ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HARALD LUSCHGY

Sur l'existence d'une plus petite sous-tribu exhaustive par paire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, n° 4 (1978), p. 391-398

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_4_391_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 4, 1978, p. 391-398. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur l'existence d'une plus petite sous-tribu exhaustive par paire

par

Harald LUSCHGY

Stiftsherrenstrasse 5,
D-4400 Münster, République Fédérale Allemande

SOMMAIRE. — Dans cette note nous nous occupons de l'existence de plus petites tribus exhaustives par paire pour des expériences statistiques. Nous démontrons que de telles tribus en général n'existent pas. Ce fait réfute des résultats de Le Bihan *et al.* [*3*] et de Littaye-Petit *et al.* [*5*]. En outre, nous proposons une condition suffisante pour l'existence de plus petites tribus exhaustives par paire.

SUMMARY. — In this note we are concerned with the existence of least pairwise sufficient σ-algebras for statistical experiments. We show that such σ-algebras in general do not exist. This fact refutes results of Le Bihan *et al.* [*3*] and of Littaye-Petit *et al.* [*5*]. Furthermore, we propose a sufficient condition for the existence of least pairwise sufficient σ-algebras.

1. PRÉLIMINAIRES

Soit $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ une expérience statistique où $(X, \mathfrak{A})$ est un espace mesurable et $\mathfrak{P}$ une famille de probabilités sur $(X, \mathfrak{A})$. Nous désignerons par $B(X, \mathfrak{A})$ le AM-espace des fonctions $\mathfrak{A}$-mesurables réelles bornées définies

Je remercie M. D. MUSSMANN et Mme C. REUTER pour les discussions que j'ai eues avec eux.

sur X, par ca (X, $\mathfrak{A}$) le AL-espace des mesures (σ-additives) réelles sur (X, $\mathfrak{A}$) (cf. [*1*], III.7 et [*8*]) et par D l'ensemble des sous-familles dominées de $\mathfrak{P}$.

Une sous-tribu de $\mathfrak{A}$ est appelée exhaustive par paire pour $\mathfrak{P}$, si elle est exhaustive pour toute sous-famille à deux éléments de $\mathfrak{P}$. L'exhaustivité par paire est équivalente à l'exhaustivité pour tout $K \in D$ (cf. [*2*]). Si $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ sont des sous-tribus de $\mathfrak{A}$ et K est une sous-famille de $\mathfrak{P}$, nous écrirons $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2$ K-p. s. (K-presque sûrement), si pour tout $B_1 \in \mathfrak{L}_1$ il existe $B_2 \in \mathfrak{L}_2$ tel que $K(B_1 \triangle B_2) = 0$, c'est-à-dire $P(B_1 \triangle B_2) = 0$ pour tout $P \in K$. Dans l'ensemble des sous-tribus de $\mathfrak{A}$ nous pouvons introduire deux relations d'ordre (relation réflexive et transitive) (cf. [*3*]) :

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2(1) & \text{si et seulement si} & \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 & \mathfrak{P}\text{-p. s.,} \\ \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2(2) & \text{si et seulement si} & \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 & \text{K-p. s.} \end{array}$$

pour toute sous-famille K à deux éléments de $\mathfrak{P}$.

Pour que $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2(2)$ soit valable, il faut et il suffit que $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2$ K-p. s. pour tout $K \in D$ ([*3*], Proposition 1). $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2(i)$ signifie que $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2(i)$ et $\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_1(i)$ pour $i = 1, 2$. L'exhaustivité par paire est alors compatible avec ces deux relations d'équivalence. Evidemment, il existe une plus petite sous-tribu exhaustive par paire par rapport à la relation d'ordre (2) s'il existe une telle sous-tribu par rapport à la relation d'ordre (1). La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple suivant. Nous nous intéresserons donc dorénavant qu'à la relation d'ordre (2).

