ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PIERRE CRÉPEL
ALBERT RAUGI

Théorème central limite sur les groupes nilpotents

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 2 (1978), p. 145-164
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_2_145_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 2, 1978, p. 145-164.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorème central limite sur les groupes nilpotents

par

Pierre CRÉPEL et Albert RAUGI
Laboratoires de Probabilités, Université de Rennes,
ERA 250 du C. N. R. S., 35031 Rennes Cedex

RÉSUMÉ. — Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans un groupe nilpotent. Nous donnons un théorème de la limite centrale pour les produits partiels $X_1 \ldots X_n$. Le cas où les variables aléatoires ne sont pas centrées ne se ramène pas au cas des variables centrées.

SUMMARY. — Let (X_n) be a sequence of iid r. v's with values in a nilpotent group. We give a central limit theorem for the partial products $X_1 \ldots X_n$. The non-centered case does not reduce to the centered case.

0. INTRODUCTION

Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de loi notée o. Soit X_n une suite de variables aléatoires (v. a.) indépendantes, de même loi μ, à valeurs dans N. Nous établissons un théorème central limite; en d'autres termes il s'agit de normaliser $S_n = X_1 o \ldots o X_n$, si possible par un automorphisme, de manière que cette suite de variables aléatoires normalisées converge en loi.

On est amené pour cela à distinguer le cas où les v. a. sont centrées (théorème 3.1) et celui où les v. a. sont non centrées (théorème 4.1).

Les résultats avaient été annoncés dans [*1*]. Ils généralisent ceux de [*8*] et [*5*] qui traitent le cas du groupe nilpotent le plus simple : le premier groupe de Heisenberg : dans ce cas, il n'y avait que deux normalisations possibles pour obtenir une loi limite non dégénérée (le cas « centré » et le cas « non centré »).

Dans le cas du groupe des matrices triangulaires supérieures, d'ordre quelconque, n'ayant que des 1 sur la diagonale, une étude complète a été faite dans [*10*] : il apparaît que la situation est plus compliquée et que plusieurs normalisations différentes sont à utiliser.

Nous abordons ici le cas d'un groupe nilpotent simplement connexe quelconque. Les résultats que nous établissons dans cet article ne donnent pas toujours une loi non dégénérée : ils ne sont complètement satisfaisants que dans le cas « centré » et dans le cas où μ est « vraiment non centrée » (ces cas étaient les deux seuls possibles pour le groupe de Heisenberg).

Le cas général sera traité dans [*7 bis*] par une méthode différente du présent article.

Remarquons aussi que des résultats de [*7*] permettent d'obtenir des généralisations à d'autres groupes (non nilpotents).

1. NOTATIONS

(1.1) Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de longueur r que nous identifions à son algèbre de Lie. Le produit sur N est donc donné par la formule de Campbell-Hausdorff :

$$(*) \qquad u \circ v = u + v + \frac{1}{2}[u, v] + \dots \qquad (u, v \in \mathrm{N})$$

Notons $\mathrm{N} = \mathrm{N}^1 = \mathrm{N}^2 \supset \dots \supset \mathrm{N}^r \supset \mathrm{N}^{r+1} = \{0\}$, la série centrale descendante de N. Pour $s \in \{1, \dots, r\}$, soit m^s un sous-espace supplémentaire de N^{s+1} dans N^s ; nous avons alors $\mathrm{N} = m^1 \oplus \dots \oplus m^r$; si u est un élément de N, nous désignons par $u^{(s)}$ sa composante sur m^s $\left(\text{i. e. } u = \sum_{s=1}^{r} u^{(s)} \text{ avec } u^{(s)} \in m^s\right)$.

Choisissons une base $(e_{p_{s-1}+1}, \dots, e_{p_s})$ de m^s, avec $p_0 = 0$ et $p_r = m$, on obtient alors une base $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de N qui est dite adaptée à sa série centrale.

(1.2) Désignons par $\mathscr{A}$ l'algèbre des fonctions polynômes sur l'espace vectoriel N et par $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ le système des fonctions coordonnées associé à la base $(e_i)_{1\leq i\leq m}$. Nous définissons une notion de degré sur cette algèbre (cf. [*4*]) en attribuant un degré à chaque générateur x_i ; le degré de x_i noté d_i ou d^0x_i, est par définition égal au plus grand entier s tel que e_i appartienne à N^s (cette notion est évidemment indépendante du choix de la base adaptée).

(1.3) Si $u \in N$, on pose $u_i = x_i(u)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$; il vient

$$u^{(s)} = u_{p_{s-1}+1}e_{p_{s-1}+1} + \ldots + u_{p_s}e_{p_s}, \qquad s \in \{1, \ldots, p\}.$$

Le produit o est polynomial ; plus précisément nous avons

$$(u\mathrm{o}v)_i = u_i + v_i + P_i(u, v), \qquad i \in \{1, \ldots, m\}$$

où P_i est une fonction polynôme sur $N \times N$ ($\approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$) telle que :

i) $P_i(u, v)$ ne dépend que des p_{d_i-1} premières coordonnées de u et de v. (Autrement dit P_i est une fonction polynôme sur $R^{p_{d_i-1}} \times R^{p_{d_i-1}}$).

ii) Le degré (global) de P_i, noté d^0P_i, est inférieur ou égal à d_i.

iii) Le degré partiel de P_i par rapport à la première (resp. la deuxième variable, noté $d^0P_{i/u}$ (resp. $d^0P_{i/v}$) est inférieur ou égal à $d_i - 1$.

iv) La valuation partielle de P_i par rapport à la première (resp. la deuxième) variable, notée val P_i/u (resp. val P_i/v) est supérieure ou égale à 1.

(1.4) Désignons par [,] le crochet de Lie défini sur N. Nous avons

$$[e_l, e_k] = \sum_{p_{d_l+d_k-1} < i \leq m} \lambda^i_{l,k} e_i \qquad (l, k \in \{1, \ldots, m\})$$

où les $\lambda^i_{l,k}$ sont des réels, appelés constantes de structure. Posons alors

$$[e_l, e_k]' = \sum_{p_{d_l+d_k-1} < i \leq p_{d_l+d_k}} \lambda^i_{l,k} e_i \qquad (l, k \in \{1, \ldots, m\});$$

on vérifie facilement que [,]′ est un crochet de Lie sur N tel que $[m^p, m^q]' \subset m^{p+q}$.

A partir de [,]′, la formule de Campell-Hausdorff permet de définir sur N un nouveau produit o′ ; pour $i \in \{1, \ldots, m\}$, le polynôme P'_i, défini par $(u\mathrm{o}'v)_i = u_i + v_i + P'_i(u, v)$, vérifie alors, outre les conditions *i*), …, *iv*) de (1.3), la condition :

v) P'_i est homogène de degré d_i.

