ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALBERT TORTRAT

Second complément sur le support des lois indéfiniment divisibles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 3 (1978), p. 349-354

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_3_349_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 3, 1978, p. 349-354. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Second complément sur le support des lois indéfiniment divisibles

par

Albert TORTRAT
Laboratoire de probabilités associé au C. N. R. S., n° 224, Université Pierre-et-Marie Curie

SUMMARY. — The support S_μ of any infinitely divisible law (of Poisson type)

i) is always a semi-group — in the case of R^I (finite dimensional linear space)

ii) in the case of a general linear space, or of an abelian metrisable locally compact group, is invariant by translations of the S_M support of the Lévy-measure M generating μ.

1. INTRODUCTION

Considérons une loi μ du type $e(M)$, dans l'espace vectoriel topologique localement convexe $(X, \mathscr{C})$, de dual Y. S_μ et S_M désignent les supports respectifs de μ et M, et G(M) désigne (notations de [*1*]) le demi-groupe additif *fermé* engendré par S_M.

a) La proposition 4 de [*3*] assure :

$$S_\mu = G(M) \tag{1}$$

(pour le centrage qui donne

$$\hat{\mu}(y) = \int (e^{i(y,x)} - 1)dM),$$

sous les conditions suivantes :

i) les semi-normes P_U définissant la topologie $\mathscr{T}$, localement convexe, vérifient :

$$\int_{pU \leq 1} p_U(x) dM(x) < \infty \tag{2}$$

(on suppose M(X) infini),

ii) μ est faiblement de Radon.

ii) a pour but d'assurer l'existence de M dans X (sur $\mathbb{B}_\sigma$ tribu borélienne pour $\sigma = \sigma(X, Y)$).

b) Limitons nous maintenant au cas où X est espace de Banach. Dans le cas (contraire à *a*)) « avec translations », nous nous sommes attachés dans [*3*] à des conditions permettant de prouver plus : que S_μ égale le support linéaire topologique X_0 commun à μ et M, en général strictement plus grand que G(M).

Si l'on est moins exigeant, il est très simple de prouver que S est invariant par G(M), c'est-à-dire :

$$s \in S_\mu \Rightarrow x + S_M \subset S_\mu, \qquad \text{ou } S_\mu + G(M) \subset S_\mu . \tag{3}$$

Il est clair que (3) vaut aussi dans le cas *a*).

Le même résultat vaut dans un groupe localement compact, abélien et métrisable (cf. le § 4). Auparavant nous prouverons que dans R^I (: X de dimension finie I), S_μ est toujours (à une translation près) un demi-groupe (contenant 0, et bien sûr en général plus grand que G(M)), et préciserons un peu sa nature.

2. CAS DE $X = R^I$

Pour chaque coordonnée $y_i(x) = x^{(i)}$, partageons R en $t \geq 0$ et $t < 0$. R^I est ainsi partagé en 2^I « quadrants » Q_l :

$$R^I = \sum_1^{2^I} Q_l .$$

Il est clair que si la restriction à Q_l de M, soit M_l, définit une loi $\mu_l = e(M_l)$ dont le support est un demi-groupe G_l, alors

$$S_\mu \text{ est la fermeture de } \sum_1^{2^I} G_l \tag{4}$$

(somme vectorielle), est un demi-groupe.

THÉORÈME 1. — Soit M une mesure de Lévy portée par le quadrant Q[1]. Alors, pour un centrage convenable, le support S_μ de la loi $e(\mu)$ est demi-groupe. Plus précisément, $|x|$ étant une norme de R^I,

i) Il existe un sous-espace E de X, de dimension I_0, tel que pour $|x| \leq \eta$, M soit portée par E.

ii) Le support S^η de $e(M^\eta)$, pour M^η restriction de M à $|x| \leq \eta$, est le produit d'un espace $R^{I'} \subset E$ par un quadrant de dimension $I_0 - I'$ contenu dans $E \cap Q$.

iii) S_μ est donc la somme vectorielle de S^η et de $\{ o \cup G(M_\eta) \}$, M_η étant la restriction de M à $|x| > \eta$.

Preuve de i). — Le sous-espace de R^I engendré par le support de M^η, décroît avec η, sa dimension $I(\eta)$ décroît donc vers I_0 lorsque $\eta \downarrow 0$. I_0 est nul si et seulement si S_M ne contient pas 0 (reste à une distance positive de 0, alors M est bornée et $S_\mu = o \cup G(M)$. Sinon nous obtenons le sous-espace E susdit.

