

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Sur la comparaison d'une mesure μ dans un espace vectoriel X avec ses translatées

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, n° 1 (1978), p. 61-83

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_1_61_0

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la comparaison d'une mesure μ dans un espace vectoriel X avec ses translatées

par

A. TORTRAT

Laboratoire de calcul des probabilités de l'Université, Paris VI

RÉSUMÉ. — Nous étudions l'espace E_D de Dudley, des conditions pour que $a \in E_D$, pour que E_D soit plus petit que X , voire μ -nul, des familles d'espaces vectoriels de séparation de μ et μ_a , leur comportement par convolution et pour un demi-groupe μ^t . Nous présentons et étendons les résultats connus du « cas produit », étudions les mélanges d'homothétiques de μ , le décentrage de l'espace autoreproduisant, le prolongement par τ -régularité de la décomposition de Lebesgue de μ_a par rapport à μ .

SUMMARY. — We study the Dudley's space E_D , conditions for $a \in E_D$ or E_D being strictly less than X or even $\mu E_D = 0$, families of linear spaces E separating μ and μ_a , the effect on them of convolution and their aspect in the case of the semi-group μ^t . We present and improve results of the « product case », study scale mixtures, decentering of the autoreproducing space, and prolongation of the Lebesgue decomposition of μ_a relatively to μ .

INTRODUCTION

Ce travail est, très partiellement, une synthèse sur le sujet (cf. également [3']). Nous mettons, jusqu'au § 5, l'accent dans le cas où a est un point de singularité ($\mu_a \perp \mu$) sur les familles de séparation \mathcal{G}, \mathcal{E} (de groupes G ou espaces vectoriels E dont un translaté est « plein » pour μ), sur des

conditions de continuité de $a(y)$ pour la « topologie de Dudley », \mathcal{C}^0 , plus faibles que $\mu_a \ll \mu$, ou même que l'uniforme absolue continuité (U. A. C.) des μ_{ay} p. r. aux μ_y , uniforme aussi en y (μ_y loi de (y, x) , y décrit le dual Y de X). Un point important est que dans un espace de Banach il existe toujours des $a(y)$ non \mathcal{C}^0 -continues, donc jamais de lois scalairement quasi-invariantes ⁽¹⁾. Cela étend mais seulement dans ce cas (X de Banach) le théorème de Sudakov (cf. [11']) : sur la tribu cylindrique de X en dualité avec Y de dimension infinie (X non nécessairement localement convexe), il n'existe pas de loi quasi-invariante ($\mu_a \ll \mu$ pour tout a de X , donc $\mu_a \sim \mu$), ni même de loi μ telle que tout disque C mesurable μ -positif soit absorbant ($\cup nC = X$, C absolument convexe).

Les § 3 et 4 présentent les applications du critère de Kakutani et d'un critère de Dudley dans le cas d'une loi produit (seul cas de dichotomie connu hors celui des mélanges d'homothétiques d'une même loi gaussienne, examiné aux § 7 et 8), dans des conditions élargies. Le § 5 étudie l'effet de la convolution sur \mathcal{G} et \mathcal{E} , et le cas de μ indéfiniment divisible.

Le § 6 concerne \mathcal{C}^0 pour $\hat{\mu}(y) = \int \phi(t \|y\|) \nu(dt)$ pour une semi-norme $\|y\|$ quelconque. Les § 7 et 8 étudient les lois hilbertiennes isotropes (simplifiant la preuve d'un théorème de Linde). Le § 9 prouve une propriété annoncée dans [13], concernant l'effet d'une translation sur l'espace autoreproduisant, et le § 10 précise une affirmation de prolongement de décomposition de Lebesgue du même texte.

1. Préliminaires

Soit X un espace vectoriel réel en dualité algébrique avec Y . Y définit dans X l'algèbre cylindrique \mathcal{A} , et la tribu cylindrique \mathcal{C} .

Soit μ une loi (de probabilité) sur \mathcal{C} . Nous comparons μ avec μ_a traduite de μ par $a \in X$ ($\mu_a A = \mu(A - a)$), μ_a est la loi de $\zeta + a$ si ζ est une v. à. de loi μ .

