ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. HEINICH

Martingales asymptotiques pour l'ordre

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 3 (1978), p. 315-333
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_3_315_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 3, 1978, p. 315-333. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Martingales asymptotiques pour l'ordre

par

H. HEINICH

Laboratoire de Probabilités. Tour 56, Univ. P.-et-M. Curie,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Nous introduisons, pour des mesures à valeurs dans un espace vectoriel complètement réticulé, la notion d'amarts pour l'ordre, ou o-amarts.

Nous obtenons la décomposition de Riesz (3-2). En outre, l'ensemble des o-amarts est réticulé (3-3) et est stable pour la décomposition de Lebesgue (3-6).

Dans une seconde partie, nous définissons la notion d'o-amart pour une suite de v. a. à valeurs dans certains espaces à distance concave : les C-espaces (II-1). Nous donnons un théorème de convergence p. s. (II-3-3). Caractérisant la convergence p. s. d'une suite de v. a. réelles par une propriété d'amart-local, nous établissons quelques propriétés de cette nouvelle classe dans le cas vectoriel (II, 4-2, 4-3, 4-4). En exemple nous envisageons les espaces L^p et l^p $0 \leq p < +\infty$.

ABSTRACT. — We introduce the notion of an order (o)-amart relative to a sequence of measures, taking values in a completely ordered vector lattice. The class of such amarts is a vector lattice (3-3) closed under the Lebesgue decomposition (3-6). Also, we get the Riesz decomposition (3-2).

Then we consider o-amarts relative to a sequence of random variables, taking values in some spaces with a concave metric: the C-spaces (II-1). We give an a. s. convergence theorem (II-3-3).

We introduce the local amarts, improving a known characterization (of Dvoretzky) for a. s. convergence of adapted sequences of real random variables. We establish some properties of this new class for vector valued random variables (II-4-2, 4-3, 4-4). Two exemples are mentioned: L^p and l^p $(0 \leq p < \infty)$.

0. INTRODUCTION

Les amarts réels ont, par leurs remarquables propriétés, considérablement simplifiés l'étude des suites de v. a. r. liées au type martingale. Deux propriétés de base se distinguent : 1) le caractère réticulé ; 2) la décomposition de Riesz.

L'étude du cas vectoriel s'est révélée extrêmement fructueuse, notamment pour la caractérisation de certains espaces de Banach, voir par exemple ([*1*] [*2*] [*3*]). Mais curieusement les propriétés 1) et 2) perdent leurs primautés.

Pour 1) on ne savait pas reconnaître le caractère réticulé d'une classe d'amart dans un espace de Banach réticulé. Quant à la seconde propriété on la reliait à une géométrie très spécifique de l'espace par exemple Radon-Nikodym (bibliographie de [*2*]).

A notre sens la coupure se fait dès le cas réel. Un point de vue met l'accent sur la propriété « espace vectoriel » d'où l'extension naturelle aux Banach. L'autre est de mettre en avant le caractère ordonné de $\mathbb{R}$ et de là, passer aux espaces de Riesz complètement réticulés.

Nous avons opté pour ce second point de vue, en abandonnant aussi l'optique des v. a. pour dégager le rôle des mesures (I). Évidemment certains concepts, comme la convergence p. s., sont repoussés à l'étude de cas particuliers (II).

En outre, une partie est consacrée à la notion d'amart local. Sa motivation se trouve dans une remarque de A. Bellow sur la possibilité de caractériser les suites convergeant p. s. par une propriété d'amart — signalons à ce sujet [*4*].

1. GÉNÉRALITÉS

Dans la suite $\mathbb{E}$ désigne un espace de Riesz complètement réticulé, ou *c-r*, c'est-à-dire tel que « toute partie majorée admet un plus grand élément ».

Nous utiliserons les notations habituelles, voir par exemple [*6*] :

$$x^+ = x \vee 0 ; \quad x^- = (-x) \vee 0 ; \quad |x| = x^+ + x^- ; \quad \mathbb{E}_+ = \{ x/x \geq 0 \} \ldots$$

De plus, nous adopterons la convention suivante, qui simplifie les écritures : nous noterons *o*-P quand la propriété P est vérifiée pour l'ordre.

Bien qu'il n'y a pas de topologie sur $\mathbb{E}$ nous allons parler de *o*-convergence. Pour cela il faut définir, d'abord, quand une suite $\{ e_n \} \subset \mathbb{E}_+$ décroît vers 0 :

$\{ e_n \} \subset \mathbb{E}_+$ décroît vers 0 si $e_{n+1} \leq e_n$ pour tout n et $\bigwedge_n e_n = 0$.

De là une suite $\{ x_n \} \subset \mathbb{E}$ est dite o-convergente vers $x \in \mathbb{E}$, et nous écrirons $x_n \xrightarrow{0} x$, s'il existe une suite $\{ e_p \}$ décroissante vers 0 et une suite d'entiers $\{ \mathrm{N}(p) \} \subset \mathbb{N}$ telles que :

$$| x_n - x | \leq e_p \quad \text{si} \quad n \geq \mathrm{N}(p).$$

Si maintenant une suite $\{ x_n \} \subset \mathbb{E}$ est telle que $\bigvee_n x_n$ existe — resp. $\bigwedge_n x_n$ existe — alors la suite $\left\{ \bigvee_{n \geq k} x_n \right\}_k$ — resp. $\left\{ \bigwedge_{n \geq k} x_n \right\}_k$ — est o-convergente et nous noterons $\overline{\lim}\, x_n$ sa limite — resp. $\underline{\lim}\, x_n$ —.

L'équivalence suivante se montre facilement :

$x_n \xrightarrow{0} x$ *si et seulement si,* $\bigvee_n | x_n |$ *existe et* $\underline{\lim}\, x_n = x = \overline{\lim}\, x_n$.

De même, nous dirons qu'une suite $\{ x_n \} \subset \mathbb{E}$ est de Cauchy pour l'ordre, ou o-Cauchy, s'il existe une suite $\{ e_p \}$ décroissante vers 0 et une suite $\{ \mathrm{N}(p) \} \subset \mathbb{N}$ telles que :

$$| x_n - x_m | \leq e_p \quad \text{si} \quad m, n \geq \mathrm{N}(p)$$

Remarquons la propriété suivante, dont la preuve est laissée au lecteur :

— $\mathbb{E}$ *est o-complet.*

Nous utiliserons encore la notion de convergence uniforme pour l'ordre : une famille $\{ \{ x_n^i \}_n, i \in \mathrm{I} \}$ de suite est dite o-converger uniformément vers $\{ x^i, i \in \mathrm{I} \}$, s'il existe une suite $\{ e_p \}$ décroissante vers 0 et une suite $\{ \mathrm{N}(p) \} \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$| x_n^i - x^i | \leq e_p \quad \text{si} \quad n \geq \mathrm{N}(p) \quad \text{et ce, pour tout} \quad i \in \mathrm{I}.$$

2. MESURES A VALEURS DANS $\mathbb{E}$,

DÉFINITION. — Soit **F** une tribu, une mesure μ à valeurs dans $\mathbb{E}$, positive, nous dirons plus rapidement une $\mathbb{E}_+$-mesure, est une application de **F** dans $\mathbb{E}_+$ telle que :

i) Si A et B $\in$ **F** avec $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$ alors $\mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B})$.

ii) Si $\{A_n\} \subset \mathbf{F}$ avec $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n et $\bigcap_n A_n = \emptyset$ alors $\mu(A_n) \xrightarrow{0} 0$.