Exemple 1. — Soient X un ensemble non dénombrable, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$ l'ensemble de ses parties et $\mathfrak{P} = \{ \delta_x : x \in X \}$ où δ_x désigne la masse unité au point x. On vérifie immédiatement qu'une tribu $\mathfrak{L}$ est exhaustive par paire pour $\mathfrak{P}$ si et seulement si $\mathfrak{L}$ sépare les points de X, c'est-à-dire pour tout couple x_1, x_2 de points différents il existe un ensemble $B \in \mathfrak{L}$ tel que $\{ x_1, x_2 \} \neq B \cap \{ x_1, x_2 \} \neq \emptyset$. En outre, la relation d'ordre (1) correspond à l'inclusion.

Pour $x \in X$ soit maintenant $\mathfrak{L}_x = \{ B : B \subset X, B \text{ ou } B^c \text{ est une partie dénombrable de } X \setminus \{ x \} \}$. Les tribus $\mathfrak{L}_x$ sont exhaustives par paire pour $\mathfrak{P}$ car elles séparent les points de X. Donc, comme $\bigcap_{x \in X} \mathfrak{L}_x = \{ \emptyset, X \}$, il n'existe pas de plus petite tribu exhaustive par paire par rapport à la relation d'ordre (1). Concernant la relation d'ordre (2) il suffit de remarquer que toutes les tribus exhaustives par paire sont équivalentes par rapport à la relation d'équivalence (2).

2. UN CONTRE-EXEMPLE

Dans [3] Le Bihan, Littaye-Petit et Petit donnent le théorème qu'il existe une plus petite sous-tribu exhaustive par paire par rapport à la relation d'ordre (2) pour toute expérience. La démonstration s'appuie sur la fausse proposition que l'intersection d'une famille filtrante décroissante de sous-tribus exhaustives par paire est exhaustive par paire aussi (cf. [6]). L'exemple suivant montre que l'énoncé du théorème lui-même n'est pas exact.

EXEMPLE 2. — Soient $X = (-1, 0) \cup (0, 1)$, $\mathfrak{A}$ la tribu borélienne sur X et $\mathfrak{P} = \{ (\delta_x + \delta_{-x})/2 \mid \mathfrak{A} : x \in (0, 1) \} \cup \{ P_1, P_2 \}$ où les probabilités P_i sont définies par $P_1(A) = \lambda(A \cap (0, 1))$ et $P_2(A) = \lambda(A \cap (-1, 0))$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$. λ désigne la mesure de Lebesgue. Pour $x \in (0, 1)$ soit

$$\mathfrak{L}_x = \{ B : B \in \mathfrak{A}, \{ x, -x \} \subset B \text{ ou } \{ x, -x \} \subset B^c \}.$$

Vérifions d'abord que $\mathfrak{L}_x$ est exhaustive par paire (même exhaustive). En effet, soit $A \in \mathfrak{A}$ et désignons par l_A la fonction indicatrice de A. Soit f la fonction définie par

$$f(y) = \begin{cases} l_A(y) & \text{si } y \notin \{ x, -x \} \\ (l_A(x) + l_A(-x))/2 & \text{si } y \in \{ x, -x \}. \end{cases}$$

f est ainsi $\mathfrak{L}_x$-mesurable et nous avons bien

$$\int_B f\,dP = \int_B l_A\,dP \qquad \text{pour tout} \quad B \in \mathfrak{L}_x, \quad P \in \mathfrak{P}.$$

Supposons alors que $\mathfrak{A}$ admette une plus petite sous-tribu $\mathfrak{L}^*$ exhaustive par paire par rapport à la relation d'ordre (2). Nous avons donc $\mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{L}_x(2)$ pour tout $x \in (0, 1)$. En particulier nous avons $\mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{L}_x(\delta_x + \delta_{-x})/2 \mid \mathfrak{A}$-p. s. ce qui entraîne que $\mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{L}_x$ et ainsi $\mathfrak{L}^* \subset \bigcap_{x \in (0,1)} \mathfrak{L}_x$. Soit h une fonction $\mathfrak{L}^*$-mesurable telle que $h = E_{P_i}(l_{(0,1)} \mid \mathfrak{L}^*)$ P_i-p. s. pour $i = 1, 2$. Alors h vérifie simultanément $h(x) = h(-x)$ pour tout $x \in (0, 1)$ et