Rappelons que quelle que soit la topologie localement convexe \mathcal{C} plus fine que la topologie faible $\sigma(X, Y)$, ayant une base de voisinages U , \mathcal{C} -ouverts, de 0, qui $\in \mathcal{B}_\sigma$, la décomposition de Lebesgue de μ_a par rapport à μ , vaut également pour la tribu \mathcal{C} -borélienne \mathcal{B} , si μ a un prolongement τ -régulier (pour \mathcal{C}) à \mathcal{B} (cf. le § 10 pour quelques compléments aux lemmes 1

⁽¹⁾ Au sens de l'U. A. C. susdite (définition de [3']), résultat obtenu parallèlement dans [3'] où l'on trouvera de nombreux autres résultats. Cela n'épuise pas la question, cf. la remarque 4.

et 3 de [13]). Le caractère localement convexe de \mathcal{C} n'intervient d'ailleurs pas si a est un point de dichotomie pour μ et \mathcal{C} , si l'on a (pour \mathcal{C}) $\mu_a \perp \mu$ ou $\mu_a \ll \mu$. Il intervient au contraire pour affirmer que sur \mathcal{B} il n'y a pas d'autres points de dichotomie que sur \mathcal{C} .

Remarque 1. — Si μ est seulement une probabilité cylindrique, c'est une vraie loi, P , sur la tribu \mathcal{B}^T (\mathcal{B} tribu borélienne de la droite réelle \mathbf{R}) dans \mathbf{R}^T , T étant une base algébrique de Y . La comparaison de P_a et P , sur \mathcal{B}^T ou $\mathcal{B}(\mathbf{R}^T)$ qui ont pour traces respectives \mathcal{C} et \mathcal{B}_σ sur X , remplace avantageusement celle de μ_a et μ . Mais lorsque μ est seulement cylindrique, seule se transporte dans X la propriété $P_a \ll P$, sous la forme de l'U. A. C. de μ_a par rapport à μ , sur \mathcal{A} .

PROPOSITION 1. — S'il existe dans Y une suite y_n à combinaisons linéaires (finies) séquentiellement denses pour $\sigma(Y, X)$ — et séparant les points de X —, en particulier si (X, σ) possède une base de Schauder $\{e_n\}$ à coordonnées continues, il suffit d'étudier les translatéés P_a de la loi P induite par μ dans \mathbf{R}^∞

(par $x \rightarrow \prod_1^\infty y_n(x)$), sur la tribu produit \mathcal{B}^∞ dont la trace sur X est \mathcal{C} .

Preuve. — Elle est la même qu'avec \mathbf{R}^T . Supposons μ σ -additive sur \mathcal{C} , et

$$a \in X, \quad P_a = P_{as} + P_{ac}, \quad P_{as} \perp P, \quad dP_{ac}/dP = f(x).$$

Vu $P_a^*X = P^*X = 1$, P_{as} et P_{ac} ont des traces (de même variation totale) sur X . Si S est un support, P -nul, de P_{as} , $S \cap X$ en est un, μ -nul, de la trace de P_{as} , et la restriction de f à X est la densité p. r. à μ de la trace de P_{ac} .

Si $\{e_n\}$ est la base susdite, on a

$$(1) \quad y(x) = \lim \sum_1^N y(e_n) y_n(x).$$

y_n est une base, pour $\sigma(Y, X)$, de Y , car les coefficients d'un développement

$y = \sum_1^\infty c_n y_n$ sont uniques ($y_n(e_m) = \delta_{mn}$ suit de l'unicité des coordonnées

de x , et entraîne $c_n = y(e_n)$).

Lorsque μ est seulement cylindrique, seule se transportera alors dans X , la propriété $P_a \ll \mu$, sous la forme de l'uniforme absolue continuité de μ_a p. r. à μ , sur l'algèbre engendrée par les y_n (comparer avec la remarque 1).

2. Familles de séparation de μ et μ_a

Nous noterons \mathcal{C}^0 la topologie (métrisable) induite dans Y par la convergence en mesure (pour μ) des $y(\cdot)$. Cette topologie est définie même si μ est cylindrique (c'est la même que celle relative à P , pour Y en dualité avec R^T).

