ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. GARCIA
P. MAILLARD
Y. PELTRAUT

Sur la structure de certaines familles de tribus

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 3 (1978), p. 335-341
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_3_335_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 3, 1978, p. 335-341. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur la structure de certaines familles de tribus

par

M. GARCIA, P. MAILLARD et Y. PELTRAUT
Département de Mathématiques,
Université de Besançon, F 25030 Besançon Cedex

ENGLISH SUMMARY. — Increasing and right-continuous families of σ-algebras $(\mathbf{F}_t, t \in \mathrm{R}_+)$ defined on a complete probability spaces are studied which satisfy the following condition: Every right-continuous and left limited positive martingale $(\mathrm{M}_t, t \in \mathrm{R}_+)$ for the given family $\mathbf{F}$ is such that $\mathrm{M}_t \leq \mathrm{KM}_{t-}$ for a given constant K.

INTRODUCTION

Il est bien connu que, sur l'intervalle [0, 1] muni de la mesure de Lebesgue, la famille des tribus $\mathbf{F}_n$ engendrées par les partitions dyadiques de [0, 1] possède la propriété suivante :

(1) *Pour toute martingale positive* (Z_n) *de la famille* $(\mathbf{F}_n)$, *on a* $\mathrm{Z}_{n+1} \leqq 2\mathrm{Z}_n$, et on a une propriété analogue sur le cube $[0, 1]^d$, 2 étant remplacé par 2^d. Cette propriété joue un grand rôle dans l'application de la théorie des martingales à l'analyse.

On se demande ici quelles sont les familles de tribus $(\mathbf{F}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles [1] sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathbf{F}, \mathrm{P})$, qui satisfont à la propriété analogue à (1), mais en temps continu :

[1] On convient que $\mathbf{F}_{0-} = \mathbf{F}_0$.

(2) *Pour toute martingale positive et càdlàg* (M_t) *de la famille* $(\mathbf{F}_t)$, *on a* $M \leqq KM_-$ (ou encore : $M_t(\omega) \leqq KM_{t-}(\omega)$ hors d'un ensemble évanescent).

La constante K est donnée ici une fois pour toutes, et elle est forcément $\geqq 1$ (prendre $M \equiv 1$). La propriété (2) s'étend immédiatement aux martingales locales positives, par localisation aux temps d'arrêt.

Exemples. — *a*) Si l'on reprend la propriété (1), et que l'on pose $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_n$ pour $n \leqq t < n + 1$, la propriété (2) est satisfaite, avec $K = 2$.

b) La famille de tribus du mouvement brownien satisfait à (2) avec $K = 1$, puisque toutes les martingales sont continues.

Premières propriétés

Nous supposons désormais que la propriété (2) est satisfaite, et nous utilisons les exponentielles de martingales pour établir une propriété, dont on déduira ensuite tout le reste.

LEMME 1. — *Soit* H *une martingale locale. Si l'on a* $\Delta H \geqq -1$ (les sauts de H sont bornés inférieurement par -1) *on a aussi* $\Delta H \leqq K - 1$ (les sauts de H sont bornés supérieurement par $K - 1$).

Démonstration. — On peut supposer que $H_0 = 0$. Considérons alors le processus

$$M_t = \exp\left(H_t - \frac{1}{2}\langle H^c, H^c \rangle_t\right)\prod_{s<t}(1 + \Delta H_s)e^{-\Delta H_s}$$

qui est, d'après un théorème bien connu de C. Doléans [*1*], solution de l'équation différentielle stochastique

$$dM_t = M_{t-}dH_t \qquad \text{avec} \quad M_0 = 1\,.$$

La condition $\Delta H \geqq -1$ entraîne que M est une martingale locale positive. Mais alors la propriété (2) entraîne que $M_t \leqq KM_{t-}$, ou encore $\Delta M_t \leqq (K-1)M_{t-}$. Comme on a d'autre part $\Delta M_t = M_{t-}\Delta H_t$, on en déduit $\Delta H_t \leqq (K - 1)$ — tout cela à des ensembles évanescents près ([2]).

COROLLAIRE. — *Si la propriété* (2) *est satisfaite avec* $K < 2$, *toutes les martingales de la famille* $(\mathbf{F}_t)$ *sont continues* (et l'on peut donc prendre $K = 1$).