Nous avons l'assertion suivante, dont la preuve est aisée :

μ est une $\mathbb{E}_+$-mesure si et seulement si pour toute suite $\{A_n\} \subset \mathbf{F}$ d'éléments disjoints deux à deux on a :

$$\left(\mu \bigcup_n A_n\right) = \textit{limite au sens de l'ordre de } \sum_1^k \mu(A_n) \overset{\text{def.}}{=} \sum_n \mu(A_n).$$

DÉFINITION. — Plus généralement nous dirons que μ est une $\mathbb{E}$-mesure si μ s'écrit comme différence de deux $\mathbb{E}_+$-mesures. Soit μ une $\mathbb{E}$-mesure, $\mu = \mu_1 - \mu_2$ avec μ_i $\mathbb{E}_+$-mesures $i = 1, 2$.

La relation $\mu \leq \mu_1$ permet de définir $\mu^+(A) = \bigvee_{B \in \mathbf{F}} \mu(AB)$ et comme $\mu^+(A) \leq \mu_1(A)$ pour tout $A \in \mathbf{F}$: μ^+ est une $\mathbb{E}_+$-mesure et c'est la plus petite des $\mathbb{E}_+$-mesures majorant μ.

On en déduit facilement la proposition :

2.1. PROPOSITION. — L'ensemble des $\mathbb{E}$-mesures est un espace de Riesz tel que toute partie dénombrable, majorée, admet une borne supérieure : on dit dénombrablement réticulé.

En effet si $\{\mu_n\}$ est une suite croissante de $\mathbb{E}$-mesures ($\mu_n(A)$ croît en n, pour tout $A \in \mathbf{F}$) et s'il existe m $\mathbb{E}_+$-mesure telle que :

$$\mu_n \leq m \qquad \text{pour tout } n\,; \qquad \text{alors} \qquad \mu(A) = \bigvee_n \mu_n(A)$$

est bien définie pour tout A et μ est une $\mathbb{E}$-mesure.

Nous écrirons pour une suite croissante $\{\mu_n\}$ de $\mathbb{E}$-mesures majorée $\mu = \vee\, \mu_n$ et de manière générale $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$...

3. MARTINGALES ASYMPTOTIQUES POUR L'ORDRE

$\{\mathbf{F}_n\}$ étant une suite croissante de tribus sur un espace Ω, nous désignerons par T l'ensemble des temps d'arrêts bornés et par $\mathbf{F} = \bigvee_n \mathbf{F}_n$.

DÉFINITION. — Une suite $\{\mu_n\}$ de $\mathbb{E}$-mesures est dite adaptée à la filtration $\{\mathbf{F}_n\}$ si pour tout n, μ_n est une $\mathbb{E}$-mesure sur $\mathbf{F}_n$.

Remarques. — 1) Il est clair que $\mu_n(A)$ n'a de sens, *a priori*, que pour $A \in \mathbf{F}_n$.

2) Si $\lambda \in T$ on peut définir μ_λ sur la tribu $\mathbf{F}_\lambda$ par

$$\mu_\lambda(\cdot) = \sum_n \mu_n((\cdot) \cap (\lambda = n)) \qquad \text{c'est une } \mathbb{E}\text{-mesure.}$$

La famille $\{ \mu_\lambda \}_{\lambda \in T}$ est alors adaptée à la filtration $\{ \mathbf{F}_\lambda \}_{\lambda \in T}$.

3) Comme T admet un ensemble cofinal dénombrable nous pouvons parler de la convergence pour l'ordre d'une famille $\{ x_\lambda \}_{\lambda \in T} \subset \mathbb{E}$.

Ces préliminaires et l'étude des amarts réels nous amènent aux définitions suivantes qui sont, en quelque sorte, minimales :

DÉFINITIONS. — On dit qu'une suite $\{ \mu_n \}$ de $\mathbb{E}$-mesures, adaptée à la filtration $\{ \mathbf{F}_n \}$ sur un espace Ω est

a) Une presque-martingale asymptotique pour l'ordre, ou *p-o*-amart, s'il existe une suite $\{ e_p \}$ décroissante vers 0 et une suite $\{ N(p) \} \subset \mathbb{N}$ telles que :

$$| \mu_n(A) - \mu_m(A) | \leq e_p \quad \text{si} \quad m \geq n \geq N(p) \quad \text{et ceci pour tout } A \in \mathbf{F}_n .$$

On pourrait dire, de manière plus imagée que

$$| \mu_n(A) - \mu_m(A) \leq e_p \qquad \text{si} \qquad m, n \geq N(p) \qquad \text{pour tout A}$$

tel que cette expression ait un sens.

a') $p - \mathscr{A}^0$ est l'ensemble des *p-o*-amarts $\{ \mu_n \}$ tels que $\bigvee_n (| \mu_n | (\Omega))$ existe — c'est la traduction de la condition L^1 borné du cas réel —.

b) $\{ \mu_n \}$ est une martingale asymptotique pour l'ordre, ou *o*-amart, si la famille $\{ \mu_\lambda(\Omega) \}_{\lambda \in T}$ est *o*-convergente.

b') $\mathscr{A}^0$ est l'ensemble des *o*-amarts $\{ \mu_n \}$ tels que $\bigvee_\lambda (| \mu_\lambda | (\Omega))$ existe.

c) $\{ \mu_n \}$ est un presque potentiel pour l'ordre, ou *p-o*-potentiel, — resp. *o*-potentiel — si $| \mu_n | (\Omega) \to 0$ — resp. $| \mu_\lambda | (\Omega) \xrightarrow{0} 0$ —.

Remarques. — 1) Nous avons l'inclusion $\mathscr{A}^0 \subset p\text{-}\mathscr{A}^0$.

En effet si $\{ \mu_n \} \in \mathscr{A}^0$ il existe $\{ e_p \} \downarrow 0$ et $\{ N(p) \} \subset \mathbb{N}$ telles que $| \mu_\lambda(\Omega) - \mu_\sigma(\Omega) | \leq e_p$ si $\lambda, \sigma \geq N(p)$. Pour $m \geq n \geq N(p)$ posons $\lambda = n |_A + m |_{A^c}$ où $A \in \mathbf{F}_n$.

On obtient, en prenant $\sigma \doteq m$, $|\mu_n(\mathrm{A}) - \mu_m(\mathrm{A})| \leq e_p$. C'est bien la condition *a*).

2) Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et $\{ \rho_n = \mathrm{X}_n \mathrm{P} \}$ alors $\mathrm{X}_n \to 0$ dans $\mathrm{L}^1 \Leftrightarrow \{ \rho_n \}$ est un p-o-potentiel.

Ce qui montre, qu'en général, $\mathscr{A}^0 \subsetneq p\text{-}\mathscr{A}^0$.