$$\int_B h\,dP_1 = P_1(B) \qquad \text{et} \qquad \int_B h\,dP_2 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad B \in \mathfrak{L}^*,$$

c'est-à-dire $h = 1$ P_1-p. s. et $h = 0$ P_2-p. s. Ceci n'est pas possible à cause de la symétrie de la mesure de Lebesgue. Il n'existe donc pas de plus petite sous-tribu exhaustive par paire pour $\mathfrak{P}$ par rapport à la relation d'ordre (2).

3. UNE CONDITION SUFFISANTE

Comme Le Cam dans [*4*] (cf. aussi [*5*]) nous allons associer à l'expérience $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ deux treillis de Banach $L(\mathfrak{P})$ et $M(\mathfrak{P})$. $L(\mathfrak{P})$ désigne la bande engendrée par $\mathfrak{P}$ dans ca $(X, \mathfrak{A})$ et $M(\mathfrak{P})$ le dual de Banach $L(\mathfrak{P})'$ de $L(\mathfrak{P})$. Alors $L(\mathfrak{P})$ est un AL-espace et $M(\mathfrak{P})$ est un AM-espace avec unité e vérifiant $\langle \mu, e \rangle = \mu(X)$ pour tout $\mu \in L(\mathfrak{P})$ (cf. [*8*], II.5.2 et II.9.1). On sait que

$$L(K) = \{ \mu : \mu \in \mathrm{ca}\,(X, \mathfrak{A}), \mu \ll P_K \}$$

pour tout $K \in D$ où P_K désigne une probabilité équivalente à K. Ainsi nous identifierons $L(K)$ avec $L_1(P_K)$ et $M(K)$ avec $L_\infty(P_K)$ pour tout $K \in D$.

LEMME 1. — $L(\mathfrak{P}) = \bigcup_{K \in D} L(K)$.

Démonstration. — Il est immédiat de vérifier que $\bigcup_{K \in D} L(K)$ est un idéal de ca $(X, \mathfrak{A})$ fermé pour la norme et en vertu de [*8*], II.8.3 $\bigcup_{K \in D} L(K)$ est donc une bande. Il en résulte que $L(\mathfrak{P}) \subset \bigcup_{K \in D} L(K)$. Réciproquement l'inclusion $L(K) \subset L(\mathfrak{P})$ valable pour toute partie K de $\mathfrak{P}$ entraîne que $\bigcup_{K \in D} L(K) \subset L(\mathfrak{P})$.

Soit $i : B(X, \mathfrak{A}) \to M(\mathfrak{P})$ l'application définie par

$$\langle \mu, i(f) \rangle = \int f \, d\mu \qquad \text{pour tout} \quad \mu \in L(\mathfrak{P}).$$

i est linéaire et vérifie $i(l_X) = e$ ainsi que $i(f^+) = i(f)^+$. En effet, pour $f \in B(X, \mathfrak{A})$ et $\mu \in L(\mathfrak{P})_+$ nous avons

$$\begin{aligned}\langle \mu, i(f)^+ \rangle &= \sup \{ \langle \nu, i(f) \rangle : 0 \leqslant \nu \leqslant \mu \} \\ &= \sup \left\{ \int f \, d\nu : 0 \leqslant \nu \leqslant \mu \right\} = \int f^+ d\mu = \langle \mu, i(f^+) \rangle\end{aligned}$$

