit $\gamma^*(s, u) = \gamma(s, u) + \gamma(u, s)$.

Définissons $\bar{\Delta}_k^n\beta$ (qu'on notera $\bar{\Delta}_k^n\beta^\gamma$ si nécessaire) par :

$$\bar{\Delta}_k^n\beta = \sum_{j\in I_1^n(k)} \sum_{p\in I_2^n(k)} \frac{1}{\lambda_j^n}\frac{1}{\lambda_p^n} \int_{C_j^n\times C_p^n} \gamma^*(v, w)dv dw \Delta_j^n\beta\Delta_p^n\beta$$

où

$$I_1^n(k) = \{ j : (i_k^n)^1 = (i_j^n)^1, (i_j^n)^2 < (i_k^n)^2 \}$$
$$I_2^n(k) = \{ j : (i_k^n)^2 = (i_j^n)^2, (i_j^n)^1 < (i_k^n)^1 \}$$

on notera

$$\gamma^n(s, u) = \sum_j \sum_p \frac{1}{\lambda_j^n}\frac{1}{\lambda_p^n} \int_{C_j^n\times C_p^n} \gamma(v, w)dv dw 1_{C_j^n}(s)1_{C_p^n}(u)$$

3.1.3. Pour tout couple (i, j) on a : $E(\bar{\Delta}_i^n\beta\bar{\Delta}_j^n\beta) = \delta_{ij}E([\bar{\Delta}_i^n\beta]^2)$ et

$$E([\bar{\Delta}_k^n\beta]^2) \le \sum_{j\in I_1^n(k)} \sum_{p\in I_2^n(k)} \int_{C_p^n\times C_j^n} [\gamma^*(v, w)]^2 dv dw$$

3.1.4. Pour tout couple (i, j), on a : $E(\bar{\Delta}_i^n\beta\Delta_j^n\beta) = 0$.

3.1.5. Soit alors $\Psi^n(s) = \sum_k \frac{\bar{\Delta}_k^n\beta}{\lambda_k^n} 1_{C_k^n}(s)$ qu'on notera $\Psi^n(s, \gamma)$ si nécessaire et $\beta_t^n = \int_{]]0,t]]} \bar{\Psi}^n(s)ds$. Notons que $\int_{C_k^n} d\bar{\beta}_s^n \neq \int_{C_k^n} d\bar{\beta}_s$ on vérifie que $\bar{\beta}_{i_k^n}^n$ est $F_{i_k^n}$ mesurable et que $\lim_n \operatorname{Sup}_t E([\bar{\beta}_t^\gamma - \bar{\beta}_t^n]^2) = 0$.

Si de plus γ est lipschitzienne, il existe une constante K telle que

$$\operatorname{Sup}_{t \in]]0,1]]} E([\bar{\beta}_t^\gamma - \bar{\beta}_t^n]^2) \leq K \mid h^n \mid$$

3.1.6. Pour des fonctions $\phi(s, \omega)$ telles que :

$$\begin{cases} \phi(s, .) \quad \text{est } F_s\text{-mesurable} \\ \int_{]]0,t]]^2} E([\phi(s \vee u, \omega)]^2)[\gamma(s, u)]^2 ds du < +\infty \end{cases}$$

On sait définir l'intégrale de 2nd type et on a la propriété :

$$\int_{]]0,t]]^2} \phi(s \vee u, \omega)\gamma(s, u) d\beta_s d\beta_u = \int_{]]0,t]]} \phi(s, \omega) d\bar{\beta}_s^\gamma$$

3.2. Proposition. — Soit ϕ une fonction satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2.3.

Soit

$$\bar{Y}_t^n = \int_{]]0,t]]} \phi(s, \omega) d\bar{\beta}_s^n$$

$$\bar{Y}_t = \int_{]]0,t]]} \phi(s, \omega) d\bar{\beta}_s^\gamma$$

Alors $\lim_n \operatorname{Sup}_{t \in]]0,1]]} E([\bar{Y}_t^n - \bar{Y}_t]^2) = 0$.

Si de plus γ est lipschitzienne, il existe une constante K telle que

$$\operatorname{Sup}_{t \in]]0,1]]} E([\bar{Y}_t^n - \bar{Y}_t]^2) \leq K \mid h^n \mid$$

Démonstration. — On montre d'abord que

$$E\left(\left[\sum_{k \in I^n(k_0)} \phi(i_k^n, \omega)\bar{\Delta}_k^n \beta - \int_{]]0,t]]^2} \phi(s \vee u, \omega)\gamma(s, u) d\beta_s d\beta_u\right]^2\right)$$
$$\leq K \left\{ \int_{]]0,1]]^2} [\gamma^n(s, u) - \gamma(s, u)]^2 ds du + \sum_{k,p \in J} \int_{C_p^n \times C_k^n} [\gamma(v, w)]^2 dv dw + \mid h^n \mid \right\}$$

où

$$J = \{ (k, p) : (i_p^n)^1 = (i_k^n)^1 \text{ ou } (i_p^n)^2 = (i_k^n)^2,\ p \neq k \}$$

puis on vérifie en utilisant le fait que $\phi(., \omega)$ est de classe C_2^b que

$$E\left(\left[\int_{]]0,t]]} \phi(s, \omega)\bar{\Psi}^n(s) ds - \sum_{k \in I^n(k_0)} \phi(i_k^n, \omega)\bar{\Delta}_k^n\right]^2\right)$$

tend vers zéro en étant majoré par $K \mid h^n \mid$ quand γ est lipschitzienne (cf. la démonstration de la proposition 2.3 et les propriétés 3.1).

3.3. THÉORÈME. — Soit ϕ une fonction satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2.3, on suppose de plus que γ est bornée.

$\bar{Y}$ et $\bar{Y}^n$ sont définis comme précédemment.

Soit G une fonction de $C_3^b(R)$ soit

$$Z_t^n = \int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s^n) d\beta_s^n$$

et

$$Z_t = \int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s) d\beta_s$$

Alors $\lim_n \operatorname{Sup}_{t \in]]0,1]]} E([Z_t^n - Z_t]^2) = 0$ et si de plus γ est lipschitzienne, il existe une constante K telle que :

$$\lim_n \operatorname{Sup}_t E([Z_t^n - Z_t]^2) \leq K \mid h^n \mid .$$

Remarque. — Notons l'absence de terme complémentaire dans le passage à la limite, ceci résulte de l'orthogonalité de $\Delta_k^n\beta$ et $\bar{\Delta}_k^n\beta$.