LEMME 1. — *Tout groupe (additif) G ayant un translaté $G - b$ plein ($: \mu(G - b) = 1$ (²)) est tel que $\mu_a \perp \mu$ pour tout $a \in G$.*

En effet $G - b$ et $G - b - a$ sont disjoints si et seulement si $a \notin G$.

Remarque 2. — Pour une loi symétrique ou seulement centrée, et G vectoriel, on aura toujours $G - b = G$ et il sera inutile d'envisager autre chose que des G pleins. Mais pour un groupe G on peut avoir $2b \in G$ et $b \notin G$, soit $G - b = G + b$, donc $G - b$ disjoint de G et plein.

Notations. — D et M désigneront les domaines de singularité ($: a \in D \Rightarrow \mu_a \perp \mu$) et d'absolue continuité ($a \in M \Rightarrow \mu_a \ll \mu$) de μ_a p. r. μ . \mathcal{E} et \mathcal{G} les ensembles de (sous-espaces) vectoriels E , ou (sous-)groupes additifs G ayant un translaté plein. Il est clair qu'on a

$$(2) \quad E_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\mathcal{E}} E \supset G_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\mathcal{G}} G \supset D^c.$$

Dudley a le premier caractérisé une partie de D , à savoir l'ensemble des a tels que $a(y)$ ne soit pas continue pour \mathcal{C}^0 . Nous étendrons légèrement cette définition en posant

$$(2') \quad E'_0 = \bigcap_{\mathcal{E}'} E, \quad \mathcal{E}' = \{ E : \mu_a E = 1 \text{ pour un } a \\ \text{et } E = \{ x = y_l(x) \rightarrow 0 \}, \text{ une suite } y_l \text{ de } Y \}$$

$$(2'') \quad E_D = \bigcap_{\mathcal{E}_D} E, \quad \mathcal{E}_D \text{ étant la partie de } \mathcal{E}' \text{ pour laquelle } a = 0.$$

E'_0 est un espace vectoriel qui contient D^c , et comme E_0, G_0 , est le même pour toutes les translatées de μ . On a $E_D \supset E'_0$.

LEMME 2. — *Tout sous-espace E de convergence d'une suite y_n convergeant en μ -mesure vers $\hat{y} \in \hat{Y}$ complété de Y pour \mathcal{C}^0 , est une intersection (en général non dénombrable) de $E' \in \mathcal{E}_D$, donc $E \supset E_D$. En particulier on a $\mu_{E_D} < 1$ s'il existe une suite y_n convergeant en mesure et non p. s.*

(²) G donc $G - b$ sont bien sûr supposés appartenir à une des tribus, éventuellement complétées, sur lesquelles μ est une loi.

Preuve. — Toute double sous-suite fournit $y'_k = y_{nk} - y_{nk}$ qui converge en mesure vers 0 et partout sur E; et tout x hors de E est hors d'un E' de ce type $\{x : y''_k \rightarrow 0\}$, qui $\in \mathcal{E}_D$ et $\supset E$ (choisir $|y'_k| \geq \eta > 0$ et en extraire $y''_k \rightarrow 0$ p. s.).

Ceci montre que les vectoriels E (liés à un $\hat{y} \in \hat{Y} - Y$) ne nous donnent pas d'autres points de D que ceux de E_D^c . Plus généralement on a

PROPOSITION 2. — Soit μ une loi sur \mathcal{B}_σ . Tout vectoriel E, plein, réunion d'une suite croissante C_n de disques fermés (disque = partie absolument convexe), est intersection de $E' \in \mathcal{E}_D$. Réciproquement tout E' de \mathcal{E}_D contient un tel E, E_D est l'intersection de tous ces E.

Preuve. — Nous empruntons un argument au théorème 2.1 de Borell (cf. [I]), où l'auteur suppose (en fait) μ de Radon dans X quasi-complet et localement convexe : on peut supposer les C_n tels que $C_n \supset 2C_{n-1}$. Si $a \notin E$, il existe $y_n(a) = 1 > \sup_{C_n} |y_n(x)|$. Alors $y_n \rightarrow 0$ sur $\cup C_n$ donc sur un E' de \mathcal{E}_D et ne contenant pas a.