2. MOMENTS

(2.1) DÉFINITIONS (cf. [4]). — Soit G un groupe L. C. D., compactement engendré. Une application borélienne δ de G dans $\mathbb{R}_+$ est appelée jauge (resp. fonction sous-additive) si elle vérifie :

$$\forall g_1, g_2 \in G \qquad \delta(g_1 g_2) \leq \delta(g_1) + \delta(g_2) + C$$
$$(\text{resp. } \delta(g_1 g_2) \leq \delta(g_1) + \delta(g_2))$$

où C est une constante > 0 indépendante de g_1 et g_2.

Une jauge δ de G est dite principale s'il existe un voisinage compact V de l'unité engendrant G tel que $B_n = \{ x : \delta(n) \leq n \} \subset V^n$.

(2.2) On sait ([4]) que sur un groupe L. C. D. compactement engendré, il existe des jauges principales et si δ_0 est l'une d'elles pour toute autre jauge δ nous avons :

$$\forall g \in G \qquad \delta(g) \leq C_1 \delta_0(g) + C_2$$

où C_1 et C_2 sont des nombres > 0 indépendants de g.

Il s'ensuit que si μ est une mesure de probabilité sur G, l'expression $\int_G (\delta_0(g))^\gamma \mu(dg) < +\infty$ pour $\gamma > 0$, est indépendante du choix de δ_0 ; dans ce cas nous disons que μ possède un moment d'ordre γ.

(2.3) Revenons à présent au cas du groupe nilpotent N. Supposons les sous-espaces m^s de N normés par $\| \;\|$, $s \in \{ 1, \ldots, r \}$, on définit une fonction ϕ sur N par

$$\phi(u) = \sup_{1 \leq i \leq r} \| u^{(s)} \|^{1/s} \qquad (u \in N).$$

On sait ([4], lemme II.1) que, quitte à remplacer les normes données par des normes homothétiques, ϕ est une jauge principale.

(2.4) LEMME. — *Soit μ une mesure de probabilité sur* N. *Alors nous avons l'équivalence :*

i) *μ possède un moment d'ordre $k \in N^*$*

ii) *Pour toute fonction polynôme* A *sur* N *de degré $\leq k$,*

$$\int_N | A(x) | \mu(dx) < +\infty .$$

Preuve. — Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, on désigne par x^α le monôme $x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$ et on pose

$$\| \alpha \| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{p_1} + 2(\alpha_{p_1} + \ldots + \alpha_{p_2}) + \ldots + r(\alpha_{p_{r-1}+1} + \alpha_{p_r}).$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, posons

$$\beta_i = \begin{cases} \dfrac{\|\alpha\|}{d_i\alpha_i} & \text{si} \quad \alpha_i \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad \alpha_i = 0 \end{cases}.$$

Nous avons $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\beta_i} = 1$ et d'après l'inégalité de Hölder, il vient :

$$\int_{\mathrm{N}} |x^\alpha(u)| \mu(du) \leq \prod_{1 \leq i \leq m} \left(\int_{\mathrm{N}} |x_i(u)|^{\beta_i\alpha_i} \mu(du) \right)^{1/\beta_i}.$$

On en déduit que *ii*) équivaut à

$$ii)' \qquad \int_{\mathrm{N}} |x_i(u)|^{k/d_i} \mu(du) < +\infty, \qquad i \in \{1, \ldots, m\}$$

Comme *i*) équivaut, par définition à $\int_{\mathrm{N}} (\phi(u)^k \mu(du) < +\infty$ (voir (2.2) et (2.3)) et que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont équivalentes, le lemme s'en déduit immédiatement. ▲

(2.5) DÉFINITION. — Soit μ une mesure de probabilité sur N possédant un moment d'ordre 1. Nous disons que μ est centrée si

$$\int_{\mathrm{N}} \mathrm{A}(x)\mu(dx) = 0$$

pour tout monôme A de degré 1 sur N.

(2.6) LEMME ([4]). — *Soit μ une mesure de probabilité sur* N *possédant un moment d'ordre $k \geq 1$. Soit* P *la probabilité de transition associée à μ* (i. e. $\mathrm{P}(x, \cdot) = \varepsilon_x * \mu(\cdot)$). *Alors pour toute fonction polynôme* A *de degré $\leq k$ sur* N, *on a*

$$d^0[(\mathrm{P} - \mathrm{I})\mathrm{A}] \leq d^0\mathrm{A} - 1$$

et si de plus μ est centrée,

$$d^0[(\mathrm{P} - \mathrm{I})\mathrm{A}] \leq d^0\mathrm{A} - 2$$

Preuve. — Il suffit de montrer le lemme quand A est un monôme x^α, $\alpha \in \mathbb{N}^m$ avec $\|\alpha\| \leq k$.

De (1.3) il résulte que l'on a

$$x^\alpha(uov) = x^\alpha(u) + x^\alpha(v) + \mathrm{P}_\alpha(u, v)$$

avec

$$i) \qquad d^0\mathrm{P}_\alpha \leq \|\alpha\|$$

$$ii) \qquad d^0\mathrm{P}_{\alpha/u} \quad \text{et} \quad d^0\mathrm{P}_{\alpha/v} \leq \|\alpha\| - 1$$

$$iii) \qquad \mathrm{val}\ \mathrm{P}_{\alpha/u} \quad \text{et} \quad \mathrm{val}\ \mathrm{P}_{\alpha/v} \geq 1.$$

Par suite, pour $||\alpha|| \leq k$,

$$(\mathrm{P} - \mathrm{I})(x^\alpha)(\cdot) = \int_{\mathrm{N}} x^\alpha(v)\mu(dv) + \int_{\mathrm{N}} \mathrm{P}_\alpha(\cdot, v)\mu(dv)$$

est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $||\alpha|| - 1$. Si μ est centrée, les monômes de $\mathrm{P}_\alpha(u, v)$ dont le degré partiel en v est égal à 1 vont avoir une intégrale nulle, il s'ensuit donc que $d^0[(\mathrm{P}-\mathrm{I})(x^\alpha)] \leq ||\alpha|| - 2$. ▲

Nous terminons cette première partie en rappelant un résultat de Trotter ([*6*]) que l'on utilisera dans la suite.

(2.7) THÉORÈME. — Soit X un espace de Banach et $(\mathrm{T}_t^{(n)})_{t>0}$ une suite de semi-groupes de contractions fortement continues sur X, de générateurs infinitésimaux $(\mathscr{D}(\mathrm{A}_n), \mathrm{A}_n)$. Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace de X tel que

i) $\mathscr{F}$ est dense dans X, et $\mathscr{F} \subset \mathscr{D}(\mathrm{A}_n) \quad \forall n$

ii) $\forall f \in \mathscr{F}$ $\lim_n \mathrm{A}_n f$ existe, soit $\mathrm{A}f$ cette limite

iii) Il existe $\lambda_0 > 0$ t. q. $\overline{(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})(\mathscr{F})} = \mathrm{X}$.