Démonstration. — Elle est du même type que les précédentes ; pour $s \in C_k^n$ on écrit

$$G(\bar{Y}_s^n) = G(\bar{Y}_{i_k^n}^n) + G'(\bar{Y}_{i_k^n}^n)(\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n) + \frac{1}{2} G''(\bar{Y}_{i_k^n}^n)(\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n)^2 + R_k^n(s)$$

et $\mid R_k^n(s) \mid \leq K \mid \bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n \mid^3$ et compte tenu de l'écriture de $(\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n)$ on obtient les majorations.

3.4. THÉORÈME. — Soit ϕ une fonction satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2.3. On suppose de plus que γ est bornée.

Y et Y^n sont définis comme précédemment (cf. 2.3).

Soit G une fonction de $C_3^b(R)$.

Soit

$$\bar{Z}_t = \int_{]]0,t]]} G(Y_s) d\bar{\beta}_s^\gamma$$

$$\bar{Z}_t^n = \int_{]]0,t]]} G(Y_s^n) d\bar{\beta}_s^n$$

$$- \frac{1}{2} \int_{]]0,t]]^2} 1_H(s, u) G'(Y_{s \vee u}^n) \phi(u, \omega) \gamma^*(s, u) d\beta_s^n du$$

$$+ \frac{1}{8} \int_{]]0,t]]^2} 1_H(s, u) G''(Y_{s \vee u}^n) \phi(u, \omega) \gamma^*(s, u) \phi(s, \omega) ds du$$

Alors
$$\lim_n \operatorname*{Sup}_{t\in]]0,1]]} E([\bar{Z}_t - \bar{Z}_t^n]^2) = 0$$
Si de plus γ est lipschitzienne, il existe une constante K telle que
$$\lim_n \operatorname*{Sup}_{t\in]]0,1]]} E([\bar{Z}_t - \bar{Z}_t^n]^2) \leq K \mid h^n \mid$$

Esquisse de la démonstration

Soit
$$V_t^n = \int_{]]0,t]]} G(Y_s^n)\bar{\Psi}^n(s)ds$$
pour $t \in C_{k_0}^n$ on peut écrire :
$$\begin{aligned} V_t^n = V_t^n - V_{i_{k_0}^n}^n &+ \sum_{k\in I^n(k_0)} G(Y_{i_k^n}^n)\bar{\Delta}_k^n\beta \\ &+ \sum_{k\in I^n(k_0)} G'(Y_{i_k^n}^n)\int_{C_k^n}(Y_s^n - Y_{i_k^n}^n)\frac{\bar{\Delta}_k^n\beta}{\lambda_k^n}ds \\ &+ \int_{]]0,i_{k_0}^n]]}\sum_k (G(Y_s^n) - G(Y_{i_k^n}^n) - G'(Y_{i_k^n}^n)(Y_s^n - Y_{i_k^n}^n))1_{C_k^n}(s)\bar{\Psi}^n(s)ds \end{aligned}$$
on vérifie d'abord que

3.4.1 $$E\left(\left[\sum_{k\in I^n(k_0)} G(Y_{i_k^n}^n)\bar{\Delta}_k^n\beta - \int_{]]0,t]]} G(Y_s)d\bar{\beta}_s\right]^2\right)$$

tend vers zéro en étant majoré par $K \mid h^n \mid$ quand γ est lipschitzienne. Ceci résulte essentiellement des propriétés énoncées en 3.1.

On passe alors à l'étude de :
$$A^n = \sum_{k\in I^n(k_0)} G'(Y_{i_k^n}^n)\int_{C_k^n}(Y_s^n - Y_{i_k^n}^n)\frac{\bar{\Delta}_k^n\beta}{\lambda_k^n}ds$$
compte tenu du fait que
$$Y_s^n - Y_{i_k^n}^n = \int_{C_k^n(s)} \phi(u, \omega)du\frac{\Delta_k^n\beta}{\lambda_k^n} + \sum_{p=1}^{2}\int_{C_p^n(s)} \phi(u, \omega)\psi^n(u)du$$

On a deux termes à examiner car le 3^e terme se déduit par symétrie du 2^e terme.

Par suite de l'orthogonalité de $\Delta_k^n\beta$ et $\bar{\Delta}_k^n\beta$, on vérifie facilement que la contribution du premier terme tend vers zéro, en étant majoré par $K \mid h^n \mid$.

Soit alors

$$\bar{A}^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} G'(Y^n_{ik}) \frac{\bar{\Delta}^n_k \beta}{\lambda^n_k} \sum_{j \in I^n_1(k)} \frac{\Delta^n_j \beta}{\lambda^n_j} \int_{C^n_k} ds \int_{C^n_j(s)} \phi(u) du$$

on a

$$\bar{\Delta}^n_k \beta = \sum_{j \in I^n_1(k)} \sum_{p \in I^n_2(k)} \Delta^n_j \beta \, \Delta^n_p \beta \frac{1}{\lambda^n_p} \frac{1}{\lambda^n_j} \int_{C^n_p \times C^n_j} \gamma^*(v, w) dv dw$$

En utilisant l'orthogonalité de $\Delta^n_j \beta$ et $\Delta^n_{j'} \beta$ quand $j \neq j'$, on montre que $E([\bar{A}^n - A^n_1]^2)$ tend vers zéro en étant majoré par $K \mid h^n \mid$ où

$$A^n_1 = \sum_{k \in I^n(k_0)} G'(Y^n_{ik}) \sum_{j \in I^n_1(k)} \sigma^n_{kj} [\Delta^n_j \beta]^2 \sum_{p \in I^n_2(k)} \Delta^n_p \beta (\gamma^*)^n_{pj}$$

avec

$$\sigma^n_{kj} = \frac{1}{\lambda^n_k} \frac{1}{\lambda^n_j} \int_{C^n_k} ds \int_{C^n_j(s)} \phi(u) du$$

$$(\gamma^*)^n_{pj} = \frac{1}{\lambda^n_p} \frac{1}{\lambda^n_j} \int_{C^n_p \times C^n_j} \gamma^*(v, w) dv dw$$