La réciproque suit de la remarque plus générale ci-après.

Remarque 3. — Soit μ une loi \mathcal{B}_σ , et $y_n \xrightarrow{p.s.} \hat{y}$ comme au lemme 2. On peut symétriser, convexifier et fermer, des A_j de convergence uniforme de la suite $y_n(A_j \uparrow)$, obtenant des C_j équilibrés et E plein = $\lim \uparrow C_j$, tels que $L(x) = \lim y_n$ existe sur E, et soit continue sur chaque C_j (pour σ). On voit comme dans [II], p. 18, que si à $\hat{y}_n \xrightarrow{p.s.} \hat{y}$ on associe des E_n et $L_n(x)$ (comme précédemment pour \hat{y}), le vectoriel de convergence de la suite L_n contient une réunion (pleine) de $C_n \uparrow$, donc, suivant la proposition 2, contient un E' de \mathcal{E}_D . Ainsi nous n'obtenons pas d'autres a de D que ceux de E_D^c . Dans [I], C. Borell considère (sous l'hypothèse susdite) la famille des E_{-a} de (2') qui sont « Lusin-mesurables », et nomme leur intersection, qui égale E'_0 à une translation près ⁽³⁾, « Lusin affine kernel ». E_D est un remplaçant naturel de l'espace auto-reproduisant (cf. (7) et la remarque 4). E_D est dense dans le support linéaire topologique S de μ (supposant $\mu^*_S = 1$, soit X réductible pour μ , cf. [I4], p. 29), si μ est scalairement concentrée suivant des disques faiblement compacts (le raisonnement est classique — cf. [I], [3'], [I3'] — : sinon il y aurait y de Y, nulle sur E_D et $\neq 0$ dans Y donc au sens de \mathcal{C}^0 , contredisant le fait que $\tau(Y, X)$ étant aussi fine que \mathcal{C}^0 , le dual de (Y, \mathcal{C}^0) est dans X, égale E_D). Mais nous n'affirmons rien de tel pour E'_0, E_0, G_0 , qui pourraient être vides.

⁽³⁾ Suivant la proposition 2, si ce noyau \mathcal{A}_L est non vide (si $0 \in \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_L = E_D$) : alors on peut prendre dans (2') — $a = b \in \mathcal{A}_L$, indépendant de E, d'où $\mathcal{A}_L - b = E_D(\mu_{-b}) = E'_0(\mu)$. « Lusin-mesurable » est entendu avec la restriction « compact convexe ».

PROPOSITION 3. — Si a étant donné, il existe δ et $n > 0$ tels que tous les ensembles cylindriques de dimension 1 de type $\{x : |y(\cdot)| \geq t\} = A_t(y)$ (t et y variant) vérifient

$$(3) \quad \mu A_1 < \delta \Rightarrow \mu_a A_n < 1 - \delta \quad (\text{un } \delta, \text{ un } n \text{ indépendants de } y).$$

Alors $a \in E_D : |a(\cdot)|$ est bornée par $n + 1$ dans le voisinage

$$W_\delta = \{y : \mu_y \{ |t| > 1 \} < \delta\}.$$

Réciproquement si $|a(\cdot)|$ est $\leq n - 1$ dans W_δ , on a $\mu_a A_n \leq \mu A_1$ si $\mu A_1 < \delta$. En particulier (3) est nécessaire et suffisant (pour que $a \in E_D$) pour tous les $\delta \leq 1/2$ et assez petits pour que $a(\cdot)$ soit bornée dans W_δ .

Preuve. — Si en effet $|a(y)|$ est $> n + 1$ (si $a(y) < -n - 1$, changer y en $-y$), on a, posant $\Delta = [a(y) - n, a(y) + n] : \Delta$ ne coupe pas $[-1, 1]$ donc $\mu_y \Delta^c = \mu_a A_n \geq \mu A_1^c > 1 - \delta$ alors que $y \in W_\delta$ équivaut à $\mu A_1 < \delta$, cela contredit (3).