(cf. [*8*], Corollary 1, p. 72). Pour une sous-tribu $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ nous noterons $r : L(\mathfrak{P}) \to L(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L})$ la restriction à $\mathfrak{L}$ définie par $r(\mu) = \mu \mid \mathfrak{L}$. Il est clair que r est linéaire, positive et continue pour les normes. Encore r est surjective puisque une modification évidente de la démonstration du lemme 1 permet d'établir que

$$L(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}) = \bigcup_{K \in D} L(K \mid \mathfrak{L})$$

et chaque $\nu \in L(K \mid \mathfrak{L})$ pour $K \in D$ admet un prolongement en une mesure $\mu \in L(K)$; il suffit de poser

$$\mu(A) = \int_A d\nu/dP_K \mid \mathfrak{L} dP_K \qquad \text{pour tout} \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Soit $r' : M(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}) \to M(\mathfrak{P})$ la transposée de r et soit $M^{\mathfrak{L}} = r'(M(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}))$. Alors $M^{\mathfrak{L}}$ est un sous-treillis vectoriel de $M(\mathfrak{P})$, contenant e et fermé pour la topologie $\sigma(M(\mathfrak{P}), L(\mathfrak{P}))$ (cf. [*5*], Propositfon II.2.1).

LEMME 2. — Soient $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ des sous-tribus de $\mathfrak{A}$. Pour que $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2(2)$ soit valable, il faut et il suffit que $M^{\mathfrak{L}_1} \subset M^{\mathfrak{L}_2}$.

Démonstration. — Soient $r_i : L(\mathfrak{P}) \to L(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}_i)$ les restrictions à $\mathfrak{L}_i$ pour $i = 1, 2$. Si $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2(2)$, définissons l'application $r_{21} : L(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}_2) \to L(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}_1)$ par $r_{21}(\nu) = r_1(\mu)$ où μ est un élément quelconque de $r_2^{-1}(\{\nu\})$. r_{21} est linéaire, positive, continue pour les normes et nous avons $r_{21} \circ r_2 = r_1$. Soit $r'_{21} : M(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}_1) \to M(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}_2)$ la transposée de r_{21}. Pour $r'_1(\varphi_1) \in M^{\mathfrak{L}_1}$ posons $\varphi_2 = r'_{21}(\varphi_1)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle \mu, r'_2(\varphi_2) \rangle = \langle r_2(\mu), \varphi_2 \rangle = \langle r_{21} \circ r_2(\mu), \varphi_1 \rangle \\ = \langle r_1(\mu), \varphi_1 \rangle = \langle \mu, r'_1(\varphi_1) \rangle\end{aligned}$$

pour tout $\mu \in L(\mathfrak{P})$. Il en résulte $r'_1(\varphi_1) = r'_2(\varphi_2)$ et donc $r'_1(\varphi_1) \in M^{\mathfrak{L}_2}$.

Réciproquement, si $M^{\mathfrak{L}_1} \subset M^{\mathfrak{L}_2}$, pour $B_1 \in \mathfrak{L}_1$ il existe $\varphi_2 \in M(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{L}_2)$ de sorte que $r'_2(\varphi_2) = r'_1 \circ i(l_{B_1})$. Soit $K \in D$ et soit $f_2 \in L_\infty(P_K \mid \mathfrak{L}_2)$ vérifiant $\langle \nu, \varphi_2 \rangle = \int f_2 d\nu$ pour tout $\nu \in L(K \mid \mathfrak{L}_2)$. Puisque

$$\begin{aligned}\int l_{B_1} d\mu = \langle r_1(\mu), i(l_{B_1}) \rangle = \langle \mu, r'_1 \circ i(l_{B_1}) \rangle \\ = \langle \mu, r'_2(\varphi_2) \rangle = \langle r_2(\mu), \varphi_2 \rangle = \int f_2 d\mu\end{aligned}$$

pour tout $\mu \in L(K)$, nous avons $l_{B_1} = f_2$ K-p. s. Si l'ensemble $B_2 \in \mathfrak{L}_2$ est définie par $B_2 = \{ f_2 = 1 \}$, cela entraîne que $K(B_1 \triangle B_2) = 0$. Le lemme est ainsi démontré.