DÉFINITIONS. — Une suite $\{ \mu_n \}$ de $\mathbb{E}$-mesures adaptées à la filtration croissante $\{ \mathbf{F}_n \}$ est une martingale — resp. sous- ou sur-martingale —. Si pour n et tout $\mathrm{A} \in \mathbf{F}_n$ on a $\mu_{n+1}(\mathrm{A}) = \mu_n(\mathrm{A})$ — resp. $\geq$ ou $\leq$ —.

Il est alors clair que toute martingale (ou sous-, ou sur-martingale) $\{ \mu_n \}$ telle que $\bigvee_n (|\mu_n|(\Omega))$ existe, est un élément de $\mathscr{A}^0$.

Énonçons la première propriété, dont la preuve est facile :

3.1. PROPOSITION. — Soit $\{ \mu_n \} \in p\text{-}\mathscr{A}^0$ — resp. $\mathscr{A}^0$ — et soit $\mathrm{A} \in \mathbf{F}_k$; alors la suite de $\mathbb{E}$-mesures, définie pour $n \geq k$:

$$\{ \nu_n(\cdot) = \mu_n(\cdot \cap \mathrm{A}) \}_n \in p\text{-}\mathscr{A}^0 \text{ — resp. } \mathscr{A}^0 \text{ — .}$$

Décomposition de Riesz des o-amarts

Soit $\{ \mu_k \} \in p\text{-}\mathscr{A}^0$, pour $\mathrm{A} \in \mathbf{F}_n$ la suite $\{ \mu_k(\mathrm{A}) \}$ est o-convergente (proposition 3.1) désignons par $m_n(\mathrm{A})$ sa limite. *m_n est une $\mathbb{E}$-mesure sur $\mathbf{F}_n$* : m_n est évidemment additive et la définition des p-o-amarts permet d'écrire (pour $\{ e_p \} \downarrow 0$ et $\{ \mathrm{N}(p) \} \subset \mathbb{N}$) :

(1) $|\mu_k(\mathrm{A}) - \mu_l(\mathrm{A})| \leq e_p$ si $k, l \geq \mathrm{N}(p)n$, uniformément en $\mathrm{A} \in \mathbf{F}_n$

d'où en passant à la limite en l :

$$\mu_k(\mathrm{A}) - e_p \leq m_n(\mathrm{A}) \leq \mu_k(\mathrm{A}) + e_p \qquad \text{dès que } k \text{ est suffisamment grand,}$$

et ceci pour tout $\mathrm{A} \in \mathbf{F}_n$: m_n est bien une $\mathbb{E}$-mesure sur $\mathbf{F}_n$. En outre de la relation :

$$m_{n+1}(\mathrm{A}) = \lim_k \mu_k(\mathrm{A}) = m_n(\mathrm{A}) \qquad \text{si} \qquad \mathrm{A} \in \mathbf{F}_n ,$$

il résulte, avec $|m_n|(\Omega) \leq \bigvee_n (|\mu_k|(\Omega))$, que $\{ m_n \}$ est une martingale de $\mathscr{A}^0$.

Posons $\rho_k = \mu_k - m_k$, nous allons établir que $\{ \rho_k \}$ est un p-o-potentiel : La relation (1) permet d'écrire, en faisant tendre l vers l'infini

$$|\rho_k(\mathrm{A}) \leq e_p \qquad \text{si} \qquad k \geq \mathrm{N}(p), \qquad \text{pour tout } \mathrm{A} \in \mathbf{F}_k$$

par conséquent $\rho_k^+(\Omega)$ et $\rho_k^-(\Omega)$ sont aussi $\leq e_p$: c'est bien un p-o-potentiel ($|\mu_k| \xrightarrow{0} 0$).

En remarquant, enfin, que cette technique s'adapte au cas $\{\mu_n\} \in \mathscr{A}^0$, nous pouvons énoncer :

3.2. Théorème. — *Décomposition de Riesz.* — Si $\{\mu_n\} \in p$-$\mathscr{A}^0$ — resp. $\mathscr{A}^0$ — alors μ_n s'écrit de manière unique sous la forme : $\mu_n = m_n + \rho_n$ où

$\{m_n\}$ est une martingale de $\mathscr{A}^0$ et
$\{\rho_n\}$ est un p-o-potentiel — resp. un o-potentiel —.

Preuve. — Il ne reste que l'unicité à établir.

Soit donc $\mu_n = m'_n + \rho'_n$ une autre décomposition de Riesz ; alors $\{|m_n - m'_n|\}$ est une sous-martingale de $\mathscr{A}^0$ qui est aussi un p-o-potentiel $\{|\rho'_n - \rho_n|\}$ donc nécessairement $m_n = m'_n$ et $\rho_n = \rho'_n$.

Réticulation des o-amarts

La seconde propriété fondamentale des amarts réels — qui sont des o-amarts — réside dans le fait qu'ils sont réticulés.

Nous allons prouver ce caractère dans le cadre de notre étude.

Pour cela, il suffit de montrer que si $\{\mu_n\} \in p$-$\mathscr{A}^0$, alors $\{\mu_n^+\} \in p$-$\mathscr{A}^0$ (les démonstrations sont similaires pour $\mathscr{A}^0$). Soit donc $\{\mu_n\} \in p$-$\mathscr{A}^0$; la définition de cette classe montre qu'il existe $\{e_p\} \downarrow 0$ et $\{N(p)\} \subset \mathbb{N}$ avec :

$$\mu_n(A) \leq e_p + \mu_m(A) \qquad \text{si} \qquad m \geq n \geq N(p), \qquad \text{tout } A \in \mathbf{F}_n$$

d'où

$$\mu_n(A) \leq e_p + \underline{\lim}\ \mu_m^+(A)$$

de là on déduit que si $k \geq N(p)$ et $A \in \mathbf{F}_k$:

$$\overline{\lim_n}\ \mu_n^+(A) \leq e_p + \underline{\lim}\ \mu_m^+(A)$$

ce qui s'énonce :

La suite $\{\mu_n^+(A)\}$ est o-convergente uniformément en $A \in \mathbf{F}_k$.

On reconnaît la définition des p-o-amarts et comme

$$\bigvee_n (\mu_n^+(\Omega)) \leq \bigvee_n (|\mu_n|(\Omega))$$

on a bien $\{\mu_n^+\} \in p$-$\mathscr{A}^0$.

3.3. Proposition. — p-$\mathscr{A}^0$ et $\mathscr{A}^0$ sont deux espaces de Riesz.

Remarques. — *i*) Les espaces p-$\mathscr{A}^0$ et $\mathscr{A}^0$ ne sont pas dénombrablement réticulés.

ii) Soient $\{\mu_n\}$ et $\{\nu_n\} \in p$-$\mathscr{A}^0$ tels que

$$\mu_n \leq \nu_n \qquad \text{pour tout } n.$$

En considérant les décompositions de Riesz : $\mu_n = m_n + \rho_n$ et $\nu_n = m'_n + \rho'_n$ on voit que nécessairement $m_n \leq m'_n$ pour tout n. Cette propriété suggère l'étude d'un autre type d'ordre.

DÉFINITION. — Nous dirons qu'un o-amart est fortement positif si les deux termes de sa décomposition de Riesz sont positifs (au sens habituel i. e. $m_n(A) \geq 0$ et $\rho_n(A) \geq 0$).