Réciproquement si $|a(y)| \leq n - 1$ dans W_δ , on a $\Delta \supset [-1, 1]$ donc $\mu_a A_n = \mu_y \Delta^c \leq \mu A_1$ si $\mu A_1 < \delta$. Exprimés en termes de jauges $J_{a\delta}$ et J_δ relatives à μ_{ay} et μ_y , pour $J_\delta(y) = \inf \{t : \mu A_t(y) \leq \delta\}$, on obtient que $J_{a\delta} \leq n_\delta J_\delta$ (pour tout δ assez petit) est nécessaire à $a \in E_D$, et que $J_{a, 1-\delta} \leq n'_\delta J_\delta$, pour un δ , est suffisant. Comme J_δ croît avec $1/\delta$, *a fortiori* $J_{a, 1/2} \leq n_\delta J_\delta$ est nécessaire (pour tout δ assez petit) et suffisant (un δ) si ce δ est $\geq 1/2$ (comparer avec [3']).

COROLLAIRE. — Si E sous-espace vectoriel de X est tel que tout a de E satisfait à (3), en particulier si μ est, sur E , en dualité avec Y , scalairement quasi-invariante (ou, *a fortiori*, quasi-invariante, au sens de [6] [7]) : tout cylindre de dimension 1 vérifie $\mu A < \delta \Rightarrow \mu_a A < \eta$ pour tout $\eta > 0$ et $\delta(a, \eta)$, alors $E \subset E_D$.

LEMME 3. — Il est équivalent, concernant E vectoriel dans X (et μ cylindrique donnée), que

- i) $E \subset E_D$ ou
- ii) \mathcal{C}^0 est plus fine (au sens large) que $\sigma(Y, E)$.

Preuve. — Il est clair que si $a \in E - E_D$, $a(y)$ est continue pour σ et non pour $\mathcal{C}^0 : ii) \Rightarrow i)$.

Réciproquement si \mathcal{C}^0 n'est pas aussi fine que $\sigma(Y, E)$, il existe un $V = \{y : |y(x_i)| < \varepsilon, \text{ tout } x_i \in I \text{ fini } \subset E\}$, hors duquel tout \mathcal{C}^0 -voisinage possède au moins un point. On a donc une suite $y_n \xrightarrow{\mathcal{C}^0} 0$, avec un des $|y_n(x_i)| \geq \varepsilon$: un de ces x_i est hors de E_D .

LEMME 3'. — Supposons que E , quasi complet pour une certaine topologie, se plonge continûment dans (X, \mathcal{C}) . Alors si \mathcal{C}^0 , topologie dans Y relative à μ cylindrique, est plus fine (au sens large) que $\sigma(Y, E)$, elle l'est également pour la topologie dans Y définie par les polaires B^0 des disques bornés B de E . C'est dire que μ est de cotype 0 pour cette topologie (par définition du cotype).

Preuve. — Fermant les B dans E (ce qui ne change pas B^0), chaque $\cup nB = E_B$ est un espace de Banach pour la norme $p_B(\cdot)$. Soit $y_n \xrightarrow{\mu} 0$. Par hypothèse $\{y_n(x)\}$ est borné pour chaque x de E_B . Le théorème de la borne uniforme assure que $\{\sup_B |y_n(x)|\}$ est aussi borné. Mais si $|y_n|$ désigne une distance à 0 pour \mathcal{C}^0 , $y'_n = y_n/|y_n|$ tend aussi en mesure vers 0, donc les $p_{B^0}(y_n) = |y_n| p_{B^0}(y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

LEMME 3''. — Soit μ une probabilité cylindrique sur X espace normé de dimension infinie, qui induise $\hat{\mu}$ σ -additive sur le Banach \hat{X} complété de X , alors il existe une suite $y_n \xrightarrow{\mu} 0$, telle que $\|y_n\| \rightarrow 0$ (la norme $\|\cdot\|$ du dual commun à X et \hat{X}). En particulier X ne possède aucune loi (sur la tribu borélienne) qui soit de cotype 0 (4).