Un sous-treillis vectoriel N de $M(\mathfrak{P})$, contenant e, fermé pour $\sigma(M(\mathfrak{P}), L(\mathfrak{P}))$ est appelé exhaustif s'il existe un projecteur linéaire positif π de $M(\mathfrak{P})$ sur N vérifiant $\langle P, \pi(\varphi) \rangle = \langle P, \varphi \rangle$ pour tout $P \in \mathfrak{P}$, $\varphi \in M(\mathfrak{P})$ (cf. [*4*], Definition 11).

LEMME 3 ([*5*], Proposition II.2.8). — Pour qu'une sous-tribu $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ soit exhaustive par paire pour $\mathfrak{P}$, il faut et il suffit que $M^{\mathfrak{L}}$ soit un sous-treillis exhaustif de $M(\mathfrak{P})$.

La démonstration de ce lemme, donnée dans [*5*] (voir aussi [*4*], Proposition 11), est basée sur un résultat de Kakutani qui permet de munir le AM-espace $M(\mathfrak{P})$ d'une structure d'algèbre. Ce lemme peut aussi se déduire d'une façon plus facile du fait que $M(\mathfrak{P})$ est la limite projective d'espaces $L_\infty(P_K)$, $K \in D$.

Nous arrivons maintenant au théorème suivant.

THÉORÈME. — Supposons que la famille des sous-treillis exhaustifs de $M(\mathfrak{P})$ de la forme $M^{\mathfrak{L}}$ pour une sous-tribu $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ soit cofinale (par rapport à $\supset$) dans la famille de tous les sous-treillis exhaustifs de $M(\mathfrak{P})$. Alors il existe une plus petite sous-tribu exhaustive par paire pour $\mathfrak{P}$ par rapport à la relation d'ordre (2).

Démonstration. — Il est connu qu'il existe un plus petit sous-treillis exhaustif M^* de $M(\mathfrak{P})$ ([*4*], Proposition 10). L'hypothèse et le lemme 3 entraînent qu'il existe une sous-tribu $\mathfrak{L}^*$ exhaustive par paire telle que $M^{\mathfrak{L}^*} = M^*$ et d'après les lemmes 2 et 3 $\mathfrak{L}^*$ est une plus petite sous-tribu exhaustive par paire par rapport à la relation d'ordre (2).

Nous allons démontrer que l'hypothèse du théorème est vérifiée si la famille de probabilités $\mathfrak{P}$ est compacte au sens de Pitcher [*7*]. Une famille $\{ f_P : P \in \mathfrak{P} \}$ de fonctions $\mathfrak{A}$-mesurables vérifiant $0 \leqslant f_P \leqslant 1$ est dite $\mathfrak{P}$-comparable, si pour tout $K \in D$ il existe une fonction f_K $\mathfrak{A}$-mesurable, $0 \leqslant f_K \leqslant 1$ telle que $f_K = f_P$ P-p. s. pour tout $P \in K$. $\mathfrak{P}$ est dite compacte, si pour toute famille $\mathfrak{P}$-comparable $\{ f_P : P \in \mathfrak{P} \}$ il existe une fonction f $\mathfrak{A}$-mesurable, $0 \leqslant f \leqslant 1$ telle que $f = f_P$ P-p. s. pour tout $P \in \mathfrak{P}$.

Nous nous servirons du lemme suivant.

LEMME 4. — Pour que $\mathfrak{P}$ soit compacte, il faut et il suffit que l'application $i : B(X, \mathfrak{A}) \to M(\mathfrak{P})$ soit surjective.