Par exemple toute sur-martingale positive de $\mathscr{A}^0$ est fortement positive.

3.4. PROPOSITION. — p-$\mathscr{A}^0$ et $\mathscr{A}^0$ sont deux espaces de Riesz dénombrablement réticulé pour l'ordre fort.

Preuve. — Établissons le caractère réticulé de cet ordre.

a) Pour les martingales.

Soit $\{m_n\}$ une martingale de $\mathscr{A}^0$ et soit $\{\lambda_n = m'_n + \rho'_n\}_n \in p$-$\mathscr{A}^0$, fortement positif et majorant au sens fort $\{m_n\}$ i. e. :

$$m_n \leq m'_n \qquad \text{pour tout } n.$$

La sous-martingale positive $\{m_n^+\}$ est le plus petit o-amart positif majorant, pour l'ordre habituel, $\{m_n\}$. Ainsi :

$$m_n \leq m_n^+ \leq m'_n \qquad \text{pour tout } n.$$

En écrivant la décomposition de Riesz de $\{m_n^+\} \in \mathscr{A}^0$: $m_n^+ = m_n^* + \rho_n$ on obtient toujours avec la remarque *ii*) de la partie précédente

$$m_n \leq m_n^* \leq m'_n \qquad \text{pour tout } n.$$

$\{m_n^*\}$ est la plus petite martingale positive majorant la martingale $\{m_n\}$.

Donc $\{m_n^*\}$ = sup au sens fort de $\{m_n\}$ et de $\{o\}$.

b) Pour un p-o-potentiel $\{\rho_n\}$.

Si, de même $\{\lambda_n = m_n + \rho'_n\} \in p$-$\mathscr{A}^0$ est fortement positif et majore fortement $\{\rho_n\}$; nous obtenons : $\rho_n \leq \rho_n^+ \leq \rho'_n$ tout n. Nous pouvons dire que $\{\rho_n^+\}$ est ainsi le plus petit p-o-potentiel positif (ou fortement positif) qui majore fortement $\{\rho_n\}$.

c) Cas général.

Soit $\{\mu_n\} \in p$-$\mathscr{A}^0$, en prenant la décomposition de Riesz de μ_n : $\mu_n = m_n + \rho_n$, il résulte des deux cas précédents que $\{ m_n^* + \rho_n^* \}$ est le plus petit (au sens fort) élément de $p\text{-}\mathscr{A}^0$ majorant fortement $\{ \mu_n \}$ (m_n^* est définie comme en a)).

d) Comme les propriétés filtrantes d'une suite fortement croissante et fortement majorée se prouvent facilement, la démonstration est achevée.

Décomposition de Lebesgue des *o*-amarts

Le cadre classique des amarts réels est celui des variables aléatoires intégrables sur un espace de probabilité. Il est alors intéressant d'étudier la décomposition de Lebesgue d'un *o*-amart (mesure) afin de retrouver les notions habituelles sur les v. a.

— *Décomposition de Lebesgue d'une* $\mathbb{E}_+$*-mesure.*

DÉFINITIONS. — Soit ν une $\mathbb{E}_+$-mesure, $\mathscr{M}_\nu$ sera l'ensemble des $\mathbb{E}_+$-mesures μ telles que $\mu = \bigvee_n (\mu \wedge n\nu)$.

μ sera dite singulière par rapport à ν si pour tout n : $\mu \wedge n\nu = 0$.

Remarque. — L'écriture $\mu = \bigvee_n \mu_n$, pour une suite croissante de $\mathbb{E}$-mesures, est conforme à la partie I-2, car $\mu_n = \mu \wedge n\nu \leq \mu$. En transposant la démonstration de la décomposition de Lebesgue des mesures positives réelles, nous obtenons :

3.5. PROPOSITION. — *Décomposition de Lebesgue.* — Soient ν et μ deux $\mathbb{E}_+$-mesures, μ s'écrit, de manière unique, sous la forme $\mu = \mu^1 + \mu^2$ où $\mu^1 \in \mathscr{M}_\nu$ et $\mu^2 \perp \nu$, μ^2 $\mathbb{E}_+$-mesure.

Remarque. — Comme toute $\mathbb{E}$-mesure μ s'écrit sous la forme $\mu^+ - \mu^-$ nous obtenons la décomposition de Lebesgue d'une $\mathbb{E}$-mesure μ par rapport à une $\mathbb{E}_+$-mesure ν : $\mu = \mu^1 + \mu^2$ où

$$|\mu^1| \in \mathscr{M}_\nu \qquad \text{et} \qquad |\mu^2| \perp \nu .$$

— *Cas des o-amarts.*

3.6. THÉORÈME. — *Décomposition de Lebesgue des o-amarts.* — Soit $\{ \mu_n \} \in p\text{-}\mathscr{A}^0$ — resp. $\mathscr{A}^0$ — et soit ν une $\mathbb{E}_+$-mesure sur $\bigvee_n \mathbf{F}_n$. Pour chaque n, soit $\mu_n = \mu_n^1 + \mu_n^2$ la décomposition de Lebesgue de μ_n par rapport à $\mu|_{\mathbf{F}_n}$. Alors $\{ \mu_n^1 \}$ et $\{ \mu_n^2 \} \in p\text{-}\mathscr{A}^0$ — resp. $\mathscr{A}^0$ —.

Preuve. — Soit $\mu_n = m_n + \rho_n$ la décomposition de Riesz de $\{ \mu_n \} \in p\text{-}\mathscr{A}^0$.

a) Montrons la propriété pour la martingale $\{ m_n \}$.

Écrivons $m_n = m_n^1 + m_n^2$, décomposition de Lebesgue de m_n, par rapport à ν_n (trace de ν sur $\mathbf{F}_n$).

$m_n^1 = \bigvee_k (m_n \wedge k\nu_n)$ et comme $\{ m_n \wedge k\nu_n \}_n$ est une sur-martingale.

On en déduit, pour tout $A \in \mathbf{F}_n$, que $m_n^1(A) \geq m_{n+1}^1(A)$: $\{ m_n^1 \}$ est une sur-martingale.

Enfin l'inégalité : $| m_n^1 |(\Omega) \leq | m_n |(\Omega)$ montre qu'alors $\{ m_n^1 \} \in \mathscr{A}^0$. La propriété est établie pour $\{ m_n \}$.

b) Cas du p-o-potentiel $\{ \rho_n \}$.

Nous pouvons supposer $\rho_n \geq 0$ pour tout n. Écrivons de même sa décomposition de Lebesgue, par rapport à ν_n : $\rho_n = \rho_n^1 + \rho_n^2$. Les inégalités $0 \leq \rho_n^i(\Omega) \leq \rho_n(\Omega)$, $i = 1, 2$ montrent que $\{ \rho_n^1 \}$ et $\{ \rho_n^2 \}$ sont des p-o-potentiels.

c) Cas général $\{ \mu_n = m_n + \rho_n \}$.