En tenant compte du fait que si $\delta^n_j = [\Delta^n_j \beta]^2 - \lambda^n_j$ on a $E(\delta^n_j) = 0$ et $E(\delta^n_j \Delta^n_p \beta) = 0$ pour $j \in I^n_1(k)$ et $p \in I^n_2(k)$; on pose

$$A^n_2 = \sum_{k \in I^n_1(k_0)} G'(Y^n_{ik}) \sum_{j \in I^n_1(k)} \sigma^n_{kj} \lambda^n_j \sum_{p \in I^n_2(k)} \Delta^n_p \beta (\gamma^*)^n_{pj}$$

et on montre que $E([A^n_1 - A^n_2]^2)$ tend vers zéro. Puis, en transformant l'expression de σ^n_{kj}, on montre que $E\left(\left[A^n_2 - \frac{1}{2} A^n_4\right]^2\right)$ tend vers zéro où :

$$A^n_4 = \sum_k G'(Y^n_{ik}) \int_{C^n_k} ds \int_{]]0,s]]} \phi(s^1, v^2) \gamma^*((s^1, v^2), (w^1, s^2)) \Psi^n(w^1, s^2) dw^1 dv^2$$

Soit donc :

$$B^n = \int_{]]0,t]]} G'(Y^n_s) ds \int_{]]0,s]]} \phi(s^1, v^2) \gamma^*((s^1, v^2), (w^1, s^2)) \Psi^n(w^1, s^2) dw^1 dv^2$$

On compare alors A^n_4 et B^n en écrivant :

$$B^n - A^n_4 = R^n + \sum_k G''(Y^n_{ik}) \int_{C^n_k} (Y^n_s - Y^n_{ik}) ds \int_{]]0,s]]} \phi(s^1, v^2) \gamma^*((s^1, v^2), (w^1, s^2) \Psi^n(w^1, s^2) dw^1 dv^2$$

quand γ est Liptschitzienne on montre que $E((R^n)^2) \leq K \mid h^n \mid$ et que :

$$E\left(\left[B^n - A_4^n - \frac{1}{2}\int_{]]s,t]]} G''(Y_s^n)ds \int_{]]0,s]]} \phi(w^1, s^2)\phi(s^1, v^2)\gamma^*((s^1, v^2), (w^1, s^2))dw^1dv^2\right]^2\right) \leq K \mid h^n \mid$$

Notons que la contribution des premier et second termes de la décomposition de $Y_s^n - Y_{ik}^n$ tend vers zéro. On en déduit que :

$$E\left(\left[A^n - \frac{1}{2}\int_{]]0,t]]} G'(Y_s^n)ds \int_{]]0,s]]} \phi(s^1, v^2)\gamma^*((s^1, v^2)(w^1, s^2))\Psi^n(w^1, s^2)dw^1dv^2 + \frac{1}{4}\int_{]]0,t]]} G''(Y_s^n)ds \int_{]]0,s]]} \phi(w^1, s^2)\phi(s^1, v^2)\gamma^*((s^1, v^2), (w^1, s^2))dw^1dv^2\right]^2\right)$$

tend vers zéro en étant majoré par $K \mid h^n \mid$ quand γ est Lipschitzienne. Remarquons alors que si $H = \{ (s, u) : s$ et u non comparables $\}$ et $H_s = \{ u : (s, u) \in H \}$, on a :

$$H_s = (]s^1, 1] \times [0, s^2[) \cup ([0, s^1[\times]s^2, 1])$$

$$\int_{]]0,t]]} G'(Y_s^n)ds \int_{]]0,s]]} \phi(s^1, v^2)\gamma^*((s^1, v^2), (w^1, s^2)\Psi^n(w^1, s^2)dw^1dv^2 = \int_{]]0,t]]} \Psi^n(s)ds \int_{]s^1,t^1] \times [0,s^2[} G'(Y_{u^1,s^2}^n)\phi(u)\gamma^*(s, u)du$$

et :

$$\int_{]]0,t]]} G''(Y_s^n)ds \int_{]]0,s]]} \phi(w^1, s^2)\phi(s^1,v^2)\gamma^*((s^1,v^2)(w^1, s^2)dw^1dv^2 = \int_{]]0,t]]} \phi(s)ds \int_{]s^1,t^1] \times [0,s^2[} G''(Y_{u^1,s^2}^n)\phi(u)\gamma^*(s, u)du$$

En tenant compte de la symétrie et du fait que :

$(u^1, s^2) = u \vee s$ si $u \in]s^1, t^1] \times [0, s^2[$ $(s^1, u^2) = u \vee s$ si $u \in]0, s^1] \times]s^2, t^2]$

on a :

3.4.2

$$E\left(\left[\sum_{k \in I^n(k_0)} G'(Y_{ik}^n) \int_{C_k^n} (Y_s^n - Y_{ik}^n)\frac{\bar{\Delta}_k^n \beta}{\lambda_k^n} ds - \frac{1}{2}\int_{]]0,t]]^2} 1_H(s, u)G'(Y_{s \vee u}^n)\phi(u)\gamma^*(s, u)\Psi^n(s)duds + \frac{1}{4}\int_{]]0,t]]^2} 1_H(s, u)G''(Y_{s \vee u}^n)\phi(u)\gamma^*(s, u)\phi(s)dsdu\right]^2\right)$$

qui tend vers zéro en étant majoré par $K \mid h^n \mid$ quand γ est Lipschitzienne.

