ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HALIM DOSS
ERIK LENGLART

Sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles stochastiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 2 (1978), p. 189-214
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_2_189_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 2, 1978, p. 189-214. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles stochastiques

par

Halim DOSS

Laboratoire de Probabilités, associé au C. N. R. S. n° 224,
Université Paris VI, Tour 56, 4 Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

et

Erik LENGLART

Laboratoire de Probabilités, Université de Rouen,
Département de Mathématiques, 76130 Mont-Saint-Aignan

ABSTRACT. — We develop some new methods adapted to the study of stochastic differential equations which enable one to simplify the usual proofs of almost sure stability and asymptotic behaviour and to generalize their conclusions.

Although stochastic differential equations are naturally « global » we show that their behaviour can often be studied « trajectory by trajectory ».

Nous avons cherché à exposer ici certaines méthodes adaptées à l'étude des équations différentielles stochastiques. Celles-ci semblent assez nouvelles et permettent souvent de simplifier les raisonnements usuels et de généraliser leurs conclusions.

Bien que les équations différentielles stochastiques soient par nature « globales », nous avons essayé de montrer que leur comportement pouvait s'étudier « trajectoire par trajectoire ».

Le 1er paragraphe généralise un peu les résultats de C. Doleans et

Ph. Protter [2] [17] sur l'existence et l'unicité des solutions. On pourra également consulter Emery [6] pour une autre généralisation.

Le 2ᵉ paragraphe étudie les propriétés les plus générales dans le cas continu.

Le 3ᵉ paragraphe est consacré à une méthode due à H. Doss [4] permettant de résoudre à l'aide d'équations différentielles ordinaires certaines équations différentielles stochastiques.

Le dernier paragraphe montre comment, à partir d'un critère de convergence des martingales locales, on peut étudier le comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle stochastique.

Ce travail a été partiellement exposé aux séminaires de Paris VI, de l'Institut H. Poincaré, et de Strasbourg.

Nous remercions messieurs J. de Sam Lazaro, P. A. Meyer, P. Priouret et M. Yor de l'aide et des conseils qu'ils nous ont apportés dans la préparation de cet article.

§ 1. SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Nous nous plaçons sur un espace $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ satisfaisant aux conditions habituelles.

C. Doleans Dade a démontré récemment le théorème suivant [2] et [3] (voir également Ph. Protter [17]) :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ (¹) une application vérifiant les conditions suivantes, appelées (L) dans la suite

$$L_1 : \forall(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$$

$f(., \omega, x)$ est continue à gauche et possède des limites à droite.

$$L_2 : \forall(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$$

$f(t, ., x)$ *est* $\mathscr{F}_t$*-mesurable.*

$$L_3 : \exists c > 0 \quad \forall(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

on a

$$\| f(t, \omega, x) - f(t, \omega, y) \| \leqslant c \| x - y \|$$

(¹) On désigne ainsi l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit H un processus adapté à trajectoires càdlàg, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et soit Z une semimartingale à valeur dans R^p.

Sous ces conditions il existe un processus X *unique (à l'indistinguabilité près), càdlàg et adapté et vérifiant*

$$X_t = H_t + \int_0^t f(s, X_{s-})dZ_s \qquad (^2)$$

Nous allons montrer que la condition L_3 peut être notablement affaiblie : la constante de Lipschitz peut, sous certaines conditions, dépendre de t et de ω.

Nous étudierons ensuite le cas localement lipschitzien.

DÉFINITION. — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Nous dirons que f vérifie les conditions (L') si f vérifie les conditions L_1 et L_2 de (L) et L'_3 que voici :

L'_3 : il existe une application $c : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que :

1) Pour tout ω, $t \to c(t, \omega)$ est bornée sur tout compact.

2) $\forall (t, \omega) \in R_+ \times \Omega$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$|| f(t, \omega, x) - f(t, \omega, y) || \leqslant c(t, \omega) || x - y ||$$

THÉORÈME 1. — *Soient* $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ *vérifiant les conditions* (L'), H *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *càdlàg et adapté,* Z *une semimartingale à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$.

Il existe un processus X *unique (à l'indistinguabilité près), càdlàg adapté et vérifiant :*

$$X_t = H_t + \int_0^t f(s, X_{s-})dZ_s$$

Démonstration. — Pour tout (t, ω) posons :

$$K(t, \omega) = \sup \left\{ \frac{1}{||x-y||} || f(t, \omega, x) - f(t, \omega, y) ||, \quad x, y \in Q^n, \ x \neq y \right\}$$

Ce processus étant l'enveloppe supérieure d'une famille dénombrable de processus prévisibles est prévisible. $K(t, \omega)$ est une constante de lipschitz de $f(t, \omega, .)$. On a $K \leqslant c$ et donc K est un processus à trajectoires bornées sur tout compact.

Les applications $t \to f(t, \omega, x)$ étant continues à gauche, pour tout a,

---

(2) On note ainsi, ici et dans toute la suite la fonction

$$(s, \omega) \mapsto f(s, \omega, X_{s-}(\omega))$$

tout ω $\{ t, K(t, \omega) \leqslant a \}$ est un fermé gauche, autrement dit si t_n croît vers t et $K(t_n, \omega) \leqslant a$, alors $K(t, \omega) \leqslant a$.

Pour tout n, soit $T_n = \inf \{ t, K_t > n \}$.

T_n est un temps d'arrêt car K est prévisible; T_n croît vers $+\infty$ car K est à trajectoires bornées sur tout compact.

De plus, sur $\{ T_n > 0 \}$ on a $K_{T_n \wedge t} \leqslant n$ pour tout t.

Pour tout n l'application $f^n(t, \omega, x) = f(T_n(\omega) \wedge t, \omega, x)\ I_{\{T_n > 0\}}(\omega)$ vérifie les conditions (L). Soit X_t^n l'unique processus vérifiant

$$X_t^n = H_{T_n \wedge t} I_{\{T_n > 0\}} + \int_0^t f^n(s, X_{s-}^n) dZ_{T_n \wedge s}$$

Il est immédiat, par unicité, que l'on a :

$$\text{si } m \geqslant n \qquad X^m_{T_n \wedge t} I_{\{T_n > 0\}} = X_t^n$$

Posons $X_t(\omega) = X_t^n(\omega)$ si $t \leqslant T_n(\omega)$ et $T_n(\omega) > 0$.

D'après ce qui précède, X est bien défini, càdlàg, et adapté car $X_t = \lim X_t^n$.

Posons

$$Y_t = H_t + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s .$$

Il est immédiat de vérifier que $Y_{T_n \wedge t} I_{\{T_n > 0\}} = X_t^n$ pour tout n. Par suite $Y = X$, et on a donc

$$\text{Pp. s. } \forall t \qquad X_t = H_t + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s .$$

Enfin si X' est un autre processus vérifiant cette relation, il est immédiat, par l'unicité du théorème de C. Doleans-Dade, de vérifier que pour tout n $X'_{T_n \wedge t} I_{\{T_n > 0\}} = X_t^n$ et par suite, que les deux processus X et X' sont indistinguables.

Remarque. — Si K n'est plus supposé à trajectoires bornées sur tout compact, on peut encore introduire les temps d'arrêt T_n et définir par cette méthode un processus X défini sur $\bigcup_n [\![0, T_n]\!]$ et vérifiant, pour tout n, cette équation sur $[\![0, T_n]\!]$.

Nous avons jusqu'ici supposé que les applications $f(t, \omega, .)$ étaient lipschitziennes. Nous allons maintenant étudier le cas où elles sont localement lipschitziennes.

DÉFINITION. — Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Nous dirons que f vérifie les conditions (L″) si f vérifie les conditions L_1 et L_2 de (L) et L_3'' que voici :

L_3'' : pour tout entier k il existe une application $c^k : \mathbb{R}_+ x\Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que :

1) Pour tout ω et tout k, $t \to c^k(t, \omega)$ est bornée sur tout compact.
2) Si

$$\|x\| \leqslant k,\ \|y\| \leqslant k \qquad \|f(t, \omega, x) - f(t, \omega, y)\| \leqslant c^k(t, \omega)\|x - y\|.$$

THÉORÈME 2. — *Soient* $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ *vérifiant les conditions* (L″), H *un processus càdlàg adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, *et* Z *une semimartingale à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$.