Démonstration. — Supposons que $\mathfrak{P}$ soit compacte et soit $\varphi \in M(\mathfrak{P})$, $\varphi \geqslant 0$ et $\| \varphi \| \leqslant 1$. Remarquons d'abord que pour tout $K \in D$ il existe $f_K \in L_\infty(P_K)$, $0 \leqslant f_K \leqslant 1$ vérifiant $\langle \mu, \varphi \rangle = \int f_K d\mu$ pour tout $\mu \in L(K)$. Puisque $\int f_K d\mu = \int f_P d\mu$ pour tout $\mu \in L(P)$ ($f_P := f_{\{P\}}$, $L(P) := L(\{ P \})$), la famille $\{ f_P : P \in \mathfrak{P} \}$ est $\mathfrak{P}$-comparable. Donc, l'hypothèse entraîne qu'il existe une fonction f $\mathfrak{A}$-mesurable, $0 \leqslant f \leqslant 1$ telle que $f = f_P$ P-p. s. pour tout $P \in \mathfrak{P}$. Cela implique $f = f_K$ K-p. s. pour tout $K \in D$ et par conséquent nous avons $\varphi = i(f)$ en vertu du lemme 1.

Inversement, supposons que i soit surjective. Si $\{ f_P : P \in \mathfrak{P} \}$ est une famille $\mathfrak{P}$-comparable et $\{ f_K : K \in D \}$ est une famille de fonctions $\mathfrak{A}$-mesurables, $0 \leqslant f_K \leqslant 1$ vérifiant $f_K = f_P$ P-p. s. pour tout $P \in K$, nous définissons une application $\varphi : L(\mathfrak{P}) \to R$ par $\langle \mu, \varphi \rangle = \int f_K d\mu$ si $\mu \in L(K)$ (cf. lemme 1). Alors φ est une forme linéaire positive sur $L(\mathfrak{P})$ et donc, $\varphi \in M(\mathfrak{P})$ (cf. [*8*], Corollary 2, p. 85). D'après l'hypothèse il existe $h \in B(X, \mathfrak{A})$ vérifiant $\langle \mu, \varphi \rangle = \int h d\mu$ pour tout $\mu \in L(\mathfrak{P})$. En particulier nous avons $\int f_P d\mu = \int h d\mu$ pour tout $\mu \in L(P)$, $P \in \mathfrak{P}$ et par suite $h = f_P$ P-p. s. pour tout $P \in \mathfrak{P}$. Il reste à poser $f = h \cdot (l_{[0,1]} \circ h)$.

Corollaire. — Si $\mathfrak{P}$ est compacte, alors il existe une plus petite sous-tribu exhaustive par paire pour $\mathfrak{P}$ par rapport à la relation d'ordre (2).

Démonstration. — Montrons que pour tout sous-treillis vectoriel N de $M(\mathfrak{P})$, contenant e, fermé pour $\sigma(M(\mathfrak{P}), L(\mathfrak{P}))$ il existe une sous-tribu $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ telle que $M^{\mathfrak{L}} = N$. En effet, soit N un tel sous-treillis et soit $E = i^{-1}(N)$. Il est clair que E est un sous-treillis vectoriel de $B(X, \mathfrak{A})$, contenant l_X, fermé pour $\sigma(B(X, \mathfrak{A}), L(\mathfrak{P}))$ et donc, grâce au théorème de convergence monotone, E est stable par limites monotones (ponctuelles). Il en résulte que $E = B(X, \mathfrak{L})$ où $\mathfrak{L} = \{ A : A \in \mathfrak{A}, l_A \in E \}$ et par conséquent nous avons $N = i(B(X, \mathfrak{L}))$ en tenant compte du lemme 4. Cela établit que $N = M^{\mathfrak{L}}$ est valable puisque $M^{\mathfrak{L}} = i(B(X, \mathfrak{L}))^-$ où la fermeture est prise pour la topologie $\sigma(M(\mathfrak{P}), L(\mathfrak{P}))$. Pour achever la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème.

D'après le théorème précédent l'expérience considéré dans l'exemple 2 doit admettre un sous-treillis exhaustif N de sorte qu'il n'existe aucune sous-tribu $\mathfrak{L}$ exhaustive par paire vérifiant $M^{\mathfrak{L}} \subset N$. Nous allons construire un tel sous-treillis, qui mérite d'être explicité.