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions fortement continu T_t sur X et

$$\forall f \in \mathrm{X} \qquad \lim_n ||\mathrm{T}_t^{(n)}f - \mathrm{T}_t f|| = 0.$$

3. THÉORÈME CENTRAL LIMITE DANS LE CAS CENTRÉ

(3.1) THÉORÈME. — *Soit* (X_n) *une suite de v. a. indépendantes à valeurs dans* N, *de même loi* μ *centrée apériodique et ayant un moment d'ordre* $2r$. *Si*

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 \mathrm{o} \ldots \mathrm{o}\mathrm{X}_n = \sum_{s=1}^{r} \mathrm{S}_n^{(s)},$$

alors $\mathrm{U}_n(\mathrm{S}_n) = \sum_{s=1}^{r} \frac{\mathrm{S}_n^{(s)}}{n^{s/2}}$ *converge en loi.*

La loi limite ν *ne dépend que des moments d'ordre 2 de* μ. *Elle est absolument continue par rapport à la mesure de Haar et c'est la loi au temps 1 d'un processus de diffusion sur* $\mathbb{R}^m$, *dont nous indiquons le générateur infinitésimal.*

Rappels : 1) On dit que μ est apériodique si le plus petit sous-groupe fermé engendré par le support de μ est N tout entier.

2) Si l'on suppose seulement que μ a un moment d'ordre 2, on peut montrer, en utilisant des troncatures, que le résultat reste vrai ([*7 bis*]).

3) Des précisions d'un autre ordre sur la convergence et sur la limite sont données dans [*2*], dans le cas du groupe de Heisenberg.

Preuve de (3.1) : Soit $x = \sum_{s=1}^{r} x^{(s)} \in \mathrm{N}$ avec $x^{(s)} \in m^s$, $s \in \{1, \ldots, r\}$ (voir (1.1)).

Nous avons $\mathrm{U}_n(x) = \sum_{s=1}^{r} \frac{x^{(s)}}{n^{s/2}}$ et il est clair que U_n est un automorphisme de N si et seulement si le crochet de Lie [,] de N vérifie $[m^p, m^q] \subset m^{p+q}$, p et $q \in \{1, \ldots, r\}$, avec la convention, $m^l = (0)$ si $l > r$.

a) Nous commençons par prouver le théorème dans le *cas où* U_n *est un automorphisme de* N. La méthode utilisée est inspirée des articles de V. N. Tutubalin ([*8*]) et H. Hennion ([*5*]).

Désignons par $\mathrm{C}_0(\mathrm{N})$ l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini et par $\mathrm{C}_k^\infty(\mathrm{N})$ l'espace des fonctions à support compact indéfiniment différentiables sur N.

Notons B_n l'opérateur défini sur $\mathrm{C}_0(\mathrm{N})$ par

$$\mathrm{B}_n f(x) = \int_{\mathrm{N}} f(x o \mathrm{U}_n(y))\mu(dy).$$

Puisque U_n est un automorphisme de N, nous avons

$$\mathrm{B}_n^n f(x) = \int_{\mathrm{N}} f(x o \mathrm{U}_n(y))\mu^{*n}(dy)$$

où μ^{*n} désigne la convolée de n mesures égales à μ.

Posons $\mathrm{A}_n = n(\mathrm{B}_n - \mathrm{I})$ et $\mathrm{T}_t^n = \exp(t\mathrm{A}_n)$, nous avons (cf. [*6*]).

(3.2) LEMME. — *Pour tout* f *de* $\mathrm{C}_0(\mathrm{N})$ *tel que*

$$\| \mathrm{A}_n f \|_\infty = \sup_{u \in \mathrm{N}} | \mathrm{A}_n f(u) | < +\infty,$$

on a $\lim_n \| \mathrm{T}_t^{(n)} f - \mathrm{B}_n^{[nt]} f \| = 0$ *où* $[nt]$ *désigne la partie entière du réel positif* nt. ▲

Pour prouver le théorème (3.1), il reste donc à montrer qu'on peut appliquer le théorème de Trotter à la suite de semi-groupes de contractions $\mathrm{T}_t^{(n)}$. Pour cela nous montrerons d'abord que A_n converge vers un opérateur A, puis que A satisfait aux autres conditions du théorème de Trotter.

(3.3) LEMME. — *Pour tout* $f \in \mathscr{F} = \mathrm{C}_k^\infty(\mathrm{N})$, $\mathrm{A}_n f$ *converge.*

Preuve. — Soit u et $v \in \mathrm{N}$, et $f \in \mathrm{C}_k^\infty(\mathrm{N})$. D'après le théorème de Taylor appliqué à la fonction réelle $g(t) = f(uotv)$, nous avons

$$f(uov) - f(u) = vf(u) + \frac{1}{2}v^2 f(uo\theta v) \quad \text{avec} \quad \theta \in]0, 1[,$$

où $vf(u) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(uotv) - f(u)}{t}$.

Considérons la base adaptée $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de N et les fonctions coordonnées $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ associées à cette base (voir (1.1)). Il vient

$$f(uov) - f(u) = \sum_{i=1}^{m} x_i(v)(e_i f)(u) + \frac{1}{2!} \sum_{1 \leq i,j \leq m} x_i(v)x_j(v)[e_i(e_j f)](uo\theta v)$$

D'où

$$\begin{aligned} n(\mathrm{B}_n - \mathrm{I})(f)(u) &= n \int_{\mathrm{N}} (f(uo\mathrm{U}_n(v)) - f(u))\mu(dv) \\ &= n \sum_{i=1}^{m} (e_i f)(u) \left(\int_{\mathrm{N}} \frac{x_i(v)}{n^{d_i/2}} \mu(dv) \right) \\ &\quad + \frac{n}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq m} \int_{\mathrm{N}} \frac{x_i(v)x_j(v)}{n^{\frac{d_i + d_j}{2}}} [e_i(e_j f)](uo\theta \mathrm{U}_n(v))\mu(dv). \end{aligned}$$

μ étant centrée, $\int_{\mathrm{N}} x_i(v)\mu(dv) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, p_1\}$; pour $i > p_2$, $d_i \geq 3$; par suite le premier terme du second membre converge, quand n tend vers l'infini, vers

$$\sum_{i=p_1+1}^{p_2} \left(\int_{\mathrm{N}} x_i(v)\mu(dv) \right) e_i f(x).$$

Posons $f_n^{i,j}(v) = x_i(v)x_j(v)[e_i(e_j f)](uo\theta \mathrm{U}_n(v))$. Comme $f \in \mathrm{C}_k^\infty(\mathrm{N})$, il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que

$$\| e_i(e_j f) \|_\infty < \mathrm{M}, \qquad \forall i \text{ et } j \in \{1, \ldots, m\}$$

et donc

$$| f_n^{i,j}(v) | \leq \mathrm{M} \, | x_i(v)x_j(v) | .$$

μ ayant un moment d'ordre $2r$, la fonction $| x_i(\cdot)x_j(\cdot) |$ est μ-intégrable. D'autre part, $\mathrm{U}_n(v)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et par suite $[e_i(e_j f)]\,(uo\theta \mathrm{U}_n(v)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e_i(e_j f)(u)$.