Il existe un couple (X, ζ) *unique, où* ζ *est un temps d'arrêt et* X *un processus càdlàg défini sur* $[\![0, \zeta[\![$ *tel que*

1) *Pour tout temps d'arrêt* $T < \zeta$, $X_{T\wedge t}$ *est adapté et vérifie*

$$X_{T\wedge t} = H_{T\wedge t} + \int_0^{T\wedge t} f(s, X_{s-})dZ_s$$

2) $\limsup_{\substack{t\to\zeta \\ t<\zeta}} \|X_t\| = +\infty$ *sur* $\{\zeta < +\infty\}$.

ζ *est un temps d'arrêt prévisible, appelé le « temps d'explosion » du processus.*

Par unicité, on entend que si (X, ζ) *et* (X', ζ') *sont deux tels couples on a alors* $\zeta = \zeta'$ P-p. s. *et* $\{X - X' \neq 0\}$ *est évanescent sur* $[\![0, \zeta[\![$.

Démonstration.

LEMME. — Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt et soit $\zeta = \sup_n T_n$. Soit X un processus défini sur $A = \bigcup_n [\![0, T_n]\!]$ tel que :

a) $$\forall n \qquad X_{T_n\wedge t} = H_{T_n\wedge t} + \int_0^{T_n\wedge t} f(s, X_{s-})dZ_s$$

b) $$\limsup_{\substack{t\to\zeta \\ t<\zeta}} \|X_t\| = +\infty \text{ sur } \{\zeta < +\infty\}.$$

Alors ζ est prévisible, on a $A = [\![0, \zeta[\![$ et pour tout temps d'arrêt $T < \zeta$ on a

$$X_{T\wedge t} = H_{T\wedge t} + \int_0^{T\wedge t} f(s, X_{s-})dZ_s.$$

En effet si l'on avait $\zeta(\omega) = T_n(\omega) < +\infty$, on aurait $\|X_{T_n-}(\omega)\| = +\infty$, ce qui est impossible. Par suite, sur $\{\zeta < +\infty\}$ on a P-p. s. $T_n < \zeta$ pour tout n. On a donc $A = [\![0, \zeta[\![$, et la suite $S_n = T_n \wedge n$ annonce ζ qui est donc prévisible.

Soit T un temps d'arrêt $< \zeta$; le processus $X_{T \wedge t}$ est càdlàg, adapté car $X_{T \wedge t} = \lim_n X_{T_n \wedge T \wedge t}$. De plus on a

$$X_{T \wedge t} = \lim_n \left(H_{T_n \wedge T \wedge t} + \int_0^{T_n \wedge T \wedge t} f(s, X_{s-}) dZ_s \right) = H_{T \wedge t} + \int_0^{T \wedge t} f(s, X_{s-}) dZ_s$$

Ce lemme étant établi, montrons l'unicité dans le théorème 2.

Soient $(X^i, \zeta^i)_{i=1,2}$ deux couples vérifiant les conditions 1) et 2) de l'énoncé. Prolongeons X^i à tout $\Omega \times [0, +\infty]$, $i = 1, 2$), en posant $X^i_t(\omega) = 0$ si $t \geqslant \zeta^i(\omega)$. X^i est alors optionnel, continu à droite ; pour tout n posons $T^i_n = \inf \{ t, \| X^i_t \| \geqslant n \}$.

Puisque $\limsup_{t < \zeta^i} \| X^i_t \| = +\infty$ sur $\{ \zeta^i < +\infty \}$ et que X^i est càdlàg sur $\{ \zeta^i = +\infty \}$, la suite T^i_n croît vers ζ^i et $T^i_n < \zeta^i$ sur $\{ \zeta^i < +\infty \}$. Par conséquent, la suite $S_n = T^1_n \wedge T^2_n \wedge n$ annonce $\zeta^1 \wedge \zeta^2$, et l'on a $\| X^i_{S_n \wedge t-} \| \leqslant n$ pour tout n (avec la convention $X^i_{0-} = 0$).

Pour tout n la fonction $\hat{f}_n(t, \omega, x) = \begin{cases} f(S_n(\omega) \wedge t, \omega, x) & \text{si } \| x \| \leqslant n \\ f\left(S_n(\omega) \wedge t, \omega, \dfrac{n}{\| x \|} \cdot x \right) & \text{si } \| x \| > n \end{cases}$

vérifie les conditions (L′).

D'après ce qui précède, on a

$$X^i_{S_n \wedge t} = H_{S_n \wedge t} + \int_0^t \hat{f}_n(s, X^i_{S_n \wedge s-}) dZ^{S_n}_s .$$

Par l'unicité du théorème 1 on a donc :

$$\text{P-p. s. } \forall t \qquad X^1_{S_n \wedge t} = X^2_{S_n \wedge t} .$$

Par suite X^1 est indistinguable de X^2 sur $[\![0, \zeta^1 \wedge \zeta^2[\![$.

Sur $\{ \zeta^1 < \zeta^2 \}$ on a

$$\| X^2_{\zeta^1 -} \| = \limsup_{t < \zeta^1} \| X^1_t \| = +\infty \qquad \text{p. s.,}$$

ce qui entraîne $P \{ \zeta^1 < \zeta^2 \} = 0$ car X^2 est càdlàg sur $[\![0, \zeta^2[\![$.

Par symétrie on a $\zeta^1 = \zeta^2$ P-p. s. et X^1 est indistinguable de X^2.

Montrons maintenant l'existence. — Pour tout entier k, posons

$$\hat{f}^k(t, \omega, x) = \begin{cases} f(t, \omega, x) & \text{si } \| x \| \leqslant k \\ f\left(t, \omega, \dfrac{k}{\| x \|} \cdot x \right) & \text{si } \| x \| > k \end{cases} ;$$

$\hat{f}^k$ vérifie les conditions (L′).

Pour tout k appelons X_t^k l'unique processus vérifiant :

$$X_t^k = H_t + \int_0^t \hat{f}^k(s, X_{s-}^k)dZ_s .$$

Pour tout k et tout j posons $T_k^j = \inf \{ t \, || X_t^j || \geqslant k \}$.

Soit $k \leqslant j$ et posons $S = T_k^k \wedge T_k^j$ on a $|| X_{S\wedge t-}^j || \leqslant k$ et $|| X_{S\wedge t-}^k || \leqslant k$. Par suite

$$X_{S\wedge t}^j = H_{S\wedge t} + \int_0^t \hat{f}^k(s, X_{S\wedge s-}^j)dZ_s^S .$$

Par unicité, $\hat{f}^k$ vérifiant (L′) on a donc $X_{S\wedge t}^j = X_{S\wedge t}^k \; \forall t$.

Si $t < S(\omega) \, || X_t^k(\omega) || = || X_t^j(\omega) || < k$.

Si $S(\omega) < +\infty \quad || X_S^k(\omega) || = || X_S^j(\omega) || \leqslant k$ car $S(\omega) = T_k^k(\omega)$ ou $T_k^j(\omega)$.

Par suite $S = T_k^k = T_k^j$. Posons alors $T_k = T_k^k = T_k^j$ si $j \geqslant k$. La suite T_k est croissante : si $j \geqslant k$ $T_k = T_k^j \leqslant T_j^j = T_j$.

De plus, si $j \geqslant k$, $X^j = X^k$ sur $[\![0, T_k]\!]$.

Soit X le processus défini sur $\bigcup_k [\![0, T_k]\!]$ par $X_t(\omega) = X_t^k(\omega)$ si $t \leqslant T_k(\omega)$, et $\zeta = \sup_k T_k$.

On a : $X_{T_k\wedge t} = X_{T_k\wedge t}^k$ et donc $X_{T_k\wedge t}$ est càdlàg et adapté et vérifie

$$X_{T_k\wedge t} = H_{T_k\wedge t} + \int_0^{T_k\wedge t} \hat{f}^k(s, X_{s-}^k)dZ_s = H_{T_k\wedge t} + \int_0^{T_k\wedge t} f(s, X_{s-})dZ_s$$

Sur $\{ \zeta < +\infty \}$ on a $T_k < +\infty$ et $|| X_{T_k} || = || X_{T_k}^k || \geqslant k$.

Par suite $\lim_k || X_{T_k} || = +\infty$ et donc $\limsup_{\substack{t\to\zeta \\ t<\zeta}} || X_t || = +\infty$. D'après le lemme, le couple (X, ζ) est solution.

Un principe de localisation

Soient $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ vérifiant les conditions (L″), H un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ càdlàg et adapté, Z une semimartingale pour la loi P à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Notons (X^P, ζ^P) le couple solution de l'équation posée par f, H, Z, calculé relativement à la probabilité P.