Écrivons les décompositions de Lebesgue, par rapport à ν_n :

$$\mu_n = \mu_n^1 + \mu_n^2 ; \qquad m_n = m_n^1 + m_n^2 ; \qquad \rho_n = \rho_n^1 + \rho_n^2$$

L'unicité de cette décomposition implique $\mu_n^i = m_n^i + \rho_n^i$, $i = 1, 2$ donc $\{ \mu_n^1 \}$ et $\{ \mu_n^2 \} \in p\text{-}\mathscr{A}^0$.

La démonstration se déroulerait de manière analogue pour $\mathscr{A}^0$.

II. CAS DES VARIABLES ALÉATOIRES VECTORIELLES

0. Introduction

La décomposition de Lebesgue de la partie I, dans le cas d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ et des o-amarts à valeurs réelles, permet de travailler sur les v. a. X_n, densité de μ_n par rapport à $P_{|\mathbf{F}_n}$.

Réciproquement : une suite $\{ X_n \}$ de v. a. r. est un o-amart si la suite de mesures associées $\{ \mu_n = X_n P \}$ est un o-amart : on retrouve la notion classique d'amarts bornés dans L^1.

Dans le cadre vectoriel il est nécessaire de mettre une topologie sur $\mathbb{E}$ afin de définir la classe des v. a. intégrables, leurs espérances conditionnelles...

Deux alternatives pour choisir un type de topologie, ou plus simplement de métrique, sur $\mathbb{E}$, sont habituelles : soit une structure d'espace normé, soit une métrique concave. Nous opterons pour cette dernière (*).

1. Généralités

Comme référence pour l'intégration des v. a. à valeurs dans certains espaces à distance concave nous citerons [5]. Cet article contient en germes la théorie, mais aussi quelques imperfections. Notamment dans la proposition 8 nous n'avons que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) et la définition de l'o-équi-intégrabilité doit être relative à la formulation (2) (voir ci-dessous).

Nous reprendrons les grandes lignes :

DÉFINITION. — Nous dirons qu'un espace de Riesz $\mathbb{E}$, c-r, métrisable complet est un C-espace si :

i) Sa distance d, est continue pour l'ordre, concave sur $\mathbb{E}_+$ et $d(e)=d(|e|)$.

ii) $\mathbb{E}$ est à tronquature dénombrable :

Il existe une suite $\{ e_n^* \} \subset \mathbb{E}_+$ telle que si

$$e \curlywedge e_n^* = e^+ \wedge e_n^* - (e^- \curlywedge e_n^*)$$

alors $d(e, e \curlywedge e_n^*) \to 0$ pour tout $e \in \mathbb{E}$.

iii) $\mathbb{E}$ vérifie l'hypothèse de « compacité faible » :

« Pour chaque n, il existe un espace de Fréchet G_n, contenant l'intervalle d'ordre $B_n = (-e_n^*, e_n^*)$ et tel que les topologies traces sur B_n de $\mathbb{E}$ et de G_n soient équivalentes et que B_n^+ soit $\sigma(G_n, G_n')$ compact ».

Remarques. — Si $\mathbb{E}$ est séparable métrique complet il possède un point quasi-intérieur e_0 et il suffit de prendre $e_n^* = ne_0$ pour réaliser *ii*).

— L'hypothèse de « compacité faible » est vérifiée par de nombreux espaces notamment les L^p et l^p $(0 \leq p \leq 1)$.

Intégration pour un C-espace.

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, nous désignerons par $\mathscr{E}$ l'ensemble des v. a. étagées (nombre fini de valeurs) à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Pour $\phi \in \mathscr{E}$, $\phi = \Sigma e_n 1_{A_n}$, nous écrirons $E(\phi)$ pour l'espérance de ϕ : $E(\phi) = \Sigma e_n P(A_n)$. On prendra soin de distinguer $E(\cdot)$ et le C-espace $\mathbb{E}$. $N_n(\phi)$ désigne la distance de $E(|\phi| \wedge e_n^*)$ à 0 dans $\mathbb{E}$. Par prolongement on définit pour une v. a. X à valeurs dans $\mathbb{E}$:

$$N_n(X) = d(E(|X| \wedge e_n^*), 0) \qquad \text{et de là :}$$

(*) Le cas Banach est abordé dans « Convergence forte de certains amarts vectoriels : o-amarts et hypomartingales », par B. BRU et H. HEINICH *(à paraître)*.

DÉFINITIONS. — $L(\mathbb{E})$ est la classe, modulo l'égalité p. s., des v. a. X à valeurs dans $\mathbb{E}$, telles qu'il existe $\{\phi_p\} \subset \mathscr{E}$ avec

$$\lim_p (\sup_n N_n(X - \phi_p)) = 0$$

— Si $X \in L(\mathbb{E})$ son espérance est $E(X) = \lim E(X \curlywedge e_n^*)$ et nous poserons

$$N(X) = \lim N_n(X) = d(E(|X|), 0).$$

Les principales propriétés de $L(\mathbb{E})$ avec la distance induite par N peuvent se résumer par la proposition suivante :

1.1. PROPOSITION. — $L(\mathbb{E})$ est un C-espace.

Remarque. — L'inégalité $E(d(|X|, 0)) \leq d(E(|X|), 0) = N(X)$ souligne l' « opposition » avec le cas des espaces de Banach. Avant d'achever cette partie, nous utiliserons la notion suivante :

DÉFINITION. — Une suite $\{X_p\} \subset L(\mathbb{E})$ est dite équi-intégrable pour l'ordre ou *o-e-i*, si $\lim_n (\sup_p N(X_p - X_p \curlywedge e_n^*)) = 0$.

2. $\mathbb{E}$-mesures à densités

Nous n'ajouterons rien aux définitions des $\mathbb{E}$-mesures de la partie I, en prenant pour $\mathbb{E}$ un C-espace.

Notons e_n^*P, la $\mathbb{E}_+$-mesure : $e_n^*P(\cdot) = P(\cdot)e_n^*$.

Nous allons étudier la classe des $\mathbb{E}_+$-mesures admettant une densité par rapport à P.

DÉFINITION. — $\mathscr{M}_p$ est l'ensemble des $\mathbb{E}_+$-mesures μ telles que

$$\mu = \bigvee_n (\mu \wedge e_n^*P)$$

c'est-à-dire $\mu(A) = \lim_n (\mu \wedge e_n^*P)(A)$ —.

L'hypothèse de « compacité faible » ainsi que le théorème de Dunford-Pettis-Phillipps montrent que si μ est une $\mathbb{E}_+$-mesure telle que $0 \leq \mu \leq e_n^*P$ il existe une v. a. X telle que $0 \leq X \leq e_n^*$ et $\mu = XP$

$$\left(\mu(A) = \int_A X dP = E(X|_A) \qquad \text{pour tout } A \in \mathbf{F}\right).$$

En utilisant cette procédure il est facile de voir que si $\mu = XP$ alors

$$\mu \wedge e_n^*P = (X \wedge e_n^*)P.$$

2.1. PROPOSITION. — Une $\mathbb{E}_+$-mesure μ appartient à $\mathcal{M}_p$ si et seulement si il existe $X \in L(\mathbb{E})$ telle que $\mu = XP$.