Démonstration. — Soit H une martingale locale dont les sauts sont bornés

([2]) Le raisonnement n'est parfaitement rigoureux que si M_{t-} ne s'annule jamais. Il suffit pour lever cette difficulté de raisonner sur $\lambda H (0 < \lambda < 1)$ puis de faire tendre λ vers 1.

inférieurement par $-h$ $(h > 0)$; ils sont alors bornés supérieurement par $h(K - 1)$ d'après le lemme 1. Appliquant ce résultat à $-$ H, on voit qu'ils sont bornés inférieurement par $-h(K-1)^2$ et, en itérant,

$$- h(K - 1)^{n+2} \leqq \Delta H \leqq h(K - 1)^{n+1} \qquad \text{pour tout } n$$

Si $K - 1 < 1$, on a donc $\Delta H = 0$. Ce résultat s'applique en particulier à toute martingale *bornée* H, autrement dit, à toute martingale de la forme $H_t = E[H_\infty \mid \mathbf{F}_t]$, où H_∞ est bornée. L^∞ étant dense dans L^1, l'inégalité de Doob

$$\lambda P \{ \sup_t | X_t | \geqq \lambda \} \leqq E[|X_\infty|], \qquad \text{où} \quad X_t = E[X_\infty \mid \mathbf{F}_t]$$

permet d'étendre ce résultat à toutes les martingales uniformément intégrables, puis, par localisation, aux martingales locales.

Voici une autre conséquence du lemme 1 :

THÉORÈME 1. — *Un espace filtré satisfaisant à* (2) *n'admet pas de temps d'arrêt totalement inaccessible.*

Démonstration. — Soit T un temps totalement inaccessible. Nous allons montrer que $T = +\infty$ p. s. Considérons le processus croissant $A_t = I_{\{t \geq T\}}$, son compensateur prévisible $\tilde{A}_t$, qui est continu, et la martingale

$$H_t = \lambda(A_t - \tilde{A}_t) \qquad (\lambda > 0)$$

Le processus ΔH_t vaut $\lambda I_{\{t = T < \infty\}}$: on a donc $\Delta H \geqq -1$, puis $\Delta H \leqq K - 1$ d'après le lemme 1, et enfin $\lambda \leqq K - 1$ p. s. sur $\{ T < \infty \}$; λ étant arbitraire, on en déduit $P\{ T < \infty \} = 0$.

Nous allons maintenant examiner, toujours sous la propriété (2), les relations entre les tribus $\mathbf{F}_{T-}$ et $\mathbf{F}_T$ associées à un temps d'arrêt.

LEMME 2. — *Soit* Y *une v. a. intégrable,* $\mathbf{F}_T$*-mesurable et telle que* $E[Y \mid \mathbf{F}_{T-}] = 0$. *Alors si l'on a* $Y \geqq -1$, *on a aussi* $Y \leqq K - 1$.

Démonstration. — On vérifie aussitôt que le processus $H_t = YI_{\{t \geq T\}}$ est une martingale uniformément intégrable, nulle pour $t = 0$ (car sur $\{ T = 0 \} \in \mathbf{F}_{T-}$ on a $Y = 0$), nulle sur $[\![0, T[\![$, constante après T. Elle ne saute donc qu'à l'instant T, avec un saut égal à $Y \geqq -1$. On applique alors le lemme 1.

Nous en tirons un autre lemme, très important pour la suite. Il nous faut pour cela quelques notations, que nous empruntons à la topologie. Par abus de langage, nous appelons *ensemble* les classes d'ensembles mesurables modulo les ensembles négligeables. Si A est un ensemble, nous notons

$\bar{A}$ le plus petit ensemble F_{T_-}-mesurable contenant A,

$$\text{i. e. } \bar{A} = \{ P(A \mid F_{T-}) > 0 \}$$

$\mathring{A}$ le plus grand ensemble F_{T_-}-mesurable contenu dans A,

$$\text{i. e. } \mathring{A} = \{ P(A \mid F_{T-}) = 1 \}$$

On peut aussi noter $\mathrm{Fr}\,(A) = \{ 0 < P(A \mid F_{T-}) < 1 \}$. On a $C(\mathring{A}) = \overline{(CA)}$, mais il ne faut pas chercher à pousser plus loin les ressemblances avec la topologie !

LEMME 3. — *Soit* $A \in F_T$; *alors* $P(A \mid F_{T-}) \geqq 1/K$ *sur* $\bar{A}$.

Démonstration. — Posons $B = A^c$; $\mathring{B}$ et $\bar{A}$ forment une partition de Ω en ensembles F_{T_-}-mesurables, et si l'on pose

$$Z = I_{\mathring{B}} + \frac{I_A}{P(A \mid F_{T-})} I_{\bar{A}}$$

on a $E[Z \mid F_{T-}] = 1$. Appliquant le lemme 2 à $Y = Z - 1$ on obtient $Y \leqq K - 1$, ou $Z \leqq K$, ou enfin

$$I_A \leqq KP(A \mid F_{T-}) \qquad \text{p. s.}$$

L'ensemble F_{T_-}-mesurable $\{ P(A \mid F_{T-}) \geqq 1/K \}$ contient A, et donc aussi $\bar{A}$, ce qui est le résultat cherché.

