ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Atomes et lois indéfiniment divisibles dans un espace vectoriel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 3 (1978), p. 343-347

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_3_343_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 3, 1978, p. 343-347. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Atomes et lois indéfiniment divisibles dans un espace vectoriel

par

A. TORTRAT

Laboratoire de Probabilités associé au C. N. R. S.,
n° 224. Université Pierre-et-Marie Curie

SUMMARY. — We specify properties of atoms for convolution, in linear spaces, for application to infinitely divisible laws.

1. ATOMES

Soit X un espace vectoriel en dualité (algébrique) avec Y. Les éléments y de Y définissent dans X la tribu cylindrique $\mathscr{C} = \cup \mathscr{C}_D$, $\mathscr{C}_D$ désignant la tribu engendrée par une partie dénombrable D de Y. $\mathscr{B}_\sigma$ [1] est la tribu borélienne pour la topologie faible $\sigma(X, Y)$.

Définition. — $A \in \mathscr{C}$ est dit un atome, pour la *loi* μ sur $\mathscr{C}$, si $\mu A > 0$ et si toute décomposition $A = A_1 + A_2$ de A est triviale : $\mu A_1 = \mu A$ ou 0. Nous parlerons de même de A atome pour μ et $\mathscr{C}_D$ (si $\mathscr{C}_D \ni A$).

LEMME 1. — A est un atome pour $\mathscr{C}$ et μ, si et seulement si il en est ainsi pour chaque tribu $\mathscr{C}_D$ contenant A.

Alors pour chaque application π de X dans R^∞ (R droite réelle)

$$(1) \qquad x \to \pi x = \prod_1^\infty y_i(x), \qquad \{y_i\} \text{ engendre } \mathscr{C}_D,$$

[1] Notons la remarquable proposition $\mathscr{C} = \mathscr{B}_{\sigma a}$ tribu de Baire pour σ (cf. [*0*], th. 2.3).

l'image πA contient, et lui équivaut pour la loi image $\tilde{\mu}$, un point $\tilde{a}$ tel que $\mu A = \tilde{\mu}\{\tilde{a}\}$. Preuve évidente.

LEMME 2. — Si μ a un prolongement τ-régulier à la tribu borélienne $\mathscr{B}_\sigma$, tout atome A pour μ et $\mathscr{B}_\sigma$ contient (et équivaut à) un « point » A_0 de $\mathscr{B}_\sigma$: $y(A_0) = a_y \in R$, pour tout $y \in Y$ (c'est un point au sens propre si Y sépare les points de X). S'il existe une suite de Y qui engendre $\mathscr{C}$, la conclusion vaut pour toute loi sur $\mathscr{C}$ (car réduite au lemme 1). Même conclusion s'il s'agit d'une tribu borélienne $\mathscr{B}$ plus fine que $\mathscr{B}_\sigma$, pour laquelle $L^0(\mathscr{B}, \mu) = L^0(\mathscr{B}_\sigma, \mu)$ (donc $L^0(\mathscr{C}, \mu)$), par exemple s'il s'agit d'un prolongement unique par τ-régularité dans les conditions de [3] (cf. les lemmes 1 et 3).

Preuve. — L'intersection des $\pi^{-1}(\tilde{a})$ du lemme 1, relatifs à l'atome A′ de $\mathscr{C}$ équivalent à A (qui existe suivant le lemme 1 de [3]), est un fermé faible de $\mathscr{B}_\sigma$, soit A_0 non vide puisque les intersections finies (ou dénombrables) de ces $\pi^{-1}(\tilde{a})$ ont même mesure, égale à μA. Nécessairement, A_0 étant réduit à un « point », est dans A.

LEMME 3. — Soit A un atome de $\mathscr{C}$ pour la loi $\mu\nu$ (convoluée, sur $\mathscr{C}$, de μ et ν). Alors pour chaque $\mathscr{C}_D \ni A$, il existe des points $\tilde{a}$ et $\tilde{b}_i$ (dénombrables) tels que (notations du lemme 1)

$$\mu\nu(A) = \sum_i \tilde{\mu}(\tilde{a} - \tilde{b}_i)\tilde{\nu}\{\tilde{b}_i\}\,; \tag{2}$$

$\tilde{a}$ est dans πA et lui équivaut pour $\tilde{\mu}\tilde{\nu}$, et $\tilde{a} - \tilde{b}_i$ est dans le translaté $\pi A - \tilde{b}_i$ et lui équivaut pour $\tilde{\mu}$.