Preuve. — *a*) Si $\mu = XP$ alors $\mu_n = \mu \wedge e_n^* P = (X \wedge e_n^*)P$. Comme $X \wedge e_n^* \to X$ dans $L(\mathbb{E})$ on a $\mu_n(A) \to \mu(A)$ dans $\mathbb{E}$ donc $\mu \in \mathcal{M}_p$.

b) Si $\mu = \bigvee_n (\mu \wedge e_n^* P)$.

La suite $\{ X_n \}$ des densités de $\mu \wedge e_n^* P$ par rapport à P est p. s. croissante et comme $E(X_n)$ converge en croissant vers $\mu(\Omega)$, la suite $\{ X_n \}$ est de Cauchy dans $L(\mathbb{E})$ $(N(X_n - X_m) = d(\mu_n(\Omega), \mu_m(\Omega)))$. Notons X sa limite.

En remarquant que $\int_A X = \lim \int X_n = \lim_n \mu \wedge e_n^* P(A) = \mu(A)$ nous avons achevé la démonstration.

2.2. PROPOSITION. — Soient m une $\mathbb{E}_+$-mesure et $\{ \mu_n = X_n P \}$ une suite de $\mathbb{E}_+$-mesures telles qu'il existe une suite $\{ e_p \} \downarrow 0$ et une suite $\{ N(p) \} \subset \mathbb{N}$ avec

$$| \mu_n(A) - m(A) | \leq e_p \quad \text{si} \quad n \geq N(p) \qquad \text{pour tout } A \in \mathbf{F}$$

Alors m est à densité.

Preuve. — Montrons que $m \in \mathcal{M}_p$.

L'hypothèse assure que $m(A) \leq \mu_n(A) + e_p$ si $n \geq N(p)$, tout A donc $m(A) - e_k^* P(A) \leq (\mu_n - e_k^* P)^+(\Omega) + e_p$ si $n \geq N(p)$, tout A d'où $(m - e_k^* P)^+(\Omega) \leq e'_p + e_p$ si $k \geq N'(p)$ car $(\mu_n - e_k^* P)^+(\Omega) \overset{k}{\searrow} 0$ par conséquent $m \in \mathcal{M}_p$ et, avec la proposition précédente, m est à densité.

2.3. COROLLAIRE. — Si $\mu = XP$ et $\nu = YP$ sont deux $\mathbb{E}_+$-mesures. Alors $\mu \wedge \nu = (X \wedge Y)P$.

Preuve. — Il suffit de remarquer que $\mathcal{M}_p$ est héréditaire c'est-à-dire : $0 \leq \lambda \leq \mu$ et $\mu \in \mathcal{M}_p \Rightarrow \lambda \in \mathcal{M}_p$. En effet $\mu \in \mathcal{M}_p$ si et seulement si $(\mu - e_k^* P)^+(\Omega) \downarrow 0$ or $(\lambda - e_k^* P)^+ \leq (\mu - e_k^* P)^+$ donc $\lambda \in \mathcal{M}_p$. En écrivant $\mu \wedge \nu = ZP$, il est aisé de montrer que $Z = X \wedge Y$.

3. *o*-amarts à valeurs dans $\mathbb{E}$

Conformément à notre introduction (II-0) nous dirons :

DÉFINITIONS. — Une suite $\{ X_n \} \subset L(\mathbb{E})$ adaptée à une filtration croissante $\{ \mathbf{F}_n \}$ de sous-tribus complètes de $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ est une martingale asymptotique pour l'ordre, ou o-amart, si la suite de mesures signées $\{ \mu_n = X_n P \}$ un o-amart — voir partie I —.

— $\mathscr{A}^0(\mathbb{E})$, ou plus simplement $\mathscr{A}^0$ s'il n'y a pas de confusion possible, est l'ensemble des o-amarts $\{ X_n \}$ tels que $\bigvee_{\lambda \in T} E(|X_\lambda|)$ existe dans $\mathbb{E}$.

Les premières propriétés des o-amarts résultent directement de l'étude précédente.

Si

$$\{ \mu_n = X_n P \} \quad \text{et} \quad \{ \nu_n = Y_n P \}$$

appartiennent à $\mathscr{A}^0$ alors

$$\{ \mu_n \wedge \nu_n = (X_n \wedge Y_n)P \} \in \mathscr{A}^0$$

(partie I et II.2.3) d'où :

3.1. PROPOSITION. — L'ensemble $\mathscr{A}^0(\mathbb{E})$ est réticulé.

Pour établir la décomposition de Riesz d'un o-amart $\{ X_n \} \in \mathscr{A}^0$; considérons la décomposition de Riesz de l'o-amart (mesure) associé $\{ \mu_n = X_n P \} \in \mathscr{A}^0 : \mu_n = m_n + \rho_n$.

Or par définition de la partie m_n — voir I —

$$| m_n(A) - \mu_k(A) | \leq e_p \quad \text{si} \quad k \geq N(p) \vee n, \qquad \text{pour tout } A \in \mathbf{F}_n .$$

Et avec la proposition 2.2, m_n est à densité : $m_n = M_n P$. De plus $\{ m_n \}$ étant une martingale de $\mathscr{A}^0$ il en est de même pour $\{ M_n \}$. Enfin, il est évident que $\rho_n = \mu_n - m_n$ est aussi à densité, d'où :

3.2. PROPOSITION. — *Décomposition de Riesz.* — Tout o-amart $\{ X_n \} \in \mathscr{A}^0$ s'écrit de manière unique sous la forme $\{ X_n = M_n + Z_n \}$ où

$\{ M_n \}$ est une martingale de $\mathscr{A}^0$ et

$\{ Z_n \}$ est un o-potentiel, c'est-à-dire $E(|Z_\lambda|) \xrightarrow{o} 0$, de plus Z_n converge p. s. et dans $L(\mathbb{E})$ vers 0.

Preuve. — Seule la dernière partie reste à établir.

L'inégalité : $E(d(|Z_\lambda|, 0)) \leq d(E(|Z|), 0)$ montre que $d(|Z_\lambda|, 0)$ est un potentiel réel L^1 borné, donc convergeant p. s. On en déduit la propriété suivante, en utilisant le caractère réticulé de $\mathscr{A}^0$:

pour un C-espace on l'équivalence entre

i) *Tout o-amart de $\mathscr{A}^0$ converge p. s.*

ii) *Toute martingale positive converge p. s.*

Par exemple c'est le cas de l'espace l^1 qui est à la fois un C-espace et un Banach possédant la propriété R. N. — voir aussi, à la fin, l^p —.

Convergence des o-amarts :

Pour étudier la convergence des o-amarts de $\mathscr{A}^0$, nous pouvons nous restreindre aux o-amarts positifs.

3.3. THÉORÈME. — *Convergence p. s. des o-amarts.* — Soit $\mathbb{E}$ un C-espace. Pour tout o-amart positif $\{ X_n \} \in \mathscr{A}^0$ il existe $X \in L(\mathbb{E})$ telle que, pour tout k, $X_n \wedge e_k^*$ converge p. s. et dans $L(\mathbb{E})$ vers $X \wedge e_k^*$. Pour que X_n converge p. s. et dans $L(\mathbb{E})$, vers X, il faut et il suffit que la suite $\{ X_n \}$ soit *o-e-i*.

Preuve. — On se ramène, en prenant la décomposition de Riesz au cas où $\{ X_n \}$ est une martingale positive — proposition 3.2 —.