Exemple 3. — Soit $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ définie comme dans l'exemple 2. Posons $\mathfrak{P}_1 = \{ P_1, P_2 \}$ et $\mathfrak{P}_2 = \{ (\delta_x + \delta_{-x})/2 \mid \mathfrak{A} : x \in (0, 1) \}$. Puisque $L(\mathfrak{P}) = L(\mathfrak{P}_1) \oplus L(\mathfrak{P}_2)$ nous avons

$$M(\mathfrak{P}) = L(\mathfrak{P}_1)' \times L(\mathfrak{P}_2)' = L_\infty(P) \times B(X)$$

où $B(X) = B(X, \mathfrak{P}(X))$ et $P = (P_1 + P_2)/2$. Soit maintenant

$$N = L_\infty(P) \times \{ h : h \in B(X), h(x) = h(-x) \text{ pour tout } x \in X \}.$$

Évidemment N est un sous-treillis vectoriel de $M(\mathfrak{P})$, contenant $e = (l_X, l_X)$

et fermé pour $\sigma(M(\mathfrak{P}), L(\mathfrak{P}))$. De plus, nous voyons que N est exhaustif en considérant le projecteur π de $M(\mathfrak{P})$ sur N définie par $\pi(f, h) = (f, h_s)$ où $h_s(x) = (h(x) + h(-x))/2$ pour tout $x \in X$. Vérifions qu'il n'existe aucune sous-tribu $\mathfrak{L}$ exhaustive par paire telle que $M^{\mathfrak{L}} \subset N$. En effet, la sous-tribu $\mathfrak{L}_0$ de $\mathfrak{A}$ engendrée par $i^{-1}(N)$ vérifie $\mathfrak{L}_0 = \{ A : \mathfrak{A}, A = -A \}$. Donc, $\mathfrak{L}_0$ est égale à la tribu $\bigcap_{x \in (0,1)} \mathfrak{L}_x$ d'exemple 2. Ainsi $\mathfrak{L}_0$ n'est pas exhaustive par paire et il suffit de remarquer que chaque sous-tribu $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ telle que $M^{\mathfrak{L}} \subset N$ vérifie nécessairement $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_0$.

Remarque. — L'exemple précédent réfute une assertion de Littaye-Petit, Piednoir et van Cutsem ([5], Proposition II.2.2) d'après tout sous-treillis vectoriel de $M(\mathfrak{P})$, contenant e et fermé pour $\sigma(M(\mathfrak{P}), L(\mathfrak{P}))$ est de la forme $M^{\mathfrak{L}}$ pour une sous-tribu $\mathfrak{L}$. Leur conclusion qu'il existe une plus petite sous-tribu exhaustive par paire par rapport à la relation d'ordre (1) pour toute expérience est déjà démontrée comme faux dans les exemples 1 et 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, t. **1**, New York, Interscience Publishers, 1958.

[2] P. HALMOS et L. J. SAVAGE, Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics. *Ann. Math. Stat.*, t. **20**, 1949, p. 225-241.

[3] M.-F. LE BIHAN, M. LITTAYE-PETIT et J.-L. PETIT, Exhaustivité par paire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **270**, 1970, p. 1753-1756.

[4] L. LE CAM, Sufficiency and approximate sufficiency. *Ann. Math. Stat.*, t. **35**, 1964, p. 1419-1455.

[5] M. LITTAYE-PETIT, J.-L. PIEDNOIR et B. VAN CUTSEM, Exhaustivité. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section B, t. **5**, 1969, p. 289-322.

[6] H. LUSCHGY, Anmerkung zu einem Konvergenzsatz für Martingale mit nach links filtrierender Indexmenge. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **30**, 1974, p. 171-172.

[7] T. S. PITCHER, A more general property than domination for sets of probability measures. *Pacific J. Math.*, t. **15**, 1965, p. 597-611.

[8] H. H. SCHAEFER, *Banach lattices and positive operators*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.

(Manuscrit reçu le 6 février 1978)