On passe alors à l'étude de :

$$C^n = \sum_k G''(Y^n_{i_k^n}) \int_{C_k^n} [Y^n_s - Y^n_{i_k^n}]^2 \Psi^n_s ds$$

$[Y^n_s - Y^n_{i_k^n}]^2$ comporte six termes, par suite de la symétrie il suffit d'en étudier quatre. On s'apercoit alors que le seul terme dont la contribution ne tend pas vers zéro est celui qui correspond aux termes :

$$\left(\sum_{j \in I_1^n(k)} \int_{C_j^n(s)} \phi(u) du \frac{\Delta_j^n \beta}{\lambda_j^n} \right) \quad \left(\sum_{p \in I_2^n(k)} \int_{C_p^n(s)} \phi(u) du \frac{\Delta_p^n \beta}{\lambda_p^n} \right)$$

dans la décomposition de $[Y^n_s - Y^n_{i_k^n}]^2$. Il est en relation avec la variation quadratique de $\bar{\beta}$.

Plus précisément on montre que :

3.4.3

$$E\left(\left[\sum_k G''(Y^n_{i_k^n}) \int_{C_k^n} [Y^n_s - Y^n_{i_k^n}]^2 \Psi^n_s ds \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2} \int_{]]0,t]]} G''(Y^n_s) ds \int_{]]0,s]]} \phi(w^1, s^2)\phi(s^1, v^2)\gamma^*((s^1, v^2)(w^1, s^2)) dw^1 dv^2 \right]^2 \right)$$

tend vers zéro en étant majoré par $K \mid h^n \mid$ quand γ est Lipschitzienne.

Il ne reste plus qu'à vérifier que :

$$E([V^n_t - V^n_{i_{k_0}^n}]^2) \leq K \mid h^n \mid$$

et :

$$E\left(\left[\sum_{k \in I_{k_0}^n} \int_{C_k^n} \left[G(Y^n_s) - G(Y^n_{i_k^n}) - G'(Y^n_{i_k^n})(Y^n_s - Y^n_{i_k^n}) \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{1}{2} G''(Y^n_{i_k^n})[Y^n_s - Y^n_{i_k^n}]^2 \right] ds \right]^2 \right) \leq K \mid h^n \mid$$

pour achever la démonstration du théorème puisque :

$$\frac{1}{4} \int_{]]0,t]]} G''(Y^n_s) ds \int_{]]0,s]]} \phi(w^1, s^2)\phi(s^1, v^2)\gamma^*((s^1, v^2)(w^1, s^2)) dw^1 dv^2$$
$$= \frac{1}{8} \int_{]]0,t]]^2} 1_H(s, u) G''(Y^n_{s \vee u}) \phi(s) \gamma^*(s, u) \phi(u) ds du .$$

3.5. THÉORÈME. — Soit ϕ une fonction définie sur $]]0, 1]]$, γ et Γ des fonctions définies sur $]]0, 1]]^2$. On suppose que ces fonctions sont à valeurs réelles et Lipschitziennes.

Soient $\bar{Y}$ et $\bar{Y}^n$ définis par :

$$\bar{Y}_t = \int_{]]0,t]]} \phi(s) d\bar{\beta}_s^{\Gamma}, \qquad \bar{Y}_t^n = \int_{]]0,t]]} \phi(s) \bar{\Psi}^n(s, \Gamma) ds$$

G étant une fonction de $C_3^b(R)$. Soient $\bar{W}$ et $\bar{W}^n$ définis par :

$$\bar{W}_t = \int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s) d\bar{\beta}_s^{\gamma}$$

$$\bar{W}_t^n = \int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s^n) \bar{\Psi}^n(s, \gamma) ds$$

$$- \frac{1}{2} \int_{]]0,t]]} G'(\bar{Y}_s^n) \left[\int_{]]0,s]]} \phi(s^1, v^2) \sigma^n(s, v) d\beta_v^n \right] ds$$

$$- \frac{1}{2} \int_{]]0,t]]} G'(\bar{Y}_s^n) \left[\int_{]]0,s]]} \phi(v^1, s^2) \bar{\sigma}^n(s, v) d\beta_v^n \right] ds$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{]]0,t]]} G'(\bar{Y}_s^n) \phi(s) \left[\int_{]]0,s]]} \gamma^* . \Gamma^*((s^1, u^2), (u^1, s^2)) du \right] ds$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{]]0,t]]} G''(\bar{Y}_s^n) \left[\int_{]]0,s]]^2} \phi(u^1, s^2) \phi(s^1, v^2) \alpha(u, s, v) d\beta_u^n d\beta_v^n \right] ds$$

où :

$$\sigma^n(s, v) = \int_{[0,s^1] \times [0,v^2]} \gamma^*((u^1, s^2), (s^1, u^2)) \Gamma^*((s^1, u^2), v) \Psi^n(u^1, s^2) du$$

$$\bar{\sigma}^n(s, v) = \int_{[0,v^1] \times [0,s^2]} \gamma^*((u^1, s^2), (s^1, u^2)) \Gamma^*((u^1, s^2), v) \Psi^n(s^1, u^2) du$$

$$\alpha(u, s, v) = \int_{[0,u^1] \times [0,v^2]} \gamma^*((s^1, w^2)(w^1, s^2)) \Gamma^*((w^1, s^2), u) \Gamma^*((s^1, w^2), v) dw$$

Alors il existe une constante K telle que :

$$\lim_n \operatorname{Sup}_{t \in]]0,1]]} E([\bar{W}_t - \bar{W}_t^n]^2) \leq K \mid h^n \mid$$

Démonstration. — Soit

$$W_t^n = \int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s^n) \bar{\Psi}^n(s, \gamma) ds$$

On peut écrire :

$$W_t^n = W_t^n - W_{i_{k_0}^n}^n + A^n + B^n + C^n + R^n$$

où :

$$A^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} G(\bar{Y}^n_{i_k^n}) \bar{\Delta}^n_k \beta^\gamma$$

$$B^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} G'(\bar{Y}^n_{i_k^n}) \bar{\Delta}^n_k \beta^\gamma \frac{1}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k} (\bar{Y}^n_s - \bar{Y}^n_{i_k^n}) ds$$

$$C^n = \frac{1}{2} \sum_{k \in I^n(k_0)} G''(\bar{Y}^n_{i_k^n}) \bar{\Delta}^n_k \beta^\gamma \frac{1}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k} [\bar{Y}^n_s - \bar{Y}^n_{i_k^n}]^2 ds$$

$$R^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} \bar{\Delta}^n_k \beta^\gamma \frac{1}{\lambda^n_k} \int_{C^n_k} R^n_k(s) ds \quad \text{où} \quad | R^n_k(s) | \le K | \bar{Y}^n_s - \bar{Y}^n_{i_k^n} |^3 .$$

Nous allons d'abord faire la démonstration dans le cas où

$$\gamma(s, u) = \gamma^1(s)\gamma^2(u), \qquad \Gamma(s, u) = \Gamma^1(s)\Gamma^2(u), \gamma^1, \gamma^2, \Gamma^1, \Gamma^2$$

étant des fonctions définies sur $\| 0, 1 \|$, à valeurs réelles et Lipschitziennes.