D'après le théorème de convergence dominée nous avons donc

$$\int_{\mathrm{N}} f_n^{i,j}(v)\mu(dv) \xrightarrow[n \to +\infty]{} [e_i(e_j f)](u) \int_{\mathrm{N}} x_i(v)x_j(v)\mu(dv)$$

Comme $\dfrac{n}{n^{\frac{d_i+d_j}{2}}}$ tend vers zéro excepté dans le cas où $d_i = d_j = 1$, nous obtenons $n(\mathrm{B}_n - \mathrm{I})(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{A}f$; où

$$\mathrm{A}f = \sum_{i=p_1+1}^{p_2} \left(\int_{\mathrm{N}} x_i(v)\mu(dv)\right) e_i f + \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le p_1} \left(\int_{\mathrm{N}} x_i(v)x_j(v)\mu(dv)\right) e_i(e_j f).$$

Le lemme (3.3) est établi. ▲

(3.4) LEMME. — *L'opérateur* A *est non dégénéré ; c'est-à-dire que l'algèbre de Lie engendrée par le complément du noyau de la forme quadratique de* A *est égal à tout* N.

Preuve. — Posons

$$a_{ij} = \int_{\mathrm{N}} x_i(v)x_j(v)d\mu(v) \qquad i, j = 1, \dots, p_1$$

μ étant apériodique, la matrice (a_{ij}) est non dégénérée. En effet, si la matrice (a_{ij}) était dégénérée, il existerait des réels λ_i, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{p_1} \lambda_i x_i(\cdot) = 0 \qquad \mu\text{-p. s.},$$

et μ serait alors portée par le sous-groupe fermé

$$\left\{ v \in \mathrm{N} \ \sum_{i=1}^{p_1} \lambda_i x_i(v) = 0 \right\}.$$

Le lemme (3.4) résulte alors du fait que $\{ e_1, \dots, e_{p_1} \}$ engendre N en tant qu'algèbre de Lie. ▲

Fin de la démonstration du théorème (3.1) *dans le cas où* U_n *est un automorphisme :*

A étant non dégénéré, et $\mathscr{F}$ étant dense dans $\mathrm{C}_0(\mathrm{N})$, il résulte de [*3*] qu'il existe un $\lambda_0 > 0$ tel que $\overline{(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})(\mathscr{F})} = \mathrm{C}_0(\mathrm{N})$. On peut donc appliquer le théorème de Trotter.

Il résulte alors du lemme (3.2) que B_n^n converge fortement vers T_1, ce qui démontre que $\mathrm{U}_n(\mathrm{S}_n)$ converge en loi vers la loi ν au temps 1 d'un processus de diffusion sur $\mathbb{R}^m$.

D'autre part, l'expression de A ne fait intervenir que les moments d'ordre 2 de μ.

Enfin l'absolue continuité de ν résulte immédiatement du théorème suivant :

Soit G un groupe de Lie, $X_0, \ldots, X_d$, $(d+1)$ éléments de son algèbre de Lie $\mathbf{G}$, alors l'opérateur $A = X_0 + \sum_{i=1} X_i^2$ est hypoelliptique si la sous-algèbre de Lie engendrée par $X_0, \ldots, X_d$ est égale à $\mathbf{G}$ (théorème d'Hörmander). C'est une CNS pour que le semi-groupe associé à A soit absolument continu par rapport à la mesure de Haar (théorème de Wehn).

(La démonstration est exactement la même que dans [*11*], p. 261-262.)

b) *Cas général.* — Soit o le produit de N et considérons le produit o' qui lui est associé (voir (1.4)). U_n est un automorphisme du groupe (N, o'). D'après la partie *a*)

$$U_n(S'_n) = U_n(X_1 o' \ldots o' X_n) = U_n(X_1) o' \ldots o' U_n(X_n)$$

converge en loi ; la loi limite ne dépend que des moments d'ordre 2 de μ et c'est la loi au temps 1 d'un processus de diffusion sur $\mathbb{R}^m$.

Le théorème (3.1) résulte alors du lemme :

(3.5) LEMME. — *Avec les notations précédentes,* $U_n(S_n) - U_n(S'_n)$ *converge vers zéro dans* L^2.

Preuve. — Il faut prouver que

$$\delta_i = E[(x_i(U_n(S_n) - x_i(U_n(S'_n)))^2] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Considérons le produit cartésien $N^2 = N \times N$ muni du produit x défini par

$$(u_1, v_1) \times (u_2, v_2) = (u_1 o u_2, v_1 o' v_2)$$

(N^2, x) est un groupe nilpotent simplement connexe qui est le produit direct des groupes (N, o) et (N, o').

Désignons par $\tilde{p}$ la probabilité de transition sur N^2 associée à la loi du couple (X_1, X_1) ; c'est-à-dire $\tilde{p}f(u, v) = \int_N f(uox, vo'x)\mu(dx)$ (f fonction borélienne sur N^2).

Avec ces notations il vient, pour $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\delta_i = \frac{1}{n^{d_i}} E[(x_i(S_n) - x_i(S'_n))^2]$$

$$= \frac{1}{n^{d_i}} \tilde{p}^n A_i(0, 0)$$

où A_i est le polynôme sur N^2 défini par

$$(u, v) \to (x_i(u) - x_i(v))^2$$

Or nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{p}^n A_i &= ((\tilde{p} - I) + I)^n A_i \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k (\tilde{p} - I)^k A_i\end{aligned}$$

Comme le degré de A_i est égal à $2d_i$, d'après le lemme (2.6) nous avons

$$\tilde{p}^n A_i = \sum_{0 \leq k \leq d_i} C_n^k (\tilde{p} - I)^k A_i$$

et par suite

$$\frac{1}{n^{d_i}} \tilde{p}^n A_i(u, v) \to \frac{1}{(d_i)!} (\tilde{p} - I)^{d_i} A_i(u, v) \qquad (u \text{ et } v \in N)$$

Il nous reste donc à prouver que $(\tilde{p} - I)^{d_i} A_i = 0$. Or nous avons

$$(\tilde{p} - I)^{d_i} A_i(o, o) = \int \dots \int P(u_1, \dots, u_{d_i})(\mu - \varepsilon_0)(du_1) \dots (\mu - \varepsilon_0)(du_{d_i})$$

où

$$P(u_1, \dots, u_{d_i}) = (x_i(u_1 \mathrm{o} \dots \mathrm{o} u_{d_i}) - x_i(u_1 \mathrm{o}' \dots \mathrm{o}' u_{d_i}))^2$$

D'après la définition de o′, les monômes de degré (global) maximum (i. e. de degré d_i) de $x_i(u_1 \mathrm{o} \dots \mathrm{o} u_{d_i})$ sont les mêmes que ceux de $x_i(u_1 \mathrm{o}' \dots \mathrm{o}' u_{d_i})$; il s'ensuit donc que le degré de P est inférieur ou égal à $2(d_i - 1)$.