Remarque. — En appliquant le même résultat à A^c, on obtient le résultat plus précis

$$\frac{1}{K} \leqq P(A \mid F_{T-}) \leqq 1 - \frac{1}{K} \qquad \text{sur Fr (A)}.$$

Mais nous n'aurons pas besoin de cela.

Notre but va être maintenant de déduire du lemme 3, le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* T *un temps d'arrêt. Il existe alors une tribu* **U** *sur* Ω, *engendrée par une partition finie* $\{ U_1, U_2, \ldots, U_n \}$ *de* Ω *en* $n \leqq K$ *ensembles* F_T*-mesurables, telle que l'on ait*

(3) $$F_T = F_{T-} \vee \mathbf{U}$$

(4) $$P(U_i \mid F_{T-}) \geqq 1/K \qquad \textit{p. s. sur } U_i \textit{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

Noter que (4) ne fait que répéter le lemme 3. L'ensemble des théorèmes 1 et 2 est équivalent à la propriété (2), et cela vaut même si l'on permet à la partition (U_i) d'être dénombrable. En effet, soit M une martingale positive uniformément intégrable; nous voulons montrer que l'on a en tout temps d'arrêt T partout $> 0 M_T \leqq K M_{T-}$, et il suffit de traiter séparément les cas où T est totalement inaccessible et prévisible. Le premier cas est réglé par le théorème 1. Pour le second, nous écrivons d'après (3)

$$M_T = f_1 I_{U_1} + f_2 I_{U_2} + \dots$$

où $f_1, f_2, \dots$ sont $\mathbf{F}_{T-}$-mesurables positives. Comme T est prévisible, on a

$$M_{T-} = E[M_T \mid \mathbf{F}_{T-}] = f_1 P(U_1 \mid \mathbf{F}_{T-}) + f_2 P(U_2 \mid \mathbf{F}_{T-}) + \dots$$

et pour obtenir la propriété (2), il suffit d'appliquer (4) :

$$M_{T-} \geqq \frac{1}{K}(f_1 I_{U_1} + f_2 I_{U_2} + \dots) \geqq \frac{1}{K} M_T .$$

Utilisation des atomes conditionnels

Nous allégeons désormais nos notations, en écrivant $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_-$ pour $\mathbf{F}_T$, $\mathbf{F}_{T-}$. Nous commençons par rappeler quelques points de la théorie des atomes conditionnels, due à Neveu [2] — dans certains cas, avec des démonstrations sommaires. On rappelle que $\mathbf{F}_-$ contient les ensembles négligeables.

DÉFINITION. — *Un atome conditionnel de* $\mathbf{F}$ *par rapport à* $\mathbf{F}_-$ *(en abrégé,* a. c.*) est un ensemble* F*-mesurable* A *tel que* $P(A) > 0$, *et que les tribus* $\mathbf{F}$ *et* $\mathbf{F}_-$ *aient même trace sur* A.

On dit que $\mathbf{F}$ *est* $\mathbf{F}_-$-atomique *si tout ensemble non négligeable* $B \in \mathbf{F}$ *contient un a. c.*

Faisons une liste des propriétés dont nous nous servirons :

(5) Si A est un a. c., tout $B \subset A$ non négligeable est un a. c.

(6) Soient A et B deux a. c. ; alors $A \cup B$ est un a. c. si et seulement s'il existe $C \in \mathbf{F}_-$ tel que $C \cap (A \cup B) = A$.

(7) La réunion d'une suite croissante (A_n) d'a. c. est un a. c. (en effet, soit $H \in \mathbf{F}$; pour tout n il existe $K_n \in \mathbf{F}_-$ tel que $H \cap A_n = K_n \cap A_n$; si l'on pose $A = \bigcup_n A_n$, $K = \liminf_n K_n$, on a $H \cap A = K \cap A$).

(8) Soit $B \in \mathbf{F}$, et soit A un a. c. tel que $A \subset B$. L'ensemble des a. c. K tels que $A \subset K \subset B$ contient un élément maximal (nous dirons de manière brève qu'un tel élément maximal est un *a. c. maximal dans* B).

(9) Supposons que $\mathbf{F}$ soit $\mathbf{F}_-$-atomique, et soit $B \in \mathbf{F}$. Un a. c. $A \subset B$ est maximal dans B si et seulement si $\bar{A} = \bar{B}$.