On a alors :

$$\bar{\Delta}^n_k \beta^\gamma = {}^1\Delta^n_k(\gamma^1)\, {}^2\Delta^n_k(\gamma^2) + {}^1\Delta^n_k(\gamma^2)\, {}^2\Delta^n_k(\gamma^1)$$

où :

$${}^i\Delta^n_k(\gamma^p) = \sum_{j \in I^n_i(k)} \gamma^p(n, j) \Delta^n_j \beta, \qquad p = 1, 2 \,;\; i = 1, 2 \qquad \gamma^p(n, j) = \frac{1}{\lambda^n_j} \int_{C^n_j} \gamma^p(u) du$$

et l'expression analogue pour $\bar{\Delta}^n_k \beta^\Gamma$.

1. *Étude de* A^n

On vérifie en utilisant les propriétés de $\bar{\beta}$ énoncées en 3.1 que :

$$\operatorname*{Sup}_{t \in \|0,1\|} E\left(\left[A^n - \int_{\|0,t\|} G(\bar{Y}_s) d\bar{\beta}^\gamma_s \right]^2 \right) \le K \,|\, h^n \,|$$

2. *Étude de* B^n

Compte tenu du fait que :

$$\bar{Y}^n_s - \bar{Y}^n_{i_k^n} = \int_{C_k(s)} \phi(u) du \frac{\bar{\Delta}^n_k \beta^\Gamma}{\lambda^n_k} + \sum_{j \in I^n_1(k) \cup I^n_2(k)} \int_{C^n_j(s)} \phi(u) du \frac{\bar{\Delta}^n_j \beta^\Gamma}{\lambda^n_j}$$

on écrit $B^n = B^n_1 + B^n_2 + B^n_3$, les termes B^n_2 et B^n_3 étant symétriques.

2.1. On montre que :

$$E\left(\left[B^n_1 - \frac{1}{4} \int_{\|0,t\|} G'(\bar{Y}^n_s) \phi(s) ds \int_{\|0,s\|} \gamma^* . \Gamma^*(s^1, u^2), (u^1, s^2) du \right]^2 \right) \le K \,|\, h^n \,|$$

En effet : B_1^n est la somme de quatre termes du type :

$$B_1^n(p, q) = \sum_{k \in I^n(k_0)} G'(\bar{Y}_{i_k^n}^n)\, {}^1\Delta_k^n(\gamma^{p^1})\, {}^1\Delta_k^n(\Gamma^{q^1})\, {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2})\, {}^2\Delta_k^n(\Gamma^{q^2}) \times \frac{1}{[\lambda_k^n]^2} \int_{C_k^n} ds \int_{C_k^n(s)} \phi(u)du$$

où $p = (p^1, p^2)$, $q = (q^1, q^2)$ p et q appartenant à l'ensemble : $\{(1, 2)(2, 1)\}$.

On utilise alors la propriété suivante :

$$E({}^1\Delta_k^n(\gamma^{p^1})\, {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2})\, {}^1\Delta_k^n(\Gamma^{q^1})\, {}^2\Delta_k^n(\Gamma^{q^2})/(F_{i_k^n})) = \Big(\sum_{j \in I_1^n(k)} \gamma^{p^1}(i_j^n)\, \gamma^{q^1}(i_j^n)\, \lambda_j^n\Big)\Big(\sum_{j \in I_2^n(k)} \gamma^{p^2}(i_j^n)\, \Gamma^{q^2}(i_j^n)\, \lambda_j^n\Big)$$

2.2. On va montrer que $E([B_2^n - D^n]^2) \leq K\,|h^n|$ où

$$\begin{aligned} D^n = {} & \frac{1}{2} \int_{]]0,t]]} G'(\bar{Y}_s^n)\left[\int_{]]0,s]]} \phi(s^1, v^2)\Psi^n(v)\sigma^n(s, v)dv\right]ds \\ & - \frac{1}{4} \int_{]]0,t]]} G''(\bar{Y}_s^n)\left[\int_{]]0,s]]^2} \phi(u^1, s^2)\phi(s^1, v^2)\Psi^n(u)\Psi^n(v)\alpha(s, u, v)dudv\right]ds \\ & - \frac{1}{4} \int_{]]0,t]]} G'(\bar{Y}_s^n)\phi(s)ds \int_{]]0,s]]} \gamma^*.\Gamma^*((s^1, u^2), (u^1, s^2))du \end{aligned}$$

On remarque d'abord que B_2^n est la somme de quatre termes du type :

$$B_2^n(p, q) = \sum_{k \in I^n(k_0)} G'(\bar{Y}_{i_k^n}^n)\, {}^1\Delta_k^n(\gamma^{p^1})\, {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2}) \sum_{j \in I_1^n(k)} \int_{C_k^n} ds \int_{C_j^n(s)} \phi(u)du \times \frac{{}^1\Delta_j^n(\Gamma^{q^1})\, {}^2\Delta_j^n(\Gamma^{q^2})}{\lambda_k^n \lambda_j^n}$$

on vérifie immédiatement que $E([B_2^n(p, q) - b_2^n(p, q)]^2) \leq K\,|h^n|$ où

$$b_2^n(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in I^n(k_0)} G'(\bar{Y}_{i_k^n}^n)\, {}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2}) \sum_{r \in I_1^n(k)} \phi(i_r^n)\Big(\sum_{j \in I_1^n(r)} \gamma^{p^1}.\Gamma^{q^1}(i_j^n)\lambda_j^n\Big)\, {}^2\Delta_r^n(\Gamma^{q^2})$$