Preuve de ii). — Plaçons-nous dans E, et soit $\alpha < \eta$. Le voisinage $|x| \leqslant \alpha$ de 0 contient I_0 points de S_M, soit $P_{\alpha i}$, linéairement indépendants, de normes $> \alpha'(\alpha)$. Le support de $e(M^\eta_{\alpha'})$ ($M^\eta_{\alpha'}$ est la restriction de M^η à $|x| > \alpha'$) contient, dans le quadrant $E \cap Q$, tous les points du « réseau » $\sum_1^{I_0} n_i P_{\alpha i}$ $(n_i \geq 1)$, et aucun point P de $E \cap Q$ n'est à une distance $> I_0\alpha$ d'un point de ce réseau (puisque la *i*-ème coordonnée — suivant les $P_{\alpha i}$ — diffère de moins de $|P_{\alpha i}| \leq \alpha$, d'un $n_i |P_{\alpha i}|$).

Désignons alors par I' l'ensemble des indices des coordonnées y'_i (choisies dans E et fixes) que n'intègre pas M^η (coordonnées qui nécessitent une translation $-c_{\alpha' i}$ pour $e(M^\eta_{\alpha'})$, translation $\downarrow -\infty$ lorsque $\alpha' \downarrow 0$; pour les $I_0 - I'$ coordonnées restantes nous ne feront pas de translation

$$\left(: \hat{\mu}(y'_i) = \int (e^{i(y'_i, x)} - 1) dM \right).$$

Il est clair que lorsque $\alpha' \downarrow 0$, le réseau ci-dessus a pour fermeture le produit des R_i, $i \in I'$, concernées, par celui des R_j^+ (demi-droites du quadrant $Q \cap E$) pour lesquelles $j \in I_0 - I'$.

Remarque 1. — Il n'est nullement nécessaire que M soit infinie pour

(1) La preuve qui suit ne fera pas intervenir le caractère fermé ou ouvert de Q au voisinage de ses divers éléments de frontière.

que S_μ soit un sous-espace de X. Le théorème 5 de [3] en donne un exemple assez général. Pour que $S_\mu = R^I$, il suffit que dans I directions indépendantes S_M contiennent les points $c_n \downarrow kc$ et $c'_n \uparrow -k'c$ ($n = 1, 2 \ldots$, tous $c > 0$, k et k' entiers, variant avec la direction).

3. L'INVARIANCE DE $S\mu$ PAR S_M DANS UN ESPACE VECTORIEL « QUELCONQUE »

Revenons aux conditions de l'introduction : $\mathcal{T}$ est définie par les semi-normes p_U et on suppose que X est « réductible » pour la loi μ donnée sur la tribu cylindrique $\mathcal{C}$:

(5) $$X_0 = \{ x : y(x) = 0, \text{ tout } y\ \mu\text{-p. s. nulle} \},$$

(6) $$\mu^*_{\mathcal{C}} X_0 = 1 .$$

S_μ est alors bien défini, dans X_0 (cf. [3], p. 29) par :

(7) $$S_\mu = \bigcap_U \pi_U^{-1} S(\mu_U),$$

π_U étant la projection *de* X_0 sur l'espace normé séparable X_U quotient de X_0 par $\{ x : p_U(x) = 0 \}$, et S_U le support de la loi μ_U image de μ par π_U.

Nous ne connaissons l'existence de M_U comme mesure (σ-additive) que dans les complétés $\hat{X}_U$. Cela suffit à définir (dans X_0) S_M à partir des traces sur les X_U des supports dans X_U, traces notées $S(M_U)$.

(8) $$S_M = \bigcap_U \pi_U^{-1} S(M_U).$$

THÉORÈME 2. — Pour toute loi $\mu = e(M)$, dans $(X, \mathcal{C})$ réductible pour μ (X de topologie localement convexe), le support S_μ est invariant par toute translation $b \in S_M$, S_M étant défini par (8).

Preuve. — *a*) Plaçons-nous d'abord dans $\hat{X}_U$, dont nous désignons la boule unité par $\hat{U}$, et par M (au lieu de M_U) et $\hat{\mu}_U = e(M)$ les mesures correspondantes. Suivant [3] (proposition 3, p. 33), on a (avec des $a_n = a(\eta_n)$ convenables).

(9) $$S(\hat{\mu}_U) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \{ G(M_{\eta_n}) - a_n \},$$

quelle que <u>soit</u> la suite $\eta_n \downarrow 0$.

Dans (9) lim est entendue au sens topologique (cf. ci-après) et est automatiquement fermée (ce que nous avons utilisé sans le dire dans [3]) : si t est un nombre positif (arbitrairement petit) on a :

$$x \in S(\hat{\mu}_U) \tag{10}$$

équivaut à $t\hat{U} + x$ coupe une infinité de $G(M_{\eta_n}) - a_n$.