Soit Q une probabilité absolument continue par rapport à P. Z est encore une semimartingale pour la loi Q et si h est un processus prévisible localement borné, les intégrales stochastiques $h \underset{P}{\cdot} Z$ et $h \underset{Q}{\cdot} Z$ calculées respectivement pour P et Q coïncident Q p. p. (cf. [*10*] [*13*] et [*24*] pour une vue complète de la question).

Notons (X^Q, ζ^Q) le couple solution de la même équation, mais calculé relativement à la probabilité Q.

On peut alors énoncer le théorème suivant, évident d'après le principe d'invariance des intégrales stochastiques énoncé plus haut et l'unicité des solutions :

THÉORÈME 3. — *Si* $Q \ll P$, *on a* : $\zeta^P = \zeta^Q$ Q-p. s. *et, sur* $[\![0, \zeta^Q[\![$, X^P *est* Q-*indistinguable de* X^Q.

Posons

$$K(t, \omega) = \sup \left\{ \frac{1}{\|x - y\|} \| f(t, \omega, x) - f(t, \omega, y) \|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, \ x \neq y \right\}$$

K est un processus prévisible pouvant prendre la valeur $+\infty$.

Soit $A = \{ \omega \mid t \mapsto K(t, \omega) \text{ est bornée sur tout compact} \}$;

$$A = \bigcap_n \{ \omega, \sup_{t \leqslant n} K(t, \omega) < +\infty \} \qquad \text{est mesurable.}$$

COROLLAIRE 1. — *Avec les mêmes notations que précédemment, soit* (X, ζ) *la solution de l'équation différentielle stochastique posée par* f, H, Z. *Alors on a* P-p. s.

$$\zeta = +\infty \qquad \textit{sur } A.$$

Démonstration. — Si $P(A) = 0$, c'est évident ; si $P(A) > 0$, soit $Q = P^A$ $(Q(B) = P(A \cap B)/P(A))$; Q est une probabilité absolument continue par rapport à P, et pour Q f satisfait Q-p. s. les conditions (L'). D'après le théorème I (X^Q, ζ^Q) vérifie $\zeta^Q = +\infty$ Q-p. s. D'après le théorème 3 on a donc $\zeta (= \zeta^P) = +\infty$ Q-p. s. autrement dit P-p. s. sur A.

COROLLAIRE 2. — *Soient* (H, f, Z) *et* (H', f', Z') *deux triplets vérifiant les mêmes conditions que précédemment.*

Soient (X, ζ), (X', ζ') *leurs solutions respectives et*

$$A = \{\omega, f(., \omega, .) = f'(., \omega, .), H.(\omega) = H'.(\omega), Z.(\omega) = Z'.(\omega) \}.$$

Sur A *on a* P-p. s. :

$$\zeta(\omega) = \zeta'(\omega) \quad \text{et} \quad X_t(\omega) = X'_t(\omega) \qquad \forall t < \zeta(\omega).$$

Démonstration. — A est mesurable. Si $P(A) = 0$, l'énoncé est trivialement vrai. Si $P(A) > 0$, soit $Q = P^A$. On a Q-p. s. $f = f'$, $H = H'$, $Z = Z'$ donc $(X^Q, \zeta^Q) = (X'^Q, \zeta'^Q)$ Q-p. s. et donc (th. 3) $(X, \zeta) = (X', \zeta')$ Q-p. s., c'est-à-dire $\zeta = \zeta'$ P-p. s. sur A et X P-indistinguable de X' sur $(A \times \mathbb{R}_+) \cap [\![0, \zeta[\![$.

Le cas particulier des équations différentielles stochastiques « linéaires »

Soient $A : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n))$ une application continue à gauche et limitée à droite en t, adaptée.

$B : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ une application continue à gauche et limitée à droite en t, adaptée ([3]).

Soient H un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, càdlàg et adapté, et Z une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

THÉORÈME 4. — *Il existe un et un seul processus* X, *càdlàg et adapté solution de l'équation*

$$X_t = H_t + \int_0^t (A_s(X_{s-}) + B_s)dZ_s$$

Démonstration. — Soit f l'application de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ dans $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ définie par $f(t, \omega, x) = A(t, \omega)(x) + B(t, \omega)$.

f vérifie les conditions (L') : en effet f vérifie L_1 et L_2 par hypothèse. D'autre part, si x et y appartiennent à R^n, on a

$$\| f(t, \omega, x) - f(t, \omega, y) \| \leqslant \| A(t, \omega) \| \, \| x - y \|$$

et $t \mapsto \| A(t, \omega) \|$ est continue à gauche et limité à droite donc bornée sur tout compact; f vérifie donc L'_3. Ce théorème est donc un corollaire immédiat du théorème.

§ 2. THÉORÈMES DE COMPARAISON DANS LE CAS CONTINU

Soit X_t un processus pouvant se mettre sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)dZ_s + \int_0^t g(s, X_s)dA_s$$

où Z est une semimartingale continue, A est un processus croissant continu et f et g sont des applications de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (L').

Avec ces notations on peut énoncer :

([3]) Plus généralement, on peut prendre B prévisible localement borné et faire entrer B. Z. dans le processus H, mais la forme ci-dessous est traditionnelle.

THÉORÈME 5. — *Soit* Y_0 *une variable aléatoire* $\mathscr{F}_0$ *mesurable.*

1) *sur* $\{ X_0 \geqslant Y_0 ;\ \forall t,\ f(t, Y_0) = 0$ *et* $g(t, Y_0) \geqslant 0 \}$ *on a* p. s. $X_t \geqslant Y_0$ *pour tout* t.

2) *sur* $\{ X_0 \geqslant Y_0 ;\ \forall t,\ f(t, Y_0) = 0$ *et* $g(t, Y_0) > 0 \}$ *on a* p. s.

$$\int_0^\infty I_{\{s | X_s = Y_0\}} dA_s = 0 .$$

Démonstration. — Appelons B l'ensemble du 1); si $P(B) = 0$, le théorème est trivial. Si $P(B) > 0$, en prenant pour nouvelle probabilité $Q = P^B$, nous pouvons supposer que $B = \Omega$ p. s., ce que nous faisons maintenant. Posons

$$\bar{f}(t, \omega, x) = \begin{cases} f(t, \omega, x) & \text{si } x \geqslant Y_0(\omega) \\ f(t, \omega, Y_0(\omega)) & \text{si } x \leqslant Y_0(\omega) . \end{cases}$$

et de même définissons $\bar{g}$; $\bar{f}$ et $\bar{g}$ vérifient les conditions (L'). Soit Y_t l'unique solution de l'équation

$$Y_t = X_0 + \int_0^t \bar{f}(s, Y_s) dZ_s + \int_0^t \bar{g}(s, Y_s) dA_s$$

Montrons que le résultat est vrai pour Y, i. e. que $Y_t \geqslant Y_0$ p. s. On aura alors p. s. $\bar{f}(t, Y_t) = f(t, Y_t)$ et $\bar{g}(t, Y_t) = g(t, Y_t)$; par unicité on aura donc que Y est indistinguable de X et donc que le résultat est vrai pour X.

Soit $\varepsilon > 0$ et $T_\varepsilon = \inf \{ t\ Y_t < Y_0 - \varepsilon \}$. Montrons que $T_\varepsilon = +\infty$.

Soit $T = \inf \{ t \geqslant T_\varepsilon\ Y_t = Y_0 \}$.

Sur $\{ T_\varepsilon < +\infty \}$ on a $Y_{T_\varepsilon} = Y_0 - \varepsilon$, et donc sur $[T_\varepsilon, T[$ on a

$$Y_t - Y_{T_\varepsilon} = \int_{T_\varepsilon}^t \bar{g}(s, Y_s) dA_s = \int_{T_\varepsilon}^t g(s, Y_0) dA_s \geqslant 0 .$$

Par suite, sur $\{ T_\varepsilon < +\infty \}$ on a $T > T_\varepsilon$ et $Y_t \geqslant Y_0 - \varepsilon$ sur $[T_\varepsilon, T[$, ce qui contredit le fait que $T_\varepsilon = \inf \{ t,\ Y_t < Y_0 - \varepsilon \}$. On a donc $T_\varepsilon = +\infty$, c'est-à-dire $Y_t \geqslant Y_0 - \varepsilon$ p. s. $\forall \varepsilon > 0$. On a donc bien $Y_t \geqslant Y_0$ $\forall t$ p. s.