Preuve. — Elle suit de la formule de Fubini appliquée dans R^∞ au point $\tilde{a}$ du lemme 1.

Remarque. — Les atomes $\tilde{a} - \tilde{b}_i$ pour $\tilde{\mu}$ peuvent se diviser indéfiniment lorsque D augmente : nous n'affirmons pas que $\tilde{\mu}$ *a*, sur $\mathscr{C}$, un atome, translaté de A, il faudrait définir cette translation indépendamment de D. Cette difficulté disparaît dans les conditions du lemme 2, car on peut appliquer la formule de Fubini dans X, au « point » A_0 de ce lemme 2, obtenant (pour μ et ν τ-régulières sur $\mathscr{B}_\sigma$)

$$\mu\nu(A) = \sum_i \mu(A_0 - b_i)\nu(b_i)\,, \qquad b_i \in X\,. \tag{2'}$$

Ainsi on a :

THÉORÈME 1. — Soit données deux lois μ et ν τ-régulières pour une topologie $\mathscr{T}$ plus fine que $\sigma(X, Y)$, ayant (si $\mathscr{T}$ est strictement plus fine) une base de voisinages ouverts de 0 qui $\in \mathscr{B}_\sigma$. Alors si A est un atome pour $\mu\nu$ et $\mathscr{B}$, il existe des translatés de A qui sont des atomes pour μ, et d'autres qui le sont pour ν.

Inversement, si μ et ν ont chacune un atome au moins, $\mu\nu$ en possède aussi.

Si μ et ν sont seulement définies sur la tribu cylindrique $\mathscr{C}$, sans admettre chacune un prolongement par τ-régularité à $\mathscr{B}_\sigma$, on peut seulement affirmer, suivant le lemme 3, que si A est, sur $\mathscr{C}$, un atome pour $\mu\nu$, μ et ν ont des atomes (translatés de A) sur chaque sous-tribu $\mathscr{C}_D \ni A$.

2. SOIT μ UNE LOI SUR $\mathscr{C}$ INDÉFINIMENT DIVISIBLE AU SENS FAIBLE (ET DU TYPE DE POISSON)

Nous supposons seulement que les projections fini-dimensionnelles μ_I (définies par une partie finie I de Y) sont du type $e(\nu_I)$, c'est-à-dire limites de $e(\nu_{I1} + \ldots + \nu_{In})*\delta(a_{In})$ lorsque $n \to \infty$, avec $\nu_{In}(R^I) < \infty$, et

$$e(\nu) = e^{-[\nu]} \sum_0^\infty \frac{\nu^k}{k!},$$

pour $[\nu] = \nu(R^I) < \infty$.

Nous rappelons que c'est seulement dans le cas où μ est faiblement de Radon, par exemple pour les $\tilde{\mu}$ des lemmes 1 et 3 (mais non leurs restrictions à πX) qu'on sait affirmer la définition de ν sur $\mathscr{C}$ (et $\mathscr{B}_\sigma$). Rappelons aussi que les ν_I sont des mesures nulles en 0 (par définition, non bornées en général au voisinage de 0) et que, par conséquent, lorsque I augmente les variations totales $[\nu_I]$ augmentent (la famille des ν_I est cohérente, abstraction faite de l'origine dans chaque R^I).

THÉORÈME 2. — Pour que la loi μ, indéfiniment divisible au sens faible, ait, sur $\mathscr{C}$, un atome A, il est nécessaire que

i) $\inf_{0 \in C \in \mathscr{C}} \mu C = p > 0$,

ii) les ν_I ont des variations totales $[\nu_I]$ finies et de borne supérieure $-\operatorname{Log} p$.

iii) Il suffit qu'on ait $\sup_I \{ [\nu_I] \} = M < \infty$, I décrivant les parties finies de Y.

μ est donc sans atome sur $\mathscr{C}$, si et seulement si ν est infinie en ce sens que $M = \infty$: qu'il existe une $\tilde{\nu}_D$ non bornée.

Preuve. — Le principe en est le même que dans [*1*], pour le théorème de

Hartman et Wintner (: le cas $X = R$), où il a aussi servi à prouver que l'absolue continuité de ν entraîne celle de μ (abstraction faite de l'atome en o si ν est bornée).