Il est clair que si $b \in S(M)$, donc à un $S(M_{\eta_0})$, et si x satisfait à (10), il en est de même de $x + b$, $G(M_\eta)$ étant invariant par les translations de M_{η_0} dès que $\eta \leq \eta_0$.

b) Il en est de même, évidemment, pour les traces sur X_U et $b \in X_U$, c'est-à-dire les $S(M_U)$ de (8), et μ_U. Si donc $b \in (8)$ et $x \in (7)$, chaque $x_U + b_U$ (projection de $x + b$ sur X_U) appartient à $S(\mu_U)$ donc $x + b \in S_\mu$, ce qui prouve le théorème.

4. CAS OÙ X EST UN GROUPE ABÉLIEN MÉTRISABLE LOCALEMENT COMPACT

Tout ce qui concerne ce cas a été magistralement étudié en 1963 (cf. [2]). μ est de Radon, M aussi mais n'est pas unique, sauf si μ se plonge dans un demi-groupe continu (pour la convergence des lois μ^t), auquel cas μ n'admet aucun facteur idempotent, ou, ce qui est équivalent, n'est invariante par aucune translation.

Alors la convergence des $e(M_\eta)_{-a_\eta}$ (lois $e(M_\eta)$ translatées de $-a_\eta$) ne correspond plus (si μ admet le facteur idempotent m_K loi de Haar sur le sous-groupe compact K) à une convergence en probabilité d'une série à termes indépendants $\sum_1^\infty \zeta_i$, utilisée pour la proposition 3 de [3].

Cela n'est pas gênant, car (comme dans [2]), on se ramène à ce cas en se plaçant dans le quotient X/K. On peut aussi éviter ce quotient, en utilisant comme dans [1], le lemme de Yuan et Liang, plus général que la proposition 3 de [3], qui affirme (pour $\overline{\lim}$ *au sens ensembliste*), le $^-$ désignant la fermeture,

$$S_\mu = \cap \left\{ \bigcup_n^\infty S(\mu_{\eta_n}) \right\}^-, \qquad \text{avec } \mu_\eta = e(M_\eta)_{-a_\eta}, \tag{11}$$

si $\mu_n \to \mu$ et μ_η divise μ.

La formulation (11) est *équivalente* à (9), mais les conditions concernant $\mu_\eta \to \mu$ sont moins restrictives.

THÉORÈME 3. — Pour toute loi μ indéfiniment divisible sans composante gaussienne (donc du type $e(\mathrm{M})$), le support S_μ est invariant par toute translation $b \in S_M$, S_M étant le support de la mesure de Lévy M. Ceci a lieu pour toute mesure M représentant μ.

Preuve. — Suivant [*2*], et notant y (au lieu de e^{iy}) les « caractères », éléments du dual de X, on a :

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{Log} \hat{\mu}(y) = \int \{ y(x) - 1 - ig(x, y) \} \, d\mathrm{M}(x).$$

Dans (12) le terme, tronqué à $|x| > \eta$ ($|x|$ = distance de x à 0), $-ig(x, y)d\mathrm{M}$ correspond toujours à la translation $-a_\eta$.

Soit donc $x \in S_\mu$ et $b \in S_M$. Le raisonnement prouvant que $x + b \in S_\mu$ est alors exactement le même qu'au théorème 3.

Remarque 2. — C. Berg, pour le cas de μ plongeable dans le semi-groupe fermé μ^t a émis l'hypothèse que (comme dans R^I, au § 2), S_μ soit toujours (après centrage) un demi-groupe.

Cela est assuré pour un groupe du type $Z^J \times K$ (Z des entiers relatifs, K groupe compact) car on est dans le cas « sans translation », ou pour le type $R^I \times Z^J$ (car M est finie hors de R^I). Le problème reste ouvert, par exemple, dans le cas $R^I \times Z^J \times K$.

Remarque 3. — Dans la remarque finale de [*1*], L. Brockett ne mentionne pas cet aspect (3) de la validité pour un groupe (au lieu d'un espace de Hilbert), seulement celle de (1).

RÉFÉRENCES

[*0*] C. BERG, On the support of the measures in a symmetric convolution semi-group. *Math. Z.*, t. **148**, 1976, p. 141-146.

[*1*] P. L. BROCKETT, Supports of infinitely divisible measures on Hilbert space. *The Annals of Probability*, t. **5**, 1977, p. 1012-1017.

[*2*] PARTHASARATHY, RAO and VARADHAN, Probability distributions on locally compact groups. *Illinois J. Math.*, t. **7**, 1963, p. 337-369.

[*3*] A. TORTRAT, Sur le support des lois indéfiniment divisibles dans les espaces vectoriels localement convexes. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **XXIII**, 1977, p. 27-43 et 293-298.

(Manuscrit reçu le 9 mars 1978)