Pour le 2) nous aurons besoin de quelques rappels sur le temps local d'une semimartingale continue [*14*].

Soient X une semimartingale et L_t^x son temps local en x. M. Yor a montré que l'on pouvait en choisir une version continue en t et continue à droite en x [*23*].

Rappelons de plus la formule démontrée par Meyer [*14*] : si j est une application mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et X^c désigne la partie martingale locale continue de X, on a

$$\int_0^t j(X_s) d \langle X^c, X^c \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} j(x) L_t^x dx$$

De cette formule et de la continuité à droite de $x \to L_t^x$ on déduit immédiatement que :

$$L_t^0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I_{\{0 \leqslant X_s \leqslant \varepsilon\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s$$

Enfin rappelons la formule

$$X_t^- = X_0^- - \int_{0+}^t I_{\{X_s \leqslant 0\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^0 .$$

En appliquant ces résultats on obtient

$$(*) \quad (X_t - Y_0)^- = (X_0 - Y_0)^- - \int_0^t I_{\{X_s \leqslant Y_0\}} f(s, X_s) dZ_s - \int_0^t I_{\{X_s \leqslant Y_0\}} g(s, X_s) dA_s + \frac{1}{2} L_t^0(X - Y_0)$$

Ces résultats étant rappelés, soit B l'ensemble du 1). On a sur B

$$L_t^0(X - Y_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I_{\{0 \leqslant X_s - Y_0 \leqslant \varepsilon\}} f^2(s, X_s) d\langle Z^c, Z^c \rangle_s \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sup_{s \leqslant t} c_s^2 \langle Z^c, Z^c \rangle_t ,$$

qui est nul car f vérifie (L′) et $f(t, Y_0) = 0$.

Le temps local en 0 de $X - Y_0$ est donc nul sur B.

Comme on a vu que sur B, X_t reste supérieur à Y_0, on a également :

$$(X_t - Y_0)^- = 0, \qquad I_{\{X_s \leqslant Y_0\}} f(s, X_s) = I_{\{X_s = Y_0\}} f(s, Y_0) = 0$$

et

$$I_{\{X_s \leqslant Y_0\}} g(s, X_s) = I_{\{X_s = Y_0\}} g(s, Y_0)$$

On obtient donc, en reportant dans la formule (*) ci-dessus.

$$\int_0^t I_{\{X_s = Y_0\}} g(s, Y_0) dA_s = 0$$

Pour tout t, p. s. sur B.

Si C est l'ensemble du 2), on a $g(s, Y_0) > 0$ sur C et donc

$$0 = \int_0^{+\infty} I_{\{X_s = Y_0\}} dA_s .$$

Nous aurons encore besoin d'un théorème de comparaison :

Soient X^1 et X^2 deux processus continus, solutions des équations :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t f(s, X_s^i) dZ_s + \int_0^t g(s, X_s^i) dA_s \qquad i = 1, 2$$

f et g vérifiant les conditions (L′), Z étant une semimartingale continue, A un processus croissant continu.

THÉORÈME 6. — *Sur* $\{X_0^1 \leqslant X_0^2\}$ *on a* p. s. $X_t^1 \leqslant X_t^2$, *pour tout* t.

Démonstration. — Soit $T = \inf\{t, X_t^1 = X_t^2\}$; Montrons qu'après T, X^1 et X^2 coïncident, ce qui entraînera l'énoncé. Sur $\{T < +\infty\}$, on a $X_T^1 = X_T^2 = X_T$; d'autre part $Z_{T+t} - Z_T$ est une semimartingale pour $(P^{\{T<+\infty\}}, (\mathscr{F}_{T+t}))$ et l'on a sur $\{T < \infty\}$

$$X_{T+t}^i = X_T + \int_0^t f(T+s, X_{T+s}^i)d(Z_{T+s} - Z_T) + \int_0^t g(T+s, X_{T+s}^i)d(A_{T+s} - A_T).$$

Par l'unicité des solutions, on obtient $X_{T+t}^1 = X_{T+t}^2$ $\forall t$ sur $\{T < +\infty\}$.

§ 3. UNE MÉTHODE EFFECTIVE DE RÉSOLUTION

Les résultats précédents semblent reléguer « ω » au rôle d'un paramètre dans les équations différentielles stochastiques.

Nous allons indiquer une méthode due à H. Doss montrant qu'en fait, quand les coefficients de l'équation sont suffisamment réguliers, une équation différentielle stochastique réelle, peut se résoudre au moyen de deux équations différentielles « ordinaires » dans lesquelles ω ne joue effectivement que le rôle d'un paramètre. Introduisons d'abord nos notations.

Soient Z une semimartingale continue, A un processus croissant continu, X_0 une variable aléatoire $\mathscr{F}_0$ mesurable p. s. finie.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant les conditions suivantes :

a) $\forall (t, x)$ $f(t, ., x)$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

b) $\forall \omega$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to f(t, \omega, x)$ est de classe C^2.

c) $\forall (t, \omega, a) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}$ la solution maximale de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial b}(t, \omega, a, b) = f(t, \omega, h(t, \omega, a, b)) \\ h(t, \omega, a, 0) = a \end{cases}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Notons $h_{t,\omega,b}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h_{t,\omega,b}(a) = h(t, \omega, a, b)$.

Le couple (t, ω) ne jouant pour l'instant que le rôle d'un paramètre, par un raisonnement classique, d'après l'unicité des solutions, on obtient la *propriété de semi-groupe* suivante :

$$h_{t,\omega,b} \circ h_{t,\omega,c} = h_{t,\omega,b+c} .$$

Nous utiliserons par la suite la conséquence :

$$(a' = h(t, \omega, a, b)) \Leftrightarrow (a = h(t, \omega, a', -b)) .$$

Soit enfin $g : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que :

a) $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ $g(t, ., x)$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

b) $\forall \omega$ $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to g(t, \omega, x)$ est continue.

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante : trouver un processus continu X vérifiant :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) dZ_s + \int_0^t g(s, X_s) dA_s \qquad (*)$$

THÉORÈME 7. — *La résolution de l'équation différentielle stochastique* $(*)$ *est équivalente à la résolution, pour presque tout* ω, *de l'équation différentielle « ordinaire »*

$$(**) \qquad D_t = X_0 + \int_0^t f_1(s, D_s) ds + \int_0^t f_2(s, D_s) d\langle Z, Z\rangle_s + \int_0^t f_3(s, D_s) dA_s$$

dans laquelle on a posé :

$$f_1(s, x) = -\frac{\partial h}{\partial t}(s, x, Z_s) \exp - \int_0^{Z_s} \frac{\partial f}{\partial x}(s, h(s, x, u)) du$$

$$f_2(s, x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} \cdot f(s, h(s, x, Z_s)) \exp - \int_0^{Z_s} \frac{\partial f}{\partial x}(s, h(s, x, u)) du$$

$$f_3(s, x) = g(s, h(s, x, Z_s)) \exp - \int_0^{Z_s} \frac{\partial f}{\partial x}(s, h(s, x, u)) du .$$

Le processus D_t *obtenu comme solution est adapté et à variation finie. Les équations* $(*)$ *et* $(**)$ *sont liées par la relation :*

X *est solution de* $(*)$ *si et seulement si :*

$$X_t = h(t, D_t, Z_t), \qquad D \text{ étant solution de } (**)$$

D *est solution de* $(**)$ *si et seulement si :*

$$D_t = h(t, X_t, -Z_t), \qquad X \text{ étant solution de } (*) .$$

Les intégrales intervenant dans l'équation (**) étant des intégrales de Stieltjes, cette équation peut se résoudre trajectoire par trajectoire. Cette méthode fournit donc un moyen de résoudre l'équation (*) trajectoire par trajectoire.

Démonstration. — La démonstration utilise la formule d'Ito ainsi généralisée : Soient X une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et F une application de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

a) $\forall (t, x) \quad \mathrm{F}(t, ., x)$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

b) $\forall \omega \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{F}(t, \omega, x)$ est de classe C^2.

On a alors P-p. s. pour tout t :

$$\mathrm{F}(t, \mathrm{X}_t) = \mathrm{F}(0, \mathrm{X}_0) + \int_0^t \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}(s, \mathrm{X}_s)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x^i}(s, \mathrm{X}_s)d\mathrm{X}_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^i \partial x^j}(s, \mathrm{X}_s)d\langle \mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j \rangle_s .$$

La démonstration de cette formule est analogue à la démonstration usuelle.