Soit $A \in \mathscr{C}_D$ un atome pour μ et considérons l'atome point $\tilde{a}$ pour $\tilde{\mu}$ dans R^∞, du lemme 1. Supposons $\tilde{\nu}$ non bornée et écrivons $\tilde{\nu} = \sum_1^\infty \lambda_n$, avec $\sum_1^N \lambda_n$ restriction de $\tilde{\nu}$ à U_N^c, U_N étant une base $\downarrow \{0\}$ de voisinages de 0. On sait que $\tilde{\mu}$ est convolution dénombrable de $\tilde{\mu}'_n = e(\lambda_n) * \delta(a_n)$, translatés convenables des $e(\lambda_n)$.

Chaque $e(\lambda_n)$ n'a d'atome, hors 0 que des points « positifs » pour une des puissances λ_n^k donc provenant d'atomes b_{ni} de poids p_{ni} de λ_n.

Ou la composante sans atome ν' de $\tilde{\nu}$ est non bornée, alors $\Sigma f'_n = \infty$, si f'_n est la variation totale de la partie sans atomes λ'_n de λ_n, ou $\Sigma f'_n < \infty$, et on a $\sum_{n,i} p_{ni} = \infty$, avec $p_{ni} = \lambda_n(b_{ni})$, les b_{ni} constituant tous les atomes de λ_n.

Dans les deux cas le théorème de Paul Lévy (cf. [*1*], p. 177 et 206) s'applique, R^∞ étant métrisable, pour assurer que l'atome maximum de l'une ou l'autre des convolutions correspondantes est le produit des poids maximums des composantes :

$$e(\lambda'_n), \qquad \text{ou} \qquad e\left(\sum_i p_{ni}\delta(b_{ni})\right).$$

Dans le cas $\Sigma f'_n = \infty$, chaque $e(\lambda'_n)$ ayant le seul atome $e^{-f'_n}$, c'est $e^{-\Sigma f'_n} = 0$. Dans le cas $\sum_{n,i} p_{ni} = \infty$, on peut séparer tous les b_{ni} (dans la convolution); chaque atome maximum a pour poids $e^{-p_{ni}}$ si $p_{ni} \leq 1$, ou un poids $\leq 1/e$ si $p_{ni} > 1$, et le produit est encore nul (ce poids est celui de la loi de Poisson ordinaire de paramètre p_{ni}).

Ainsi $\tilde{\mu}$ ne peut avoir d'atomes que si $\tilde{\nu}$ est bornée. Notant que dans R^∞, de coordonnées $y_i(\cdot)$, on a

$$\{x : x \neq 0\} = \lim \uparrow \{x : \sup_{i \leq I} |y_i(x)| > 0\},$$

il est clair qu'on a ($[\nu]$ désignant la variation totale de ν)

$$[\tilde{\nu}] = \sup_{I \subset D} [\nu_I] < \infty . \tag{3}$$

Mais alors $\tilde{\nu}'$ est bornée aussi pour toute tribu $\mathscr{C}_{D'}$ contenant $\mathscr{C}_D$, car A est atome pour $\mathscr{C}_{D'}$. Cela nécessite *iii*), car sinon on ajouterait à D des I_n à $[\nu_{I_n}] \uparrow \infty$, contredisant « $\tilde{\nu}'$ bornée ».

Puisque, pour chaque D, $\pi^{-1}\{0\}$ a pour μ mesure $e^{-[\tilde{\nu}]}$, il est clair que *i*) vaut e^{-M}, d'où *ii*).

Remarque. — Il est aussi évident que si ν est sans atomes et est bornée (: vérifie *iii*)), μ n'a d'autre atome que 0. Plus précisément, restreinte à $X - 0$, μ est sans atome et est de variation totale $1 - e^{-M}$).

BIBLIOGRAPHIE

[*0*] G. A. EDGAR, Measurability in a Banach Space. *Indiana Univ. Math. J.*, t. **26**, 4, 1977, p. 663-677.

[*1*] HENNEQUIN et TORTRAT, *Théorie des probabilités et quelques applications.* Masson, 1965.

[*2*] HUDSON and MASON, More on equivalence of infinitely divisible distributions. *The Annals of probability*, t. **3**, 3, 1975, p. 563-568.

[*3*] A. TORTRAT, Prolongements τ-réguliers, application aux probabilités gaussiennes. *Symposia mathematica*, t. **XXI**, 1977, p. 117-138.

(Manuscrit reçu le 9 mars 1978)