Soit alors :

$$\bar{B}^n(p, q) = \int_{]]0,i_{k_0}^n]]} G'(\bar{Y}_s^n)\bar{\theta}^n(s)ds$$

où $\bar{\theta}^n(s) = \bar{\theta}_1^n(s)\,\bar{\theta}_2^n(s)$ avec :

$$\bar{\theta}_1^n(s) = \int_{[0,s^1]} \gamma^{p^2}(v^1, s^2)\Psi^n(v^1, s^2)dv^1$$

$$\bar{\theta}_2^n(s) = \int_{]]0,s]]} \phi(s^1, v^2)\left\{\int_{[0,v^2]} \gamma^{p^1}.\Gamma^{q^1}(s^1, u^2)du^2\,\Gamma^{q^2}(u^1, v^2)\right\}\Psi^n(u^1, v^2)du^1dv^2$$

On peut écrire $\bar{B}^n(p, q) = \sum_{l=1}^{4} \bar{B}_l^n$ où :

$$\bar{B}_1^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} G'(\bar{Y}_{i_k^n})\bar{\theta}^n(i_k^n)\lambda_k^n$$

$$\bar{B}_2^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} G'(\bar{Y}_{i_k^n}) \int_{C_k^n} (\bar{\theta}^n(s) - \bar{\theta}^n(i_k^n))ds$$

$$\bar{B}_3^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} G''(\bar{Y}_{i_k^n}) \int_{C_k^n} (\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n)\bar{\theta}^n(s)ds$$

$$\bar{B}_4^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} \int_{C_k^n} R_k^n(s)\bar{\theta}^n(s)ds$$

On vérifie d'abord que :

$$E\left(\left[b_2^n(p, q) - \frac{1}{2}\bar{B}_1^n\right]^2\right) \leq K \mid h^n \mid$$

On passe alors à l'étude du terme $\bar{B}_2^n$.

Compte tenu des expressions de $\bar{\theta}_1^n(s)$ et $\bar{\theta}_2^n(s)$ pour s éléments de C_k^n et des propriétés d'orthogonalité, on vérifie que :

$$E\left(\left[\bar{B}_2^n - \frac{1}{2}\int_{\|0,t\|} G'(\bar{Y}_s^n)\phi(s)ds \int_{\|0,s\|} \gamma^{p^1}.\Gamma^{q^1}(s^1, u^2)\,\gamma^{p^1}.\Gamma^{q^2}(u^1, s^2)du\right]^2\right) \leq K \mid h^n \mid$$

En tenant compte de l'expression de $(\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n})$ (cf. le paragraphe 2 de la démonstration), on écrit $\bar{B}_3^n$ sous la forme d'une somme de trois termes :

$$\bar{B}_{3,1}^n(p, q, l), \qquad \bar{B}_{3,2}^n(p, q, l), \qquad \bar{B}_{3,3}^n(p, q, l)$$

On a :

$$\bar{B}_{3,1}^n(p, q, l) = \sum_{k \in I^n(k_0)} G''(\bar{Y}_{i_k^n}^n) \int_{C_k^n} \bar{\theta}^n(s)ds \int_{C_k^n(s)} \phi(u)du \frac{1}{\lambda_k^n} {}^1\Delta_k^n(\Gamma^{l^1})\, {}^2\Delta_k^n(\Gamma^{l^2})$$

G'' et ϕ sont bornées

$$E([{}^1\Delta_k^n(\Gamma^{l^1})\, {}^2\Delta_k^n(\Gamma^{l^2})]^{2r}) \leq K[\lambda_k^n]^r$$

et

$$E([\bar{\theta}^n(s)]^{2r}) \leq K \frac{1}{[(h_k^n)^2]^r}$$

on en déduit que :

$$E([\bar{B}_{3,1}^n]^2) \leq K \mid h^n \mid$$

Passons à $\bar{B}^n_{3,2}$ qui s'écrit :

$$\bar{B}^n_{3,2}(p, q, l) = \sum_{k \in I^n(k_0)} G''(\bar{Y}^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} \bar{\theta}^n(s)ds \sum_{j \in I^n_1(k)} \left(\int_{C^n_j(s)} \phi(u)du \times \frac{1}{\lambda^n_j} {}^1\Delta^n_j(\Gamma^{l^1})\, {}^2\Delta^n_j(\Gamma^{l^2}) \right)$$

d'une part :

$$E\left(\left[\sum_{j \in I_1(k)} \int_{C^n_j(s)} \phi(u)du \frac{1}{\lambda^n_j} {}^1\Delta^n_j(\Gamma^{l^1})\, {}^2\Delta^n_j(\Gamma^{l^2}) \right]^{2r} \right) \leq K[(h^n_k)^1]^r$$

D'autre part, on peut écrire $\bar{\theta}^n_2(s)$ sous la forme :

$$\bar{\theta}^n_2(s) = \bar{\theta}^n_{2,1}(s) + \bar{\theta}^n_{2,2}(s)$$

où $\bar{\theta}^n_{2,1}(s)$ est $F(1, (i^n_k)^2)$-mesurable et $E([\bar{\theta}^n_{2,1}(s)]^{2r}) \leq K$ et $\bar{\theta}^n_{2,2}(s)$ est tel que

$$E([\bar{\theta}^n_{2,2}(s)]^{2r}) \leq K[(h^n_k)^2]^r$$

on en déduit que : $E([\bar{B}^n_{3,2}]^2) \leq K \mid h^n \mid$.