Soit alors X une solution de (*) et posons $\mathrm{D}_t = h(t, \mathrm{X}_t, -\mathrm{Z}_t)$. En appliquant la formule d'Ito précédente à ce processus, on remarque, après simplification, qu'il est p. s. solution de l'équation (**).

Réciproquement, soit D_t une solution de l'équation (**) et posons $\mathrm{X}_t = h(t, \mathrm{D}_t, \mathrm{Z}_t)$; on remarque de même que X_t est solution de (*). Remarquons enfin l'identité :

$$\mathrm{X}_t = h(t, \mathrm{D}_t, \mathrm{Z}_t) \quad \text{équivaut à} \quad \mathrm{D}_t = h(t, \mathrm{X}_t, -\mathrm{Z}_t) .$$

Les détails sont faciles mais assez longs. On pourra consulter (4).

Applications

Signalons tout d'abord que l'on retrouve dans notre cas particulier de façon très simple et un peu plus précise les théorèmes de Wong et Zakai [*19*] et Stroock et Varadhan [*18*] sur les approximations des équations différentielles stochastiques par des équations différentielles ordinaires.

On pourra consulter [*4*] à ce sujet, les résultats s'étendant sans peine à la situation étudiée ici, sous réserve que $\langle \mathrm{Z}, \mathrm{Z} \rangle$ et A admettent des densités continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Dépendance des solutions par rapport à un paramètre. — Nous supposons que la semimartingale Z vérifie $d\langle \mathrm{Z}, \mathrm{Z} \rangle_t = m(t)dt$ m étant continue.

Pour tout point λ d'un ouvert de R^k supposons données :

— un processus croissant A^λ admettant une densité continue a^λ par rapport à la mesure de Lebesgue.

— une variable aléatoire $X_0^\lambda - \mathscr{F}_0$ mesurable.

— deux applications f_λ et g_λ vérifiant les conditions précédant le théorème 7.

On suppose de plus que les applications :

$$(\lambda, t, x) \rightarrow f_\lambda(t, x), g_\lambda(t, x), \frac{\partial f_\lambda}{\partial t}(t, x), \frac{\partial f_\lambda}{\partial t}(t, x), a^\lambda(t), X_0^\lambda$$

sont continues et lipschitziennes en x.

THÉORÈME 8. — *Pour tout $\lambda \in U$, soit X_t^λ le processus solution de l'équation :*

$$X_t^\lambda = X_0^\lambda + \int_0^t f_\lambda(s, X_s^\lambda)dZ_s + \int_0^t g_\lambda(s, X_s^\lambda)dA_s^\lambda$$

Alors l'application $(\lambda, t) \rightarrow X_t^\lambda(\omega)$ est continue pour presque tout ω.

Si de plus les applications sont de classe C^k en λ l'application $\lambda \rightarrow X_t^\lambda(\omega)$ est p. s. *de classe C^k.*

Remarquons que Skorohod [*8*] a prouvé des résultats analogues, mais concernant la dépendance en probabilité ou en moyenne quadratique de la solution (X_t) par rapport au paramètre λ.

Démonstration. — En utilisant les notations précédentes on a $X_t = h(t, D_t, Z_t)$ où $dD_t = S(t, \lambda, D_t)dt$ et $D_0 = X_0^\lambda$ avec

$$S(t, \lambda, x) = \left(-\frac{\partial h_\lambda}{\partial t}(t, x, Z_t) - \frac{1}{2}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} \cdot f_\lambda(t, h_\lambda(t, x, Z_t)).m(t) \right.$$
$$\left. + g_\lambda(t, h_\lambda(t, x, Z_t)).a^\lambda(t)\right)\exp\left(-\int_0^{Z_t}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}(t, h_\lambda(t, x, u))du\right)$$

et il suffit d'appliquer les théorèmes classiques relatifs aux équations différentielles ordinaires.

Théorèmes de comparaison

On trouvera des théorèmes de ce type dans N. El Karoui [*1*] Gikhman-Skorohod [*8*], Yamada [*20*].

THÉORÈME 9. — *Considérons deux processus vérifiant des équations différentielles stochastiques.*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t f(s, X_s^i)dZ_s + \int_0^t g_i(s, X_s^i)dA_s \qquad i = 1, 2$$

où $f(t, \omega, x)$ est de classe C^2 en (t, x), $g_i(t, \omega, x)$ est continue en (t, x), et f et g_i sont lipschitziennes en x, où d'autre part Z est une semimartingale continue et A un processus croissant vérifiant :

$$d\langle Z, Z\rangle_t = m(t)dt,\ dA_t = a(t)dt\,,$$

avec m et a continues.

Sur l'ensemble

$$E = \{ X_0^1 \leqslant X_0^2, \quad \forall t\ \forall x \quad g_1(t, x) \leqslant g_2(t, x) \}$$

on a p. s. $X_t^1 \leqslant X_t^2$ *pour tout t.*

Sur le sous-ensemble de E *où l'une des deux inégalités est stricte on a* p. s. $X_t^1 < X_t^2$ *pour tout $t > 0$.*

Démonstration. — Par un résultat classique, utilisant l'unicité, l'application h associée à f vérifie :

$$(a < a') \Rightarrow (\forall (t, \omega, b), \quad h(t, \omega, a, b) < h(t, \omega, a', b))$$

Avec les mêmes notations que précédemment on a :

$$X_t^i = h(t, D_t^i, Z_t) \quad \text{où} \quad dD_t^i = S^i(t, D_t^i)dt\,, \qquad D_0^i = X_0^i$$

$S^i(t, \omega, x)$ est continue en (t, x), localement lipschitzienne en x. Sur E on a $D_0^1 \leqslant D_0^2$ et $\forall t\ \forall x\ S^1(t, x) \leqslant S^2(t, x)$. Un résultat classique sur les équations différentielles ordinaires nous dit alors que $D_t^1 \leqslant D_t^2$ pour tout t.

Donc, sur E, on a

$$X_t^1 = h(t, D_t^1, Z_t) \leqslant X_t^2 = h(t, D_t^2, Z_t)$$

Si l'une des deux inégalités est de plus stricte on a alors $D_t^1 < D_t^2$ pour tout $t > 0$ et donc $X_t^1 = h(t, D_t^1, Z_t) < h(t, D_t^2, Z_t) = X_t^2$.

Remarquons que le résultat d'inégalité stricte ne semble pas être classique en théorie des équations différentielles stochastiques.

THÉORÈME 10. — *Soit X un processus solution de l'équation*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)dZ_s + \int_0^t g(s, X_s)dA_s$$

f, g, Z et A vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent.

Soit $X^1 : \Omega \to \mathbb{R}$ une application quelconque. Posons

$$B = \{ \forall t, \quad f(t, X^1) = 0,\ g(t, X^1) \geqslant 0,\ X_0 \geqslant X^1 \}\,.$$

Alors on a $X_t \geqslant X^1$ p. s. *sur* B *pour tout t.*

De même sur $C = B \cap \{\forall t,\ g(t, X)a(t) > 0\}$ *on a* p. s. $X_t > X^1$ *pour tout* $t > 0$.

Démonstration. — Sur B on a pour tout t $f(t, X^1) = 0$. Par l'unicité des solutions on a donc $h(t, X^1, b) = X^1$ pour tout t et b.

Sur B, on a

$$S(t, X^1) = g(t, X^1)a(t) \exp - \int_0^{Z_t} \frac{\partial f}{\partial x}(t, X^1, u)du,$$

donc $S(t, X^1)$ est $\geqslant 0$ sur B, et > 0 sur C. Puisque $D'_t = S(t, D_t)$, $D_0 = X_0 \geqslant X^1$ on a donc $D_t \geqslant X^1$ sur B pour tout t (resp. $> X^1$ sur C pour tout $t > 0$).

Par suite $X_t = h(t, D_t, Z_t) \geqslant X^1 = h(t, X^1, Z_t)$ sur B (resp. $> X^1$ sur C).

§ 4. SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Notre étude est tout entière basée sur un théorème de comportement asymptotique des martingales locales continues. Pour une généralisation de ce théorème au cas discontinu et divers résultats de ce genre on pourra se reporter à [*11*].

Nous n'énonçons ici ce théorème que dans le cas continu car la démonstration est alors tout à fait élémentaire.

Signalons que ce théorème est déjà énoncé dans un cours de Kunita et qu'il est bien connu dans le cas du mouvement Brownien, auquel on peut d'ailleurs se ramener par changement de temps. Il nous semble cependant plus clair de le démontrer pour une martingale locale continue quelconque.