La suite de $\mathbb{E}_+$-mesures $\{ \mu_n \}_n$ de densités $\{ Y_n = X_n \wedge e_k^* \}_n$ est une sur-martingale positive.

Pour tout $A \in \cup \mathbf{F}_n$, $\mu_n(A)$ converge dans $\mathbb{E}$, ce qui avec la relation $0 \leq \mu_n \leq e_k^* P$ montre que $\mu_n(A)$ converge pour tout $A \in \bigvee_n \mathbf{F}_n$.

La limite m est une $\mathbb{E}_+$-mesure à densité (théorème de Dunford-Pettis-Phillipps) :

$$m = YP.$$

De plus, si

$$A \in \mathbf{F}_n \qquad \text{alors} \qquad m(A) \leq \mu_k(A), \qquad k \geq n$$

donc

$$E^n(Y) \leq Y_n \text{ p. s.} \qquad \text{pour tout} \qquad n : \{ Y_n - E^n(Y) \}$$

est une sur-martingale positive, où E^n est l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathbf{F}_n$.

L'inégalité $E(d(Y_\lambda, E^\lambda(Y))) \leq d(E(Y_\lambda - E^\lambda(Y), 0)) = d(\mu_\lambda(\Omega), m(\Omega))$ montre que $\{ d(Y_n, E^n(Y)) \}_n$ est un potentiel L^1 borné donc converge p. s. vers 0.

On établit par ailleurs, de manière standard, que toute martingale du type $\{ E^n(Y) \}$ converge p. s. et dans $L(\mathbb{E})$ vers Y, ce qui nous permet de conclure : Y_n converge p. s. et dans $L(\mathbb{E})$ vers Y.

En remettant les indices k : $X_n \wedge e_k^*$ converge p. s. et dans $L(\mathbb{E})$ vers Y^k.

La suite $\{ Y^k \}$ est p. s. croissante et vérifie $Y^{k+1} \wedge e_k^* = Y^k$. Comme $E(Y^k) \leq \bigvee_n E(X_n \wedge e_k^*) \leq \bigvee_n E(X_n)$, nous en déduisons (même argument que dans la partie *b*) de la démonstration de 2.1) : Y^k converge p. s. et dans $L(\mathbb{E})$ vers une v. a. X, qui vérifie en outre $X \wedge e_k^* = Y_k$ p. s.

Montrons la dernière partie du théorème.

Si la martingale X_n est *o-e-i*, l'inégalité :

$$N(X - X_n) \leq N(X - X \wedge e_k^*) + N(X \wedge e_k^* - X_n \wedge e_k^*) + N(X_n \wedge e_k^* - X_n)$$

montre, avec la partie précédente, que $X_n \to X$ dans $L(\mathbb{E})$ et alors X_n est de la forme $E^n(X)$ pour tout n. La convergence p. s. comme ci-dessus, est alors classique.

La réciproque est évidente en remarquant que la convergence dans $L(\mathbb{E})$ entraîne la propriété *o-e-i*.

Remarque. — On obtient une simplification notable de la démonstration du théorème 5 de [5] et, de plus, son extension.

4. *o*-amarts locaux

Rappelons la motivation de cette partie : caractériser les suites de v. a. convergeant p. s. par une relation du type amart (voir l'introduction 0).

Des propriétés suivantes, pour une suite $\{X_n\}$ de v. a. réelles, adaptées à une filtration croissante $\{\mathbf{F}_n\}$ de sous-tribus complétées d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{F}, P)$:

— si $\bigvee_{\lambda\in T} E(|X_\lambda|) < +\infty$ alors $\bigvee_n |X_n| < +\infty$ p. s. (lemme maximal),

— si $\{X_n\}$ converge p. s. alors $P\left(A_i = \bigvee_n |X_n| \leq i\right)$ tend vers 1,

— si $\vee |X_n| \in L^1$ on a alors l'équivalence entre « X_n converge p. s. » et « $\{X_n\} \in \mathscr{A}^0$ »,

— si $\{X_n\} \in \mathscr{A}^0$ alors X_n converge p. s. (théorème des amarts).

Nous déduisons la proposition :

4.1. Proposition. — Pour une suite de v. a. r. $\{X_n\}$ adaptée telle que $\bigvee_{\lambda\in T} E(|X_\lambda|) < +\infty$ les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\{X_n\}$ converge p. s.

ii) $\{|X_n| \wedge i\} \in \mathscr{A}^0$ pour tout i, [4].

iii) Il existe une suite $\{A_i\} \subset \bigvee_n \mathbf{F}_n$ croissant p. s. vers Ω telle que, pour tout i, $\{X_n E^n(1_{A_i})\}_n \in \mathscr{A}^0$.

iv) Il existe une suite $\{A_i\} \subset \bigvee_n \mathbf{F}_n$ croissant p. s. vers Ω telle que, pour tout i et tout $B \in \bigvee_n \mathbf{F}_n$, $\{X_n E^n(1_{BA_i})\}_n \in \mathscr{A}^0$.

Nous adopterons comme définition d'un amart local une version de *iv*) qui est adaptable aux espaces non nécessairement réticulés :

DÉFINITIONS. — Une suite adaptée $\{ X_n \}$ de v. a. à valeurs dans un C-espace $\mathbb{E}$, est un *o*-amart local s'il existe une suite $\{ \phi_i \}_i$ de v. a. réelles, positives, croissant p. s. vers 1 et telle que, pour toute v. a. r. ϕ avec $0 \leq \phi \leq \phi_i$ pour un certain i, $\{ X_n E^n(\phi) \}_n \in \mathscr{A}^0$.

— Nous désignerons par $\mathscr{A}^0_{\text{loc}}$ l'ensemble des $\{ X_n \}$ *o*-amarts locaux tels que $\bigvee_{\lambda \in T} E(|X_\lambda|)$ existe.

Remarques. — Ces définitions sont adaptables au cas $\mathbb{E}$ Banach, en remplaçant « *o*-amart » par « amart (faible, fort...) ».

— L'inclusion $\mathscr{A}^0(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}^0_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ justifiant en quelque sorte l'expression « amart local », ne paraît pas évidente dans le cas $\mathbb{E}$ Banach, sauf par exemple, si $\mathbb{E}$ est faiblement séquentiellement complet ou, pour un amart $\{ X_n \}$ tel que $\bigvee_n \| X_n \| \in L^1$.

4.2. PROPOSITION. — Soit $\mathbb{E}$ un C-espace alors $\mathscr{A}^0_{\text{loc}}(\mathbb{E})$ est un espace de Riesz.

Preuve. — Soient $\{ X_n, \phi_i \}$ et $\{ Y_n, \psi_i \}$ deux *o*-amarts locaux de $\mathscr{A}^0_{\text{loc}}(\mathbb{E})$ en posant $\{ \theta_i = \phi_i \wedge \psi_i \}$ il est clair que $\{ X_n, \theta_i \}$ et $\{ Y_n, \theta_i \} \in \mathscr{A}^0_{\text{loc}}(\mathbb{E})$ ce qui permet de prouver que $\mathscr{A}^0_{\text{loc}}$ est un espace vectoriel.