Preuve. — Soit K une partie précompacte de X . Il existe des y de norme 1, arbitrairement petites sur K . En effet si les boules $\varepsilon B + x_i$, $i \in I$ fini (B boule unité ouverte de X) recouvrent K , il existe une y de norme 1 nulle en chaque x_i (si X est de dimension infinie), donc $< \varepsilon$ sur K . L'hypothèse faite sur μ assure l'existence d'un K tel que $\hat{\mu}K < 1 - \varepsilon$, donc celle de y de norme 1 arbitrairement petites en probabilité (nous supposons $\hat{\mu}$ « portée » par une partie séparable, donc de Radon ce qui est admissible, cf. la note (3) de [12]).

THÉORÈME 0. — Dans un espace de Banach X (de dimension infinie), l'espace E_D relatif à une loi μ (de Radon) est toujours strictement plus petit que X . Cela implique que la condition (3) de la proposition 3 n'est vérifiée, pour au moins un point de X , par aucun couple (δ, n) .

La preuve résulte des lemmes 3, 3' (avec $X = E = E_B$) et 3'', puis de la proposition 3.

Remarque 4. — Il est tentant d'affirmer le résultat plus fort : $\mu E_D < 1$, puisque suivant le lemme 2, il suffit d'une suite y_n convergent en mesure et

(4) Cf. dans [3'] une preuve moins directe de ce lemme ainsi qu'une formulation plus générale du lemme 3'.

non p. s. pour l'assurer (alors pourquoi pas $\mu E_0 = 0$). On voit aisément que si cette propriété valait dans l'espace \mathbb{R}^∞ elle vaudrait dans tout X , pour μ loi sur \mathcal{C} ! Paraît donc intéressant le problème « quels sont les espaces X où (pour toute loi μ) la convergence en mesure d'une suite de y_n du dual, n'implique pas la convergence p. s.? ». Cette propriété ne devrait-elle pas être la règle?, ou se peut-il, au contraire qu'il n'y ait pas de tels espaces?

Des résultats du même type que le lemme 3' ont été obtenus par Koshi et Kakahashi, Linde, Borell, nous en donnons une synthèse élargie dans la proposition qui suit.

PROPOSITION 4. — Soit μ une probabilité cylindrique dans X , et E plongé continûment dans X , un espace métrique, de 2^e catégorie (non nécessairement localement convexe), de topologie définie par la base $U_i \downarrow \{0\}$ d'ouverts équilibrés ($i = 1, 2, \dots$).

i) Si pour tout a fixé $\in E$, μ satisfait à (3) avec δ et k dépendant de a , alors

$$(4) \quad y_n \xrightarrow{\tau_0} 0 \Rightarrow y_n \rightarrow 0$$

au sens d'une des semi-normes $p_i(y) = \sup_{U_i} y(\cdot)$.

ii) Pour tout $r > 0$ fixé, on a une constante C et un i tels que

$$(5) \quad p_i(y) \leq C \|y\|_r, \quad \text{tout } y, \quad \|y\|_r^r = \int_X |y(x)|^r d\mu \quad \text{fini ou infini.}$$

Preuve. — Puisque l'hypothèse entraîne suivant la proposition 3 que $a(y_n) \rightarrow 0$ pour tout a de E , la preuve de i) suit de la même application du théorème de la borne uniforme qu'au lemme 3'.

Pour prouver ii) il faut (suivant [6]) constater tout d'abord que $\|y\|_r = 0 \Rightarrow$ chaque $p_n(y) = 0$.

(3) implique en effet, pour $A = \{x : y(x) = 0\}$, vu

$$\mu A_i(y) = 0 \Rightarrow \mu_{a_{ik}} A(y) \leq 1 - \delta \Rightarrow \mu_a A(y) \geq \delta,$$

que $A - a$ coupe $A : a \in A$, c'est $E \subset A$, y est identiquement nulle sur E . Dire qu'il existe des y contredisant (5) pour tout i , équivaut (vu $p_i \uparrow$ avec i) à dire qu'il existe des y_n (qu'on peut choisir de $\|\cdot\|_r$ égales à 1) avec $p_n(y_n) \geq n$. Alors les $\tilde{y}_n = y_n/\sqrt{n}$ contredisent (4).

Ce qui précède (la proposition 3) montre que M doit être en général beaucoup plus petit que E_D . Au