THÉORÈME 11. — *Soit* M *une martingale locale continue. Alors :*

1) $$P(\lim_{t \to +\infty} |M_t| = +\infty) = 0.$$

2) $$\{\lim_{t \to +\infty} M_t \textit{ existe}\} = \{\inf_t M_t > -\infty \textit{ ou } \sup_t M_t < +\infty\} = \{\langle M, M \rangle_\infty < +\infty\} \quad \text{p. s.}$$

Démonstration. — Nous pouvons supposer que $M_0 = 0$.

a) Montrons tout d'abord que $\{\sup_t M_t < +\infty\} \subset \{\lim M_t$ existe et est finie$\}$ p. s.

Soit $n \in N$ et $T_n = \inf\{tM_t \geqslant n\}$. On a $M_{T_n \wedge t} \leqslant n$ et donc $n - M_{T_n \wedge t}$ est une martingale locale positive. D'après le lemme de Fatou, $n - M_{T_n \wedge t}$

est une surmartingale positive et donc converge p. s. vers une limite finie. $M_{T_n \wedge t}$ converge donc p. s. vers une limite finie. En remarquant que

$$\{ \sup_t M_t < +\infty \} = \bigcup_n \{ T_n = +\infty \}$$

on a le résultat cherché.

b) En appliquant (*a*) à $-$ M, et en remarquant que M est à trajectoires bornées sur tout compact, on obtient la première égalité p. s. du 2) ainsi que le 1) :

$$\{ \varliminf_{t \to +\infty} M_t = -\infty \} \subset \{ \sup_t M_t < +\infty \} \subset \{ \lim_{t \to +\infty} M_t \text{ est finie} \} \qquad \text{p. s.}$$

Ceci n'est possible que si $P\{ \varliminf_{t \to +\infty} M_t = -\infty \} = 0$ (de même pour $+\infty$).

c) Montrons la dernière égalité.

D'après ce qui précède

$$\{ \lim_{t \to +\infty} M_t \text{ existe} \} = \{ \sup_t | M_t | < +\infty \} \qquad \text{p. s.}$$

Soit $T_n = \inf \{ t \,|\, | M_t | \geqslant n \}$; $M_{T_n \wedge t}$ est une martingale locale bornée et donc une martingale de carré intégrable. On a donc

$$E(\langle M, M \rangle_{T_n}) = E(M^2_{T_n}) \leqslant n^2 .$$

Par suite $\langle M, M \rangle_{T_n}$ est fini p. s. En remarquant que

$$\{ \sup_t | M_t | < +\infty \} = \bigcup_n \{ T_n = +\infty \} ,$$

on obtient que $\{ \lim_{t \to +\infty} M_t \text{ existe} \} \subset \{ \langle M, M \rangle_\infty < +\infty \}$ p. s.

Réciproquement, soit $T_n = \inf \{ t \langle M, M \rangle_t \geqslant n \}$.

D'après le lemme de Fatou, on a $E(M^2_{T_n \wedge T}) \leqslant E(\langle M, M \rangle_{T_n}) \leqslant n$ pour tout temps d'arrêt T.

M^{T_n} est donc une martingale de carré intégrable et donc converge p. s. vers une limite finie.

En remarquant encore que $\{ \langle M, M \rangle_\infty < +\infty \} = \bigcup_n \{ T_n = +\infty \}$ on obtient la dernière inclusion p. s.

COROLLAIRE 1. — *Soit* M *une martingale locale continue.*

$$\{ \langle M, M \rangle_\infty = +\infty \} = \{ \varliminf_{t \to +\infty} M_t = -\infty , \varlimsup_{t \to +\infty} M_t = +\infty \} \qquad \text{p. s.}$$

COROLLAIRE 2. — *Soit* X *une semimartingale continue et soit* X = M + A *sa décomposition canonique :* M *est une martingale locale continue et* A *un processus continu à variation finie.*

Sur $\{ \sup_t X_t < +\infty$, A *est croissant* $\} \cup \{ \inf_t X_t > -\infty$, A *est décroissant* $\}$ *on a* p. s. *:*

$$\lim_{t\to+\infty} M_t, \quad \lim_{t\to+\infty} A_t, \quad \lim_{t\to+\infty} X_t$$

existent et sont finies.

Démonstration. — Soit $B = \{ \sup_t X_t < +\infty$, A est croissant $\}$. Sur B on a $M_t = X_t - A_t$ et donc $\sup_t M_t < +\infty$; par suite M_t converge p. s. vers une limite finie M_∞. On a alors

$$A_t = X_t - M_t \leqslant \sup_t X_t + \sup_t |M_t| < +\infty .$$

Sur B, A étant croissant, A converge vers une limite finie A_∞. X_t converge donc vers $X_\infty = M_\infty + A_\infty$ finie.

On complète la preuve en passant à $-X$.

DÉFINITION. — Soit f une application de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet une frontière sur une partie A de Ω si pour tout $(\omega, x_0) \in A \times \mathbb{R}$ $\lim_{\substack{t\to+\infty \\ x\to x_0}} f(t, \omega, x)$ existe et est finie.

Cette limite est notée $f_\infty(\omega, x_0)$.

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, X_0 une variable aléatoire $\mathscr{F}_0$-mesurable, Z une martingale locale continue, A un processus croissant continu et X un processus vérifiant l'équation :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)dZ_s + \int_0^t g(s, X_s)dA_s$$

Sur f et g nous imposons la seule hypothèse que les intégrales aient un sens. Le théorème 11 nous permet alors d'énoncer le principe suivant :

THÉORÈME 12. — a) *Sous les hypothèses précédentes, si g admet une frontière sur* $\{ X_\infty = \lim_{t\to+\infty} X_t$ *existe et est finie,* $A_\infty = +\infty \}$ *on a alors sur cet ensemble :*

$g_\infty(X_\infty) = 0$ p. s.

b) *Posons*

$$M_t = \int_0^t f(s, X_s)dZ_s, \qquad V_t = \int_0^t g(s, X_s)dA_s .$$

Si f admet une frontière sur $\{ X_\infty = \lim_{t\to+\infty} X_t$ *existe et est finie,* $\underline{\lim}_{t\to+\infty} V_t > -\infty$ *ou* $\overline{\lim}_{t\to+\infty} V_t < +\infty$, $\langle Z, Z \rangle_\infty = +\infty \}$

On a alors sur cet ensemble :

$$f_\infty(X_\infty) = 0 \qquad \text{p. s.}$$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} M_t$, $\lim\limits_{t \to +\infty} V_t$ *existent et sont finies.*

Démonstration. — *a*) Sur l'ensemble considéré, $g(t, X_t)$ converge vers $g_\infty(X_\infty)$.

Si l'on avait $g_\infty(X_\infty) > 0$, V_t convergerait vers $+\infty$ et donc M_t devrait converger vers $-\infty$, ce qui est impossible. De même il n'est pas possible que $g_\infty(X_\infty) < 0$. On doit donc avoir, sur cet ensemble, $g_\infty(X_\infty) = 0$ p. s.

b) Montrons que sur le second ensemble M_t converge p. s.

Si M_t ne convergeait pas on aurait $\overline{\lim}\, M_t = +\infty$, $\underline{\lim}\, M_t = -\infty$ et donc $\overline{\lim}\, V_t = +\infty$, $\underline{\lim}\, V_t = -\infty$ ce qui est impossible par hypothèse. Par suite M_t converge vers une limite finie et donc V_t également. On a alors

$$\int_0^\infty f^2(s, X_s) d \langle Z, Z \rangle_s = \langle M, M \rangle_\infty < +\infty .$$

Puisque $f(t, X_t)$ converge vers $f_\infty(X_\infty)$, ceci n'est possible que si $f_\infty(X_\infty) = 0$.

THÉORÈME 13. — *Avec les mêmes notations que précédemment, soit* Y_0 *une application quelconque de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *Alors sur*

$$\{ \forall t \;\; X_t \geqslant Y_0 , \quad \forall t \;\; \forall x \geqslant Y_0 \quad g(t, x) \leqslant 0 \}$$

X_t *converge* p. s. *vers une limite finie* X_∞.