Soit $x^{\alpha_1}(u_1) \dots x^{\alpha_{d_i}}(u_{d_i})$ un monôme de $P(u_1, \dots, u_{d_i})$, $\alpha_j \in N^m$, pour $j \in \{ 1, \dots, d_i \}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\int \dots \int x^{\alpha_1}(u_1) \dots x^{\alpha_{d_i}}(u_{d_i})(\mu - \varepsilon_0)(du_1) \dots (\mu - \varepsilon_0)(du_{d_i}) \\ = \prod_{j=1}^{d_i} \int_N x^{\alpha_j}(u)(\mu - \varepsilon_0)(du)\,.\end{aligned}$$

Comme μ est centrée, pour que cette quantité soit non nulle il faut que $\| \alpha_j \| \geq 2, \forall j \in \{ 1, \dots, d_i \}$. Le degré de P étant inférieur ou égal à $2(d_i - 1)$, aucun monôme de P ne peut satisfaire cette condition. Nous avons donc $(\tilde{p} - I)^{d_i} A_i = 0$ et le lemme (3.5) est prouvé. ▲

Ceci termine la démonstration du théorème (3.1) dans le cas général. (Pour l'absolue continuité de ν, il suffit de remarquer que les mesures de Haar sur (N, o) et (N, o′) sont toutes deux égales à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.) ■

4. THÉORÈME CENTRAL LIMITE DANS LE CAS NON CENTRÉ

(4.1) THÉORÈME. — *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v. a. indépendantes à valeurs dans* N, *de même loi* μ *et ayant un moment d'ordre* $2r$. *Soit* $(N^i)_{1\leq i\leq r}$ *la série centrale descendante de* N. *Pour* $i \in \{1, \ldots, r\}$, *désignons par* m^i *un supplémentaire de* N^{i+1} *dans* N^i ; *nous avons* $N = \bigoplus_{i=1}^{r} m^i$. *Pour tout élément* u *de* N, *notons* $u^{(i)}$ *la composante de* u *sur* m^i *et posons, pour tout entier naturel* n *non nul,*

$$V_n(u) = \sum_{i=1}^{r} \frac{u^{(i)}}{n^{i-1/2}}.$$

— *Alors la variable aléatoire* $V_n(X_1 o \ldots o X_n - n\bar{X})$, (*où* $\bar{X}$ *désigne l'espérance de la v. a.* $X_1^{(1)}$) *converge en loi vers une v. a. gaussienne (au sens usuel sur* $\mathbb{R}^m$).

— *Si* μ *est apériodique, cette loi limite est non dégénérée ssi :*

$$\bigcup_{p=0}^{r-1} (ad\bar{X})^p(m^1) = N$$

Remarques. — 1) Si l'on suppose seulement l'existence d'un moment d'ordre 2, on peut montrer, comme pour le théorème (3.1), en utilisant des troncatures, que le résultat reste vrai.

2) Si μ est centrée, ce théorème est évidemment peu intéressant, par rapport au théorème (3.1). Si μ n'est pas centrée, la normalisation est trop forte dans certains cas comme le montre la dernière phrase du théorème. Pour une étude plus complète par une autre méthode, voir [*7 bis*].

Preuve. — Nous commençons par établir un lemme.

(4.2) LEMME. — *La suite de v. a.* $V_n(X_1 o \ldots o X_n) - V_n(X_1^{(1)} o' \ldots o' X_n^{(1)})$, *converge vers zéro dans* L^2.

Preuve du lemme. — Il nous faut prouver que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\delta_i = \frac{1}{n^{2d_i - 1}} \mathbb{E}\left[\left(x_i(X_1 o \ldots o X_n) - x_i(X_1^{(1)} o' \ldots o' X_n^{(1)})\right)^2\right],$$

tend vers zéro, quand n tend vers l'infini.

Soit (N^2, x) le produit direct des groupes (N, o) et (N, o'). Soit λ la loi du couple aléatoire $(X_1, X_1^{(1)})$, à valeurs dans N^2. Considérons sur N^2 le noyau de transition $\tilde{p}$ associé à λ ; c'est-à-dire

$$\tilde{p}f(x) = \int_{N^2} f(x \times y)\lambda(dy) \qquad (x \in N^2,\ f \text{ borélienne bornée sur } N^2)$$

ou encore

$$\tilde{p}f(u, v) = \int_N f(uox, vox^{(1)})\mu(dx) \qquad (u, v \in N).$$

En désignant par A_i le polynôme sur N^2 défini par

$$A_i(u, v) = (x_i(u) - x_i(v))^2 \qquad (u, v \in N),$$

nous avons alors, via le lemme (2.6),

$$\delta_i = \frac{1}{n^{2d_i - 1}} \tilde{p}^n A_i(0, 0) = \frac{1}{n^{2d_i - 1}} \sum_{1 \leq k \leq 2d_i} C_n^k(\tilde{p} - I)^k A_i(0, 0)$$

Mais $(\tilde{p} - I)^k A_i(0, 0) = \int \dots \int P(u_1, \dots, u_k)(\mu - \varepsilon_0)(du_1) \dots (\mu - \varepsilon_0)(du_k)$, avec $P(u_1, \dots, u_k) = (x_i(u_1 o \dots o u_k) - x_i(u_1^{(1)} o' \dots o' u_k^{(1)}))^2$. En outre si $x^{\alpha_1}(u_1) \dots x^{\alpha_k}(u_k)$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^m$, est un monôme de P, on a

$$\int \dots \int x^{\alpha_1}(u_1) \dots x^{\alpha_k}(u_k)(\mu - \varepsilon_0)(du_1) \dots (\mu - \varepsilon_0)(du_k)$$
$$\prod_{i=1}^{k} \int_N x^{\alpha_i}(u)(\mu - \varepsilon_0)(du)$$

et pour que cette quantité soit non nulle, il faut que $\| \alpha_i \| \geq 1$ pour tout $i \in \{ 1, \dots, k \}$.