Soit maintenant $\{ X_n, \phi_i \} \in \mathscr{A}^0_{\text{loc}}(\mathbb{E})$ pour $0 \leq \phi \leq \phi_i$, $\{ X_n E^n(\phi) \} \in \mathscr{A}^0$.

Comme $\mathscr{A}^0$ est réticulé : $\{ X_n^+ E^n(\phi) \} \in \mathscr{A}^0$ donc, $\{ X_n^+ \} \in \mathscr{A}^0_{\text{loc}}$ et la proposition est démontrée.

4.3. PROPOSITION. — Si $\{ X_n \} \in \mathscr{A}^0_{\text{loc}}(\mathbb{E})$ alors $\{ X_n \wedge e \}_n \in \mathscr{A}^0(\mathbb{E})$ pour tout $e \in \mathbb{E}$.

Preuve. — Comme $\mathscr{A}^0_{\text{loc}}(\mathbb{E})$ est réticulé nous pouvons, pour simplifier, supposer $X_n \geq 0$ pour tout n. Comme $\{ X_n \wedge e \} \in \mathscr{A}^0_{\text{loc}}$ pour $e \in \mathbb{E}_+$ (4.2).

Soit $\{ \phi_i \}$ une suite croissante p. s. vers 1, associée à $\{ X_n \wedge e \}$. Pour $\phi : 0 \leq \phi \leq \phi_i$, l'inégalité :

$$d(E(X_\lambda \wedge e), E((X_\lambda \wedge e)E^\lambda(\phi))) \leq d(e, o) \| 1 - \phi_i \|_{L^1}$$

montre que $\{ X_n \wedge e \}_n \in \mathscr{A}^0$.

Remarque. — Ceci montre, en adaptant la formulation, que *iv*) $\Rightarrow$ *ii*) dans la proposition 4.1.

4.4. PROPOSITION. — Soit $\mathbb{E}$ un C-espace, pour tout o-amart local positif $\{X_n\} \in \mathscr{A}^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{E})$, il existe $X \in L(\mathbb{E})$ telle que, pour tout k, $X_n \wedge e^*_k$ converge p. s. et dans $L(\mathbb{E})$ vers $X \wedge e^*_k$.

De plus, s'il existe une suite $\{\phi_i\}$ associée à $\{X_n\} \in \mathscr{A}^0_{\mathrm{loc}}$ telle que $\{X_n E^n(\phi_i)\}_n$ soit o-e-i, pour tout i, alors X_n converge p. s. vers X.

Preuve. — La première partie se démontre, comme dans le théorème 3.3, en utilisant le fait que $\{X_n \wedge e^*_k\}_n \in \mathscr{A}^0$ — proposition 4.3 —. La seconde partie est aisée car $\{X_n E^n(\phi_i)\}_n \in \mathscr{A}^0$ donc converge p. s. si la suite est o-e-i (théorème 3.3) et ceci, pour tout i, donc X_n converge p. s. vers X.

4.5. PROPOSITION. — Soit $\{X_n\} \in \mathscr{A}^0_{\mathrm{loc}}$, s'il existe une suite $\{e_i\} \subset \mathbb{E}_+$ telle que $P\left(\bigvee_n |X_n| \leq e_i\right) \to 1$, alors X_n converge p. s.

Preuve. — Posons $A_i = \left\{\bigvee_n |X_n| \leq e_i\right\}$, en notant $\{\phi_i\}$ une suite associée à $\{X_n\}$ alors $\{X_n E^n(1_{A_i}\phi_i)\}_n \in \mathscr{A}^0$ et est de plus o-e-i donc converge p. s.; d'où X_n converge p. s.

5. Exemples

— *Cas des espaces* $l^p(\mathbb{N})$.

Nous allons simplement énoncer les propositions, les démonstrations n'offrant guère de difficultés.

DÉFINITION. — Nous désignerons par l^p_1 le sous-ensemble formé par les e, $e \in l^p$, tel qu'il existe $a \in l^p$ avec $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{e^k}{a^k}\right)_k \in l^1$.

5.1. LEMME MAXIMAL. — Soit $\{X_n\}$ une suite adaptée à valeurs l^p telle que $\bigvee_\lambda E(|X_\lambda|) \in l^p_1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in l^p$ tel que

$$P\left(\bigvee_n |X_n| \leq b\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

5.2. PROPOSITION. — Pour une suite $\{X_n\}$ adaptée à valeurs l^p telle que $\bigvee_n E(|X_\lambda|) \in l^p$ on a l'équivalence entre *i*) Pour chaque coordonnée k, $\{X_n^k\}_n$ est un amart réel — resp. amart local réel —.

ii) $\{X_n\} \in \mathscr{A}^0$ — resp. $\mathscr{A}^0_{\text{loc}}$ —.

En particulier $\mathscr{A}^0(l^p) \subsetneq \mathscr{A}^0_{\text{loc}}(l^p)$.

De plus $X_n \xrightarrow{o} X$ p. s. dans l^p si et seulement si $\bigvee_n |X_n| \in l^p$ p. s.

Enfin, pour que tout $X_n \in \mathscr{A}^0_{\text{loc}}(l^p)$ converge p. s. il faut et il suffit que: $p \leq 1$.

— *Cas des espaces* L^p. — Relatif à la mesure λ de Lebesgue sur (0, 1) —.

5.3. Proposition. — Pour que tout *o*-amart de $\mathscr{A}^0(L^p)$ converge p. s. il faut et il suffit que $p = 0$.

Preuve. — $0 < p < +\infty$.

Soit μ la L^1_+-mesure définie par $A \to \mu(A) = 1_A$. On construit alors une martingale $\{X_n\}$ positive (densité de μ par rapport à λ sur des tribus finies) ne convergeant pas p. s. dans L^1.

Alors pour tout $p > 0$, $\{X_n^{1/p}\}_n \in \mathscr{A}^0(L^p)$ et ne converge pas p. s. dans L^p.

Si $p = 0$. Prenons $e_k^* = k$ — fonction constante — il suffit alors de remarquer dans le théorème 3.3 que pour presque tout ω, $X_n(\omega)$ converge en probabilité vers $X(\omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. Bellow, On vector-valued asymptotic-martingales. *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. **73**, n° 6, 1976, p. 1798-1799. ; Several Stability Properties of the class of Asymptotic martingales. *Z. Wahr.*, vol. **37**, 1977, p. 275-290.

[*2*] Y. Benyamini et N. Ghoussoub, Sous-martingales dans un espace réticulé. A paraître *Ann. Inst. Henri Poincaré.*

[*3*] A. Brunel et L. Sucheston, Une caractérisation probabiliste de la séparabilité du dual d'un espace de Banach. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **284**, 13 juin 1977 et bibliographie de cette note.

[*4*] A. Dvoretzky, On stopping time directed convergence. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. **82**, n° 2, 1976, p. 347-349.

[*5*] H. Heinich, Intégration dans certains espaces de Riesz à distance concave. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **X**, n° 2, Sect. **B**, 1974, p. 185-200.

[*6*] A. L. Perressini, *Ordered Topological vector spaces.* Haper et Row, 1967.

(Manuscrit reçu le 23 février 1978)