Si de plus f *et* g *admettent des frontières :*

$$\begin{array}{llll} \textit{sur} \;\; \{ A_\infty = +\infty \} & \textit{on a} & g_\infty(X_\infty) = 0 & \text{p. s.} \\ \textit{sur} \;\; \{ \langle Z, Z \rangle_\infty = +\infty \} & \textit{on a} & f_\infty(X_\infty) = 0 & \text{p. s.} \end{array}$$

Démonstration. — Sur cet ensemble, X_t est minorée et V_t est un processus décroissant. Le corollaire 2 s'applique et donc X_t converge vers une limite finie. Sur $\{ A_\infty = +\infty \}$ on a donc, d'après le théorème précédent, $g_\infty(X_\infty) = 0$. V_t étant un processus décroissant, $\overline{\lim}\, V_t < +\infty$ et donc $f_\infty(X_\infty) = 0$ sur $\{ \langle Z, Z \rangle_\infty \rangle = +\infty \}$.

Montrons maintenant un résultat de stabilité très forte.

THÉORÈME 14. — *Nous supposons maintenant que* f *et* g *satisfont aux conditions* (L′), *que* g *est linéaire décroissante en* x *et admet une frontière* g_∞ *non identiquement nulle, pour tout* ω. *Nous supposons de plus que* $A_\infty = +\infty$.

Soient X_0^1 *et* X_0^2 *deux variables aléatoires* $\mathscr{F}_0$*-mesurables et* X_t^i *la solution de*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t f(s, X_s^i)dZ_s + \int_0^t g(s, X_s^i)dA_s .$$

On a alors :

$$X_t^1 - X_t^2 \qquad \textit{converge p. s. vers } 0 .$$

Démonstration. — Posons $Y_t = X_t^2 - X_t^1$ et écrivons que

$$Y_t = N_t + \int_0^t g(s, Y_s)dA_s$$

N_t étant une martingale locale continue. Sur $\{ Y_0 \geqslant 0 \} = \{ X_0^2 \geqslant X_0^1 \}$ on a vu que $\forall t \; X_t^2 \geqslant X_t^1$ i. e. $Y_t \geqslant 0$ et donc $g(t, Y_t) \leqslant 0$. Par suite, sur $\{ Y_0 \geqslant 0 \}$ Y_t est minoré et $V_t = \int_0^t g(s, Y_s)dA_s$ est décroissant. D'après le corollaire 2, Y_t converge donc sur cet ensemble vers une limite finie Y_∞, et V_t converge également vers une limite finie V_∞.

Or $g(t, Y_t)$ converge vers $g_\infty(Y_\infty)$ et l'on ne peut donc qu'avoir $g_\infty(Y_\infty)=0$; g_∞ étant, par hypothèse, linéaire non nulle, on doit donc avoir $Y_\infty = 0$.

On raisonne de même sur $\{ Y_0 \leqslant 0 \}$.

Une méthode très utilisée en théorie des équations différentielles ordinaires pour étudier la convergence des solutions est la méthode de Lyapunov [9] qui a son analogue en théorie des équations différentielles stochastiques.

Pour simplifier, et sans perte réelle de généralité, nous allons étudier les équations différentielles stochastiques de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)dB_s + \int_0^t g(s, X_s)ds$$

dans lesquelles B est un mouvement brownien nul en 0.

Soit V une application de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$ en (t, x). Définissons LV par :

$$LV(t, \omega, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \omega, x) + g(t, \omega, x)\frac{\partial V}{\partial x}(t, \omega, x) + \frac{1}{2} f^2(t, \omega, x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \omega, x).$$

D'après la formule d'Ito on aura :

$$V(t, X_t) = V(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(s, X_s)dB_s + \int_0^t LV(s, X_s)ds$$

Une application immédiate du corollaire 2 donne le théorème suivant :

THÉORÈME 15. — *Sur*

$$\{ \inf_{t,x} V(t, x) > -\infty , \quad LV(t, x) \leqslant 0 \quad \forall t \ \forall x \}$$

$V(t, X_t)$ *converge vers une limite finie quand* $t \to +\infty$.

Démonstration. — D'après la formule d'Ito, $V(t, X_t)$ est une semimartingale qui sur cet ensemble est minorée et a son processus à variation finie décroissant. On applique alors le corollaire 2.

Dans certains cas, connaissant V, on peut montrer qu'alors X_t converge vers une limite finie X sur l'ensemble ci-dessus. On peut alors localiser la limite :

Si toutes les applications utilisées ont des frontières, le corollaire 2 et le théorème 2 nous donnent :

$$\begin{cases} g_\infty(X_\infty) = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(\infty, X_\infty) f_\infty(X_\infty) = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial t}(\infty, X_\infty) + \dfrac{1}{2} f_\infty^2(X_\infty) \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\infty, X_\infty) = 0 \end{cases}$$

Ce qui permet parfois aussi de montrer que X_t ne peut converger vers une limite finie.

Nous donnons un exemple d'application du théorème précédent :

DÉFINITION. — Une application $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$ en (t, x) est appelée une fonction de Lyapunov généralisée [*8*] si

$$v(x, \omega) = \inf_t V(t, \omega, x) \qquad \text{est positive}$$

et $\forall \omega$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|x| \geqslant \varepsilon \Rightarrow v(x, \omega) \geqslant \delta$.

THÉORÈME 16. — *S'il existe une fonction de Lyapunov généralisée vérifiant*

$$LV(t, \omega, x) \leqslant -k(t, \omega)V(t, \omega, x)$$

où k est mesurable en t, positif et converge vers une limite $k_\infty(\omega)$ *strictement positive, le processus* X_t *converge* p. s. *vers* 0.

Démonstration. — On sait que $V(t, X_t)$ converge p. s. vers une limite finie.

Montrons que $V(t, X_t)$ converge vers 0.

Par hypothèse et d'après la formule d'Ito on a :

$$V(t, X_t) \leqslant N_t - \int_0^t k_s V(s, X_s) ds ,$$

N_t étant une martingale locale continue.

On a donc

$$N_t \geqslant V(t, X_t) + \int_0^t k_s V(s, X_s) ds \geqslant 0 .$$

Par suite N_t converge p. s. vers une limite finie.

Le processus croissant $\int_0^t k_s V(s, X_s) ds$ est majoré par $N_t + V(t, X_t)$, qui converge, et donc converge également vers une limite finie.

Puisque $k_t V(t, X_t)$ converge, on doit donc avoir

$$\lim_t k_t V(t, X_t) = 0 .$$

Comme k_t converge vers $k_\infty \neq 0$, on a donc $\lim_t V(t, X_t) = 0$.

Montrons enfin que X_t tend vers 0.

Si $X_t(\omega)$ ne convergeait pas vers 0, on pourrait trouver une suite t_n tendant vers $+\infty$ et telle que pour tout n, ε étant donné, on ait $|X_{t_n}(\omega)| \geqslant \varepsilon$. Soit alors $\delta > 0$ tel que $|x| \geqslant \varepsilon \Rightarrow |v(x, \omega)| \geqslant \delta$. On aurait alors $V(t_n, X_{t_n}(\omega)) \geqslant \delta$, contrairement au fait que $V(t, X_t(\omega))$ converge vers 0.

Les méthodes de ce type sont très utilisées pour trouver des conditions suffisantes de convergence vers 0.

On pourra consulter à ce sujet les articles de Pinsky [*15*] et le livre de Friedman [*7*].

Le théorème précédent est inspiré d'un théorème de Gikhman-Skorohod [*8*].

Pour terminer nous allons montrer comment cette méthode permet de retrouver très simplement le comportement des solutions d'équations différentielles stochastiques homogènes dans le temps [*7*] [*8*] :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) dB_s + \int_0^t g(X_s) ds$$

Nous supposons pour l'instant que f et g sont continues.

Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (fini ou non) tel que f ne s'annule pas sur I et que pour tout $t X_t \in I$.

Soit V l'application de I vers $\mathbb{R}$ ainsi définie :

$$V(x) = \int_\delta^x \exp - 2 \int_\delta^v \frac{g(u)}{f^2(u)} du \, dv \qquad \text{où } \delta \in I .$$

Sur I, V vérifie $V'g + \frac{1}{2} f^2 V'' = 0$.

Par suite

$$V(X_t) = V(X_0) + \int_0^t V'(X_s)f(X_s)dB_s$$

est une martingale locale continue.

V est strictement croissante, car $V' > 0$.

On pose $V(a) = \inf_x V(x)$, $V(b) = \sup_x V(x)$.

Remarquons que si X_t converge, ce ne peut être vers un point de I car on aurait alors $V'(X_\infty)f(X_\infty) = 0$ ce qui ne peut avoir lieu sur I. Par suite, si X_t converge, ce ne peut être que vers a ou b.