Comme les monômes du polynôme $x_i(u_1 o \dots o u_k)$, de degré global $d_i (= d^0 x_i)$ et de degrés partiels 1 par rapport à chacune des variables u_i, $1 \leq i \leq k$, sont les mêmes que ceux du polynôme $x_i(u_1^{(1)} o' \dots o' u_k^{(1)})$, aucun monôme de P ne peut satisfaire la condition précédente pour $k = 2d_i - 1$ ou $2d_i$. On en déduit que $(\tilde{p} - I)^{2d_i} A_i = (\tilde{p} - I)^{2d_i - 1} A_i(0, 0) = 0$ et δ_i converge bien vers zéro quand n tend vers l'infini. ▲

D'après le lemme (4.2) il résulte qu'il suffit de prouver le théorème dans le cas où les v. a. X_i sont à valeurs dans m^1 et le crochet de Lie [,] de N vérifie $[m^p, m^q] \subset m^{p+q}$ (i. e. o = o').

Considérons alors les fonctions polynomiales sur N définies par, pour tout $n \in N^*$,

$$f_{j,i}^{(n)}(u) = x_i((j - 1)\bar{X} o u o (n - j)\bar{X}) \qquad (i \in \{ 1, \dots, m \},\ j \in \{ 1, \dots, n \}).$$

Si f est une fonction analytique sur N, on pose pour tout élément v de N

$$vf(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(uotv) - f(u)}{t} \qquad (u \in \mathrm{N}).$$

La formule de Campbell-Hausdorff s'écrit :

$$\mathrm{XoY} = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \frac{1}{2}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] + \frac{1}{12}[\mathrm{X}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]] - \frac{1}{12}[\mathrm{Y}, [\mathrm{Y}, \mathrm{X}]] + \dots ;$$

désignons par a_s le coefficient, dans cette formule, du crochet $(\mathrm{ad}\ \mathrm{Y})^{s-1}(\mathrm{X})$. $\left(\text{On a par exemple } a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{12}\right)$. Nous savons alors que le coefficient, dans cette même formule, du crochet $(\mathrm{ad}\ \mathrm{X})^{s-1}(\mathrm{Y})$ n'est autre que $(-1)^{s-1}a_s$. Il est alors facile de voir que l'on a, pour $d_i = d^0 x_i = s$,

$$vf_{j,i}^{(n)}(0) = \left(\sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} a_k a_{s+1-k} (j-1)^{k-1} (n-j)^{s-k} \right) x_i((\mathrm{ad}\ \bar{\mathrm{X}})^{s-1}(v)) \qquad (v \in m^1)$$

EXEMPLE. —

Pour $d_i = 1$ (i. e. $i \in \{1, \dots, p_1\}$) $\quad vf_{j,i}^{(n)}(0) = x_i(v) \qquad (v \in m^1)$

Pour $d_i = 2$ (i. e. $i \in \{p_1 + 1, \dots, p_2\}$)

$$vf_{j,i}^{(n)}(0) = \frac{n - 2j + 1}{2} x_i([v, \bar{\mathrm{X}}]) \qquad (v \in m^1)$$

Pour $d_i = 3$ (i. e. $i \in \{p_2 + 1, \dots, p_3\}$)

$$vf_{j,i}^{(n)}(0) = \frac{(n-j)^2 + (j-1)^2 - 3(n-j)(j-1)}{12} x_i([\bar{\mathrm{X}}, [\bar{\mathrm{X}}, v]]) \qquad (v \in m^1)$$

(4.3) REMARQUE. — Soit ψ_2 l'algèbre de Lie des matrices carrées (2, 2) triangulaires supérieures. $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont deux éléments de ψ_2 tels que $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = -\mathrm{B}$. Par suite, pour t suffisamment petit, nous avons d'après la formule de Campbell-Hausdorff.

$$t\mathrm{A}o\mathrm{B} = t\mathrm{A} + \left(\sum_{i \geq 1} a_i t^{i-1} \right) \mathrm{B}.$$

Or on voit facilement que $(\mathrm{Exp}\ t\mathrm{A})(\mathrm{Exp}\ \mathrm{B}) = \mathrm{Exp} \left(\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{t}{e^t - 1} \\ 0 & t \end{bmatrix} \right)$

On en déduit que l'on a

$$\sum_{i \geq 1} a_i t^{i-1} = \frac{t}{e^t - 1}$$

D'après ([9], p. 212) nous savons que

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{2S_{2n}}{4^n \pi^{2n}} t^{2n}$$

où $S_{2n} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{2n}}$. Il s'ensuit que l'on a

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \dfrac{2S_{2n}}{4^n \pi^{2n}} & \forall n \geq 1 \\ a_2 = -\dfrac{1}{2}, & a_{2n} = 0 & \forall n \geq 2 \end{cases}$$

D'autre part, on vérifie que l'on a

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^2 = (1 - t)\frac{t}{e^t - 1} - t\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)'.$$

D'où

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^2 = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \sum_1^\infty a_{2n+1} t^{2n+1} - \sum_1^\infty (2n - 1) a_{2n+1} t^{2n}.$$

$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^2$ étant aussi la somme de la série $\left\{\left(\sum_{k=1}^n a_k a_{n+1-k}\right) t^{n-1}\right\}_{n \geq 1}$ on en déduit que l'on a en posant $b_n = \sum_{k=1}^n a_k a_{n+1-k}$,

$$\begin{cases} b_1 = 1, \quad b_3 = \dfrac{1}{2}, \quad b_{2n+1} = -(2n - 1) a_{2n+1} & \forall n \geq 2 \\ b_2 = -1, \quad b_{2n+2} = -a_{2n+1} & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

(4.4) PROPOSITION. — *Si les v. a.* X_k, $k \geq 1$, *sont à valeurs dans* m^1 *et si les lois o et o′ coincident, alors pour tout* $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$x_i(V_n(S_n)) - \frac{1}{n^{d_i - 1/2}} \left(\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}) f_{j,i}^{(n)}(0)\right)$$

converge vers zéro dans L^2.

Preuve de la proposition. — Notons tout d'abord que pour $i \in \{1, \ldots, p_1\}$ la v. a. considérée est nulle et la proposition est trivialement vérifiée. Nous supposons donc que $i > p_1$.

Pour tout $s \in \{2, \ldots, r\}$, nous avons (grâce aux hypothèses faites)

$$(X_1 o \ldots o X_n)^{(s)} = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_s \leq n} \lambda_{i_1, \ldots, i_s}[X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{s-1}}, X_{i_s}] \ldots]].$$

Si nous désignons par C_1 un majorant des coefficients intervenant dans la formule de Campbell-Hausdorff pour un groupe nilpotent d'ordre r, nous avons

$$\sup_{1 \leq i_1, \ldots, i_s \leq n} | \lambda_{i_1, \ldots, i_s} | \leq C_0 = (\sup \{1, C_1\})^s.$$

Posons $X_i = X_i' + \bar{X}$, $i \geq 1$. Nous avons

$$[X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{s-1}}, X_{i_s}] \ldots]] = (\text{ad } \bar{X})^{s-1}(X_{i_s}') - (\text{ad } \bar{X})^{s-1}(X_{i_{s-1}}') + \sum_{k=0}^{s-2} S_{i_1, \ldots, i_s}^k,$$

où $S_{i_1, \ldots, i_s}^k$ est une somme d'au plus $\binom{s}{k}$ crochets dans lesquels figurent des v. a. X_i' et exactement k fois la v. a. $\bar{X}$.