Pour $\bar{B}^n_{33}$ qui s'écrit :

$$\bar{B}^n_{3,3}(p, q, l) = \sum_{k \in I^n(k_0)} G''(\bar{Y}^n_{i^n_k}) \int_{C^n_k} \bar{\theta}^n(s)ds \sum_{j \in I^n_2(k)} \left\{ \int_{C^n_j(s)} \phi(u)du \times \frac{1}{\lambda^n_j} {}^1\Delta^n_j(\Gamma^{l^1})\, {}^2\Delta^n_j(\Gamma^{l^2}) \right\}$$

On montre en utilisant les mêmes arguments que précédemment que :

$$E\left(\left[\bar{B}^n_{3,3}(p, q, l) - \frac{1}{2} \int_{||0,t||} G''(\bar{Y}^n_s) \left[\int_{||0,s||} \sigma(u, s^2)\psi^n(u)du \right] \left[\int_{||0,s||} \bar{\sigma}(v, s^1)\Psi^n(v)dv \ ds \right] \right]^2 \right) \leq K \mid h^n \mid$$

où

$$\sigma(u, s^2) = \phi(u^1, s^2)\Gamma^{l^1}(u) \int_{[0,u^1]} \gamma^{p^2} \cdot \Gamma^{l^2}(w^1, s^2)dw^1$$

$$\bar{\sigma}(v, s^1) = \phi(s^1, v^2)\Gamma^{q^2}(v) \int_{[0,v^2]} \gamma^{p^1} \cdot \Gamma^{q^1}(s^1, w^2)dw^2$$

Pour le terme $\bar{B}^n_4$ on vérifie que :

$$E\left(\left[\sum_{k \in I^n(k_0)} \int_{C^n_k} R^n_k(s)\bar{\theta}^n(s)ds \right]^2 \right) \leq K \mid h^n \mid$$

car :

$$| R_k^n(s) | \leq K([\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n]^2)$$

et pour achever l'étude de $B_2^n(p, q)$ on montre que :

$$E\left(\left[\int_{]]0,t]]-]]0,i_k^n]]} G'(\bar{Y}_s^n)\bar{\theta}^n(s)ds\right]^2\right) \leq K | h^n |$$

Ceci résulte des propriétés de $\bar{\theta}^n(s)$ utilisées précédemment. En regroupant les termes on trouve l'expression annoncée.

Le terme B_3^n s'obtient à partir de B_2^n par symétrie, ce qui achève l'étude du terme B^n.

3. — *Étude de* C^n

On va montrer que :

$$E\left(\left[C^n - \frac{1}{4}\int_{]]0,t]]} ds\, G''(\bar{Y}_s^n) \left[\int_{]]0,s]]^2} \phi(u^1, s^2)\phi(s^1, v^2)\Psi^n(u)\Psi^n(v)\alpha(u, s, v)dudv\right]\right]^2\right) \leq K | h^n |$$

$[\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n]^2$ fait apparaître six termes, par suite de la symétrie il suffit d'en étudier quatre ; on montre que le seul terme qui ne tend pas vers zéro est : (cf. 3-4-3)

$$\bar{C}^n = \sum_{k \in I^n(k_0)} G''(\bar{Y}_{i_k^n}^n)\Delta_k^n\beta^\gamma \frac{1}{\lambda_k^n}\int_{C_k^n}\left[\sum_{j \in I_1^n(k)}\int_{C_j^n(s)} \phi(u)du \frac{\bar{\Delta}_j^n\beta^\Gamma}{\lambda_j^n}\right]\left[\sum_{j \in I_2^n(k)}\int_{C_j^n(s)} \phi(u)du \frac{\bar{\Delta}_j^n\beta^\Gamma}{\lambda_j^n}\right]ds$$

Compte tenu de l'expression de γ et Γ, $\bar{C}^n$ est la somme de huit termes du type :

$$\bar{C}^n(p, q, l) = \sum_{k \in I^n(k_0)} G''(\bar{Y}_{i_k^n}^n)\,{}^1\Delta_k^n(\gamma^{p^1})\,{}^2\Delta_k^n(\gamma^{p^2}) \frac{1}{\lambda_k^n}\int_{C_k^n}\left[\sum_{j \in I_1^n(k)}\int_{C_j^n(s)} \phi(u)du\,{}^1\Delta_j^n(\Gamma^{q^1})\,{}^2\Delta_j^n(\Gamma^{q^2})\frac{1}{\lambda_j^n}\right]\left[\sum_{j \in I_2^n(k)}\int_{C_j^n(s)} \phi(u)du\,{}^1\Delta_j^n(\Gamma^{l^1})\,{}^2\Delta_j^n(\Gamma^{l^2})\frac{1}{\lambda_j^n}\right]ds$$

où $p, q, l \in \{ (1, 2), (2, 1) \}$.

En écrivant ${}^i\Delta_k^n(\gamma^{p^i})^i\Delta_j^n(\Gamma\cdot)$ sous la forme :

$$ {}^i\Delta_j^n(\gamma^{p^i})^i\Delta_j^n(\Gamma\cdot) + ({}^i\Delta_k^n(\gamma^{p^i}) - {}^i\Delta_j^n(\gamma^{p^i}))^i\Delta_j^n(\Gamma\cdot) $$

et en utilisant l'orthogonalité et les propriétés de martingale, on montre que : $E([\bar{C}^n(p, q, l) - \bar{C}_1^n(p, q, l)]^2)$ tend vers zéro où

$$ \bar{C}_1^n(p, q, l) = \frac{1}{4} \sum_{k\in I^n(k_0)} G''(\bar{Y}_{i_k^n}^n)\lambda_k^n \Big(\sum_{j\in I_1^n(k)} \phi(i_j^n)^2\Delta_j^n(\Gamma^{q^2}) \sum_{r\in I_1^n(j)} \gamma^{p^1}.\Gamma^{q^1}(i_r^n)(h_r^n)^2 \Big) $$
$$ \times \Big(\sum_{j\in I_2^n(k)} {}^1\Delta_j^n(\Gamma^{l^1})\phi(i_j^n) \sum_{r\in I_2^n(j)} \gamma^{p^2}.\Gamma^{l^2}(i_r^n)(h_r^n)^1 \Big) $$

et donc compte tenu de l'étude de $\bar{B}_{33}^n$ on a :

$$ E\Big(\Big[\bar{C}^n(p, q, l) - \frac{1}{4}\int_{]]0,t]]} G''(\bar{Y}_s^n)ds \int_{]]0,s]]} \sigma(u, s^2)\Psi^n(u)du \int_{]]0,s]]} \bar{\sigma}(s^1, v)\Psi^n(v)dv\Big]^2\Big) \le K\,|\,h^n\,| $$

En regroupant les termes on obtient le résultat annoncé pour C^n.