THÉORÈME 17. — a) *Si* $V(a) = -\infty$ *et* $V(b) = +\infty$ *on a*

$$\overline{\lim}\, X_t = b \quad et \quad \underline{\lim}\, X_t = a$$

b) *Si* $V(a) > -\infty$ *et* $V(b) = +\infty$ *on a*

$$\lim X_t = a$$

c) *Si* $V(a) = -\infty$ *et* $V(b) < +\infty$ *on a*

$$\lim X_t = b$$

d) *Si* $V(a) > -\infty$ *et* $V(b) < +\infty$ *on a*

$$\lim X_t = a \ ou\ b \quad et \quad P(X = a) = \frac{V(b) - E(V(X_0))}{V(b) - V(a)}$$

Démonstration. — Remarquons que X_t converge dans $\bar{I}$ ssi $V(X_t)$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}$.

a) Si $V(X_t)$ convergeait, ce ne pourrait être que vers $+\infty$ ou $-\infty$ car X_t ne peut converger dans I, ce qui est impossible.

Par suite, $\overline{\lim}\, V(X_t) = +\infty$ et $\underline{\lim}\, V(X_t) = -\infty$, ce qui implique le résultat.

b) $V(X_t) \geqslant V(a) > -\infty$ et donc $V(X_t)$ converge vers une limite finie. X_t converge donc et ce ne peut être que vers a.

c) Même raisonnement que pour *b*).

d) $V(X_t)$ est bornée et donc converge vers une limite finie. X_t converge donc vers a ou b.

$V(X_t)$ est une martingale locale bornée et donc une martingale uniformément intégrable.

$$V(X_\infty) = V(a)I_{(X_\infty = a)} + V(b)I_{(X_\infty = b)}$$

$$E(V(X_\infty)) = E(V(X_0)) = V(a)P(X_\infty = a) + V(b)P(X_\infty = b)$$

ce qui donne le résultat.

Application. — Nous supposons pour simplifier, bien que cela ne soit pas nécessaire, que f est de classe C^2 et que f et g n'ont pas de zéros communs. Nous supposons de plus que les zéros de f sont isolés.

Nous notons par un point sur l'axe des x un zéro de f et par une flèche vers la droite (resp. la gauche) pour indiquer que $g(x_0) > 0$ (resp. $g(x_0) < 0$).

1er CAS $-\overset{\rightarrow}{\underset{x_0}{\times}}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\overset{\leftarrow}{\underset{x_1}{\times}}-$ Si $X_0 \in [x_0, x_1]$ alors on a vu que $\forall t > 0$ $X_t \in]x_0, x_1[$.

X_t ne peut converger vers x_0 ou x_1 car ceux-ci n'annulent pas g. Par suite, on doit donc avoir $\overline{\lim}\, X_t = x_1$ $\underline{\lim}\, X_t = x_0$.

2e CAS $-\overset{\rightarrow}{\underset{x_0}{\times}}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\overset{\rightarrow}{\underset{x_1}{\times}}-$ Si $X_0 \in [x_0, x_1]$ alors $\forall t > 0$ $X_t > x_0$. On montre aisément que $V(x_0) = -\infty$, $V(x_1) < +\infty$, $V'(x_1) = 0$, $V''(x_1) = 0$. Posons $W(x) = V(x)$ si $x \in [x_0, x_1]$, $W(x) = V(x_1)$ si $x \geqslant x_1$. W est C^2 et harmonique, $W(X_t)$ est une martingale locale. Si $\forall t$ $X_t(\omega) \leqslant x_1$, $X_t(\omega)$ devrait converger et ce ne pourrait être que vers x_1, ce qui est impossible car $g(x_1) \neq 0$. Donc, pour presque tout ω, il existe t tel que $X_t(\omega) > x_1$ X_t sort donc de l'intervalle par x_1. Si T est le temps de sortie, il est immédiat, en regardant X_{T+t} que X_t ne peut plus retoucher x_1 et donc ne peut plus revenir dans cet intervalle.

3e CAS $-\overset{\leftarrow}{\underset{x_0}{\times}}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\overset{\leftarrow}{\underset{x_1}{\times}}-$ Même raisonnement que précédemment, X_t sort de l'intervalle par x_0 et ne peut plus y revenir.

4e CAS $-\overset{\leftarrow}{\underset{x_0}{\times}}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\overset{\rightarrow}{\underset{x_1}{\times}}-$ Par un raisonnement analogue, X_t sort de l'intervalle et ne peut plus y revenir.

Soit $T = \inf \{ t \ X_t \notin [x_0, x_1] \}$.

On a $X_T = x_0 I_{(X_T = x_0)} + x_1 I_{(X_T = x_1)}$

On trouve donc :

$$P(X \text{ sorte par } x_0) = \frac{V(x_1) - E(V(X_0))}{V(x_1) - V(x_0)}$$

Les deux derniers théorèmes permettent ainsi de suivre la trajectoire de X_t et de connaître son comportement final, dès que l'on connaît les zéros de f et le signe de g.

REFERENCES

[1] A. BONAMI, N. KAROUI, B. ROYNETTE, Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, B, vol. VII, nº 1, 1971, p. 31-80.

[2] C. DOLEANS DADE, On the existence and unicity of solutions of stochasti-integral equations. *Zeit. fur Wahr Theorie*, t. **36**, 1976, p. 93-101.

[3] C. DOLEANS DADE et P. A. MEYER, *Équations différentielles stochastiques. Séminaire de Probabilité XI. Lecture notes* n° 581, Springer, p. 376.
[4] H. DOSS, Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 2, 1977.
[5] H. DOSS et E. LENGLART, Sur le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles stochastiques. *C. R. Acad. Sci.*, t. **284** A, 971.
[6] M. EMERY, Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Application aux intégrales multiplicatives stochastiques. A paraître dans le *Zeit. fur Wahr. Theorie.*
[7] A. FRIEDMAN, *Stochastic differential equations and applications.* Academic press, New York, 1975.
[8] I. I. GIHMAN et A. V. SKOROHOD, *Stochastic differential equations.* Springer-Verlag, 1972.
[9] W. HAHN, *Theory and application of Lyapunov's direct method.* Prentice-Hall Inc. Englewood cliffs. N. J. 1963.
[10] J. JACOD et J. MEMIN, Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. *Zeit. fur Wahr.*, t. **35**, 1976, p. 1-37.
[11] E. LENGLART, Sur la convergence presque sûre des martingales locales. *C. R. Acad. Sci.*, t. **284**, Série A, p. 1087.
[12] E. LENGLART, *Propriétés locales des semimartingales. Applications aux équations différentielles stochastiques.* Publication du département de mathématiques de Rouen, 1976, n° 6.
[13] E. LENGLART, *Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilité.* A paraître aux *Zeit. fur Wahr.*
[14] P. A. MEYER, *Cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de probabilité X. Lecture notes* n° 511, Springer.
[15] M. A. PINSKY, Stochastic stability and the Dirichlet problem. *Communication on pure and applied math.*, vol. XXVII, 1974, p. 311-350.
[16] Ph. E. PROTTER, On the existence, uniqueness, convergence and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations. *Ann. of Probability*, vol. 5, n° 2, 1977, p. 243-261.
[17] Ph. E. PROTTER, Right continuous solutions of systems of stochastic integral equations. *Journal of multivariate analysis*, t. **7**, 1977, p. 204-261.
[18] D. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, *On the support of diffusion process with application to the strong maximum principle.* 6th Berkeley symposium. III, 1972, p. 333-359.
[19] E. WONG et M. ZAKAI, On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. *Ann. Math. Statistic*, t. **36**, 1965, p. 1560-1564.
[20] T. YAMADA, On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. *Journ. of Kyoto Univ.*, vol. 13, n° 3.
[21] T. YAMADA, Sur l'approximation des solutions d'équations différentielles stochastiques. *Zeit. fur Wahr.*, t. **36**, 1976, p. 153-164.
[22] T. YAMADA and S. WATANABE, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations I et II. *Journ. of Kyoto Univ.*, vol. XI, n° 1 et 3.
[23] M. YOR, Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales. (A paraître dans Astérisque, *Soc. Math. de France.*)
[24] M. YOR et C. YOEURP, Espace orthogonal à une semimartingale, applications. *Labo. de Probabilité Paris VI.* (A paraître.)

(Manuscrit reçu le 1er février 1978)