Il est clair que l'on a

$$x_i\Big(\sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_s \leq n} \lambda_{i_1, \ldots, i_s}(\text{ad } \bar{X})^{s-1}(X_{i_s}' - X_{i_{s-1}}')\Big)_n = \sum_{j=1} X_j' f_{j,i}^{(n)}(0). \qquad (\text{rappel} : d_i = s)$$

Pour prouver la proposition, on est donc amené à prouver que :

$$\frac{1}{n^{s-1/2}} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_s \leq n} \lambda_{i_1, \ldots, i_s} \sum_{k=0}^{s-2} x_i(S_{i_1, \ldots, i_s}^k),$$

converge vers zéro dans L^2, pour tout $i \in \{p_{s-1} + 1, \ldots, p_s\}$; c'est-à-dire à montrer que

$$\delta_i(n) = \frac{1}{n^{2s-1}} \sum_{0 \leq k,l \leq s-2} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_s, j, \ldots, j_s \leq n} \lambda_{i_1, \ldots, i_s} \lambda_{j_1, \ldots, j_s} \mathbb{E}[x_i(S_{i_1, \ldots, i_s}^k) x_i(S_{j_1, \ldots, j_s}^l)]$$

converge vers zéro, quand n tend vers l'infini.

Or $x_i(S_{i_1, \ldots, i_s}^k)$ s'écrit $Q_i^k(X_{i_1}', \ldots, X_{i_s}')$, où Q_i^k est un polynôme à s variables de degré global $s - k$ et de degrés partiels ≤ 1. En outre le nombre de monômes de Q_i^k est inférieur ou égal à $2^{s-1}\binom{s}{k}$ et les coefficients de ces monômes sont majorés par λ^{s-1}, où λ désigne un majorant des constantes de structures.

Choisissons un monôme $A(u_1, \ldots, u_s; v_1, \ldots, v_s)$ du polynôme à $2s$ variables $Q_i^k(u_1, \ldots, u_s)\, Q_i^l(v_1, \ldots, v_s)$; A est de degré $s-k$ (resp. $s-l$) par rapport à l'ensemble des variables u_i, $1 \le i \le s$, (resp. v_i, $1 \le i \le s$). Quitte à permuter les variables, nous pouvons supposer que

$$A(u_1, \ldots, u_s; v_1, \ldots, v_s) = x^{\alpha_1}(u_1) \ldots x^{\alpha_{s-k}}(u_{s-k}) x^{\beta_1}(v_1) \ldots x^{\beta_{s-l}}(v_{s-l})$$

avec $\|\alpha_i\| = \|\beta_j\| = 1$, $i \in \{1, \ldots, s-k\}$, $j \in \{1, \ldots, s-l\}$.

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\gamma_i(n) = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_s \le n} & \lambda_{i_1, \ldots, i_s} \lambda_{j_1, \ldots, j_s} \mathbb{E}[A(X'_{i_1}, \ldots, X'_{i_s}; X'_{j_1}, \ldots, X'_{j_s})] \\ & \le C_0^2 \lambda^{s-1} n^{k+l} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_{s-k}, j_1, \ldots, j_{s-l} \le n} \\ & \mathbb{E}[x^{\alpha_1}(X'_{i_1}) \ldots x^{\alpha_{s-k}}(X'_{i_{s-k}}) x^{\beta_1}(X'_{j_1}) \ldots x^{\beta_{s-l}}(X'_{j_{s-l}})]\end{aligned}$$

Comme les v. a. X'_i sont centrées, pour que $\mathbb{E}[x^{\alpha_1}(X'_{i_1}) \ldots x^{\beta_{s-1}}(X'_{j_{s-l}})]$ soit non nul il faut que dans $\{i_1, \ldots, i_{s-k}, j_1, \ldots, j_{s-l}\}$ tout entier figure soit zéro fois, soit au moins deux fois. On en déduit que l'on a

$$\gamma_i(n) \le \gamma n^{k+l} n^{\frac{2s-(k+l)}{2}} = \gamma n^{\frac{2s+(k+l)}{2}},$$

où γ est une constante positive.

Par suite

$$\delta_i(n) \le \gamma' \frac{\displaystyle\sum_{0 \leqslant k,l \leqslant s-2} n^{\frac{2s+k+l}{2}}}{n^{2s-1}} \le \gamma' \frac{(s-2)^2}{n}$$

où γ' est une constante > 0. D'où le résultat. ▲

Soit $Y_{n,j}$ la v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\left(\frac{1}{n^{d_i-1/2}} X'_j f_{j,i}^{(n)}(0)\right)_{i \in \{1, \ldots, m\}}$. Pour terminer la démonstration du théorème (4.1), nous sommes amenés à prouver que la somme de v. a. indépendantes centrées à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $Y_{n+1} + \ldots + Y_{n,n}$, converge en loi vers une v. a. gaussienne. Pour cela il suffit de montrer que la condition de Lindeberg sur $\mathbb{R}^m$ est satisfaite ; i. e. que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{\|Y_{n,j}\| > \varepsilon} \| Y_{n,j} \|^2 d\mathbb{P} = 0$$

Or $Y_{n,j} = (\beta_{n,j,i} x_i(\mathrm{ad}^{d_i - 1}\ \bar{X}(X'_j)))_{i \in \{1,\ldots,m\}}$ où

$$\beta_{n,j,i} = \frac{1}{n^{d_i - 1/2}} \sum_{k=1}^{d_i} (-1)^{k-1} a_k a_{d_i+1-k} (j-1)^{k-1} (n-j)^{d_i - k}.$$

Posons $L = \sup_{1 \le k \le r} |a_k|$; nous avons $|\beta_{n,j,i}| \le \dfrac{L^2 d_i}{\sqrt{n}}$ et par suite

$$\| Y_{n,j} \| \le \frac{C}{\sqrt{n}} \| X'_j \|,$$

où C est une constante positive indépendante de n et de j. Il en résulte immédiatement que la condition de Lindeberg est satisfaite et la première assertion du théorème est démontrée.