4. — *Majoration de* R^n

Il suffit pour l'établir de calculer :

$$ \frac{1}{[\lambda_k^n]^2} E([\bar{\Delta}_k^n\beta^\gamma]^2[\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n]^6) $$

Compte tenu de l'expression de $\bar{Y}_s^n - \bar{Y}_{i_k^n}^n$ on montre facilement que ce terme est majoré par $K\,|\,h^n\,|$.

5. — *Majoration de* $W_t^n - W_{i_k^n}^n$

$$ W_t^n - W^n(i_{k_0}^n) = \bar{\Delta}_{k_0}^n\beta^\gamma \frac{1}{\lambda_{k_0}^n} \int_{C_k^n(s)} G(\bar{Y}_s^n)ds + \sum_{j\in I_1^n(k_0)\cup I_2^n(k_0)} \bar{\Delta}_j^n\beta^\gamma \frac{1}{\lambda_j^n} \int_{C_j^n(s)} G(\bar{Y}_s^n)ds $$

Pour le premier terme, G étant bornée, on a :

$$ E\Big(\Big[\bar{\Delta}_{k_0}^n\beta^\gamma \frac{1}{\lambda_{k_0}^n} \int_{C_{k_0}^n(s)} G(\bar{Y}_s^n)ds\Big]^2\Big) \le K\,E([\bar{\Delta}_{k_0}^n\beta^\gamma]^2) \le K\,\lambda_k^n $$

Pour le deuxième terme, il suffit d'écrire :

$$ G(\bar{Y}_s^n) = G(\bar{Y}_{i^n}^n) + [G(\bar{Y}_s^n) - G(\bar{Y}_{i_k^n}^n)] $$

et d'utiliser les propriétés de G et $\bar{\Delta}_k^n\beta^\gamma$ pour obtenir le résultat. On a donc montré que :

$$E\left(\left[\int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s)d\bar{\beta}_s^\gamma - [W_t^n - B^n - C^n - R^n]\right]^2\right) \leq K\,|\,h^n\,|$$

Pour approximer $\int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s)d\bar{\beta}_s^\gamma$ on peut donc prendre $\bar{W}_t^n$

6. — *Extension au cas général*

Supposons que $\gamma(s, u)$ soit de la forme :

$$\gamma(s, u) = \gamma^1(s)\gamma^2(u) + \bar{\gamma}^1(s)\bar{\gamma}^2(u).$$

Les résultats du Théorème restent valables pour γ quand γ^1, γ^2, $\bar{\gamma}^1$ et $\bar{\gamma}^2$ satisfont aux hypothèses, c'est évident tous les termes sont linéaires relativement à γ.

Si on suppose de même que :

$$\Gamma(s, u) = \Gamma^1(s)\Gamma^2(u) + \bar{\Gamma}^1(s)\bar{\Gamma}^2(u)$$

en reprenant la démonstration on vérifie que les résultats sont encore valables.

D'autre part, si Γ et γ sont deux fonctions définies sur $]]0, 1]]^2$, à valeurs réelles, lipschitziennes, on peut trouver une suite $(\Gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de combinaisons linéaires de fonctions qui sont des produits tensoriels, telles que $(\Gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\|\,\Gamma^n - \Gamma\,\|_\infty + \|\,\gamma^n - \gamma\,\|_\infty \leq K\,|\,h^n\,|$$
$$E([\bar{W}_t(\gamma^n, \Gamma^n) - \bar{W}_t^n(\gamma^n, \Gamma^n)]^2) \leq K\,|\,h^n\,|$$

On vérifie alors que :

$$E\left(\left[\int_{]]0,t]]} [G(\bar{Y}_s(\Gamma)) - G(\bar{Y}_s(\Gamma^n)]d\bar{\beta}_s^\gamma\right]^2\right) \leq K\,|\,h^n\,|$$
$$E\left(\left[\int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s(\Gamma^n))d\bar{\beta}_s^{\gamma-\gamma^n}\right]^2\right) \leq K\,|\,h^n\,|$$
$$E([\bar{W}_t^n(\Gamma, \gamma) - \bar{W}_t^n(\Gamma^n, \gamma^n)]^2) \leq K\,|\,h^n\,|$$

ce qui achève la démonstration du Théorème.

3-6 *Remarque.* — S'il est facile d'écrire la limite de $V_t^n = \int_{]]0,t]]} G(Y_s^n)d\beta_s^n$ (corollaire 2-5), il est plus difficile d'écrire celles de $\int_{]]0,t]]} G(Y_s^n)d\bar{\beta}_s^n$ et de

$\int_{]]0,t]]} G(\bar{Y}_s^n) d\bar{\beta}_s^n$ à partir des résultats des Théorèmes 3-4 et 3-5 respectivement, car cela nécessite l'introduction des intégrales mixtes et l'étude de leur approximation ; nous avons voulu rester ici dans le cadre des intégrales stochastiques de premier et second types.

Remarquons également que la méthode utilisée permet d'étudier le cas des intégrales :

$$\int_{]]0,t]]} G(Y_s, \bar{Y}_s, s) d\beta_s \qquad \text{et} \qquad \int_{]]0,t]]} G(Y_s, \bar{Y}_s, s) d\bar{\beta}_s$$

RÉFÉRENCES

[1] M.-F. ALLAIN, *Sur quelques types d'approximations des solutions d'équations différentielles stochastiques*. Thèse de 3e cycle, Rennes, 1974.

[2] E. WONG et M. ZAKAI, On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. *Ann. of Math. Stat.*, n° 36, 1965.

[3] E. WONG et M. ZAKAI, On the relation between ordinary and stochastic differential equations. *Int. Journal of Engineering Sciences*, vol. **3**, 1965.

[4] E. WONG et M. ZAKAI, Riemann Stieltjes approximations of stochastic integrals. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, Band **12**, Heft 2, 1969, p. 87-97.

[5] E. WONG et M. ZAKAI, Martingales and Stochastic Integrals for Processes with a multidimensional Parameter. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, Band **29**, Heft 2, 1974, p. 109-122.

[6] E. WONG et M. ZAKAI, Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane. Memorandum n° ERL-M540. *Electronic research Laboratory*. College of Engineering, University of California, Berkeley.

(Manuscrit reçu le 12 juin 1978)