Supposons en effet que $\bar{A} \neq \bar{B}$, ce qui revient à dire que $\bar{A}$ ne contient pas B ; alors $B \backslash \bar{A}$ n'est pas négligeable, et contient donc un a. c. A' ; $A \cup A'$ est un a. c. d'après (6), et A n'est donc pas maximal. Inversement, si A n'est pas maximal, il existe un a. c. K tel que $A \subset K \subset B$, $A \neq K$, donc un élément H de $\mathbf{F}_-$ tel que $A = H \cup K$. On a donc $A = \bar{A} \cap K$, et enfin $\bar{A} \neq \bar{B}$.

Enfin, le résultat le plus important sur les atomes conditionnels, le *lemme de Hanen-Neveu*, que nous n'énonçons d'ailleurs pas dans toute sa force :

(10) *Soit un ensemble* $A \in \mathbf{F}$, *et soit* f *une fonction* $\mathbf{F}_-$*-mesurable telle que* $0 \leqq f \leqq P(A \mid \mathbf{F}_-)$. *Si* A *ne contient aucun a. c. il existe* $B \in \mathbf{F}$ *tel que*

$$B \subset A, \qquad f = P(B \mid \mathbf{F}_-) \qquad p.s.$$

Nous revenons aux martingales, et à la situation où $\mathbf{F} = \mathbf{F}_T$, $\mathbf{F}_- = \mathbf{F}_{T-}$:

LEMME 4. — $\mathbf{F}$ *est* $\mathbf{F}_-$*-atomique.*

Démonstration. — Supposons le contraire : il existe alors A non négligeable ne contenant aucun a. c. Soit $f = \frac{1}{2K} I_{\bar{A}}$; d'après le lemme 3 on a $f \leqq P(A \mid \mathbf{F}_-)$, et d'après le lemme de Hanen-Neveu il existe $B \subset A$ tel que $f = P(B \mid \mathbf{F}_{T-})$. Alors d'après le lemme 3 à nouveau on a $f \geqq \frac{1}{K}$ sur l'ensemble non négligeable $\bar{B}$, ce qui est absurde.

LEMME 5. — *Soit* $A \in \mathbf{F}$, *et soient* $B_1, \ldots, B_n$ *des a. c. disjoints, contenus dans* A *et maximaux dans* A. *Alors on a* $n \leqq K$.

Démonstration. — Puisque B_i est maximal dans A pour $i = 1, \ldots, n$, on a $\bar{B}_i = \bar{A}$ (9), et par conséquent d'après le lemme 3 :

$$P(A \mid \mathbf{F}_-) \geqq \sum_i P(B_i \mid \mathbf{F}_-) \geqq \sum_i \frac{1}{K} I_{\bar{B}_i} = \frac{n}{K} I_{\bar{A}}.$$

donc $n/K \leqq 1$.

Démonstration du théorème 2. — Nous construisons par récurrence une suite d'ensembles $A_n (n \geqq 1)$ de la manière suivante :

A_1 est un a. c. maximal dans Ω

A_{n+1} est un a. c. maximal dans $(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c$, si $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) < 1$. Dans le cas contraire, $A_{n+1} = \emptyset$.

Supposons que $A_1 \cup \ldots \cup A_n \neq \Omega$. Pour tout $i = 1, \ldots, n+1$, désignons par B_i un a. c. maximal *dans* Ω et contenant A_i. Nous pouvons écrire

$B_i = A_i \cup C_i$, où C_i est disjoint de A_i — donc de $\bar{A}_i$ puisque B_i est un a. c. Mais on a en vertu de (9)

$$\bar{A}_i = ((A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_{i-1})^c)^- = ((A_1 \cup \ldots A_{i-1})^0)^c$$

Par conséquent, on a $C_i \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1})^0 \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_n)^0$. Désignant par H ce dernier ensemble, nous voyons que les B_i sont disjoints dans H^c. D'autre part, les B_i ne sont pas contenus dans H : en effet, un élément de $\mathbf{F}_-$ qui contient un a. c. maximal est forcément égal à Ω, et $H \neq \Omega$ par hypothèse.

Mais alors les ensembles $B_i \backslash H$ sont non négligeables, et sont des a. c. maximaux disjoints dans $\Omega \backslash H$. D'après le lemme 5, leur nombre $n + 1$ est $\leqq$ K. Autrement dit

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \neq \Omega \Rightarrow n < K$$

et enfin l'on voit que, pour $n \geqq K$, $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$. Les A_i non vides forment donc une partition finie de Ω en au plus K éléments, qui sont des a. c., et le théorème 2 est établi.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] C. Doléans-Dade et P. A. Meyer, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Séminaire N, *Lecture Notes*, n° 124, 1970.

[*2*] A. Hanen et J. Neveu, Atomes conditionnels d'un espace de probabilité. *Acta Math. Hungarica.*

(Manuscrit reçu le 23 février 1978)