Appelons ν la loi gaussienne limite sur $\mathbb{R}^m$. Pour $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m\}$ avec $d_{i_1} = p$ et $d_{i_2} = q$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} x_{i_1}(g) x_{i_2}(g) \nu(dg) \\
&\quad = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^{p-1/2}} X'_j f^{(n)}_{j,i_1}(0)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^{q-1/2}} X'_j f^{(n)}_{j,i_2}(0)\right)\right] \\
&\quad = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{p+q-1}} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X'_j f^{(n)}_{j,i_1}(0) X'_j f^{(n)}_{j,i_2}(0)]
\end{aligned}$$

(car les v. a. X_k, $k \ge 1$ sont centrées)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} (-1)^{k+l-2} a_k a_{p+1-k} a_l a_{q+1-l} \\
&\cdot \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{p+q-1}} \sum_{j=1}^{n} (j-1)^{k+l-2} (n-j)^{p+q-(k+l)}\right) \\
&\cdot\ \mathbb{E}[x_{i_1}(\mathrm{ad}^{p-1}\ \bar{X}(X'_j)) x_{i_2}(\mathrm{ad}^{q-1}\ \bar{X}(X'_j))] \\
&= \alpha_{i_1,i_2} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} (-1)^{k+l-2} a_k a_{p+1-k} a_l a_{q+1-l} \left(\int_0^1 t^{k+l-2} (1-t)^{p+q-(k+l)} dt\right) \\
&= \alpha_{i_1,i_2} \left(\int_0^1 \beta_p(t) \beta_q(t) dt\right),
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha_{i_1,i_2} = \mathbb{E}[x_{i_1}(\mathrm{ad}^{p-1}\,\bar{X}(X'_1))x_{i_2}(\mathrm{ad}^{q-1}\,\bar{X}(X'_1))]$ et pour tout entier s

$$\beta_s(t) = \sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}a_k a_{s+1-k}t^{k-1}(1-t)^{s-k}.$$

D'après la remarque (4.3), pour tout entier s, β_s est un polynôme de degré $s-1$, vérifiant $\beta_s(1-t) = (-1)^s\beta_s(t)$. De plus pour s pair nous avons

$$\beta_s(t) = \frac{1}{2}a_{s-1}[t(1-t)^{s-2} - t^{s-2}(1-t)].$$

Il en résulte que $\int_0^1 \beta_p(t)\beta_q(t)dt = 0$ si $p+q$ est impair, autrement dit

$$\int_{\mathbb{R}^m} x_{i_1}(g)x_{i_2}(g)\nu(dg) = 0 \qquad \text{si } d_{i_1} - d_{i_2} \text{ est impair}.$$

D'autre part, soit $\gamma = (\gamma_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ un élément de $\mathbb{R}^m$. Nous avons

$$\sum_{1\le i_1,i_2\le m} \gamma_{i_1}\left(\int_{\mathbb{R}^m} x_{i_1}(g)x_{i_2}(g)\nu(dg)\right)\gamma_{i_2} = \mathbb{E}\left[\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i x_i(\mathrm{ad}^{d_i-1}\,\bar{X}(X'_1))\beta_{d_i}(t)\right)^2 dt\right]$$

Par suite, la loi ν est dégénérée si, et seulement si, il existe

$$\gamma = (\gamma_i)_{1\le i\le m} \in \mathbb{R}^m - \{0\}$$

tel que, $\mathbb{P}$-p. s.

$$\sum_{i=1}^{m}\gamma_i x_i(\mathrm{ad}^{d_i-1}\,\bar{X}(X'_1))\beta_{d_i}(t) = 0 \qquad \forall t\in[0,1],$$

c'est-à-dire aussi

$$\sum_{k=1}^{p_1} x_k(X'_1)\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i x_i(\mathrm{ad}^{d_i-1}\,\bar{X}(e_k))\beta_{d_i}(t)\right) = 0 \qquad \forall t\in[0,1].$$

Comme μ est apériodique cette condition équivaut à

$$\sum_{i=1}^{m}\gamma_i x_i(\mathrm{ad}^{d_i-1}\,\bar{X}(e_k))\beta_{d_i}(t) = 0 \qquad \forall t\in[0,1], \quad \forall k\in 1,\dots,p_1$$

car sinon μ serait portée par un sous-groupe fermé de N, de la forme $\left\{g\in \mathrm{N}, \sum_{1}^{p_1}\alpha_k x_k(g) = 0\right\}$, où $\alpha_k (1\le k\le p_1)$, sont des réels non tous nuls.

D'autre part, nous savons que β_s est un polynôme de degré $s - 1$, pour tout entier naturel s. La loi ν est alors dégénérée si, et seulement si, il existe $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^m - \{ 0 \}$ tel que

$$\forall s \in \{ 1, \ldots, r \} \qquad \sum_{i = p_{s-1} + 1}^{p_s} \gamma_i x_i(\mathrm{ad}^{s-1} \bar{\mathrm{X}}(m^1)) = 0 .$$

Autrement dit ν est dégénérée si et seulement si $\bigcup_{s=1}^{r} \mathrm{ad}^{s-1} \bar{\mathrm{X}}(m^1) \neq \mathrm{N}$. Le théorème (4.1) est démontré. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Crépel, A. Raugi, « Théorème central limite sur les groupes nilpotents », *C. R. Acad. Sci.*, t. **281**, 13/10/1975, p. 605-608.

[2] P. Crépel, B. Roynette, « Une loi du logarithme itéré sur le groupe de Heisenberg ». *Zeit. für Wahr.*, t. **39**, 1977, p. 217-229.

[3] M. Duflo, *Semi-groupes de mesures complexes sur un groupe de Lie* (à paraître).

[4] Y. Guivarc'h, *Loi des grands nombres sur les groupes.* Séminaires de l'Université de Rennes, 1976.

[5] H. Hennion, *Théorème central limite et théorème central limite fonctionnel sur un groupe de Lie nilpotent.* Séminaires de l'Université de Rennes, 1975.

[6] T. G. Kurtz, « Extensions of Trotter's operator semigroup approximation theorems ». *Journ. of Funct. Anal.*, 1969.

[7] A. Raugi, *Fonctions harmoniques sur les groupes localement compacts a base dénombrable.* Bull. Soc. Math. France, Mémoire 54, 1977.

[7 *bis*] A. Raugi, « Théorème de la limite centrale sur les groupes de Lie nilpotents » dans *Zeit. für Wahr.*

[8] V. N. Tutubalin, *Composition of measures on the simplest nilpotent group.* Th. of Proba IX n° 3, 1964.

[9] G. Valiron, *Théorie des fonctions.* Masson, 1942.

[10] A. D. Virtser, *Limit theorems for composition of distribution on certain nilpotent Lie groups.* Th. of Proba. XIX n° 1, 1974, p. 86-105.

[11] D. Wehn, « Some remarks on Gaussian distributions on a Lie group ». *Zeit. für Wahr.*, t. **30**, 1974, p. 255-263.

(Manuscrit reçu le 10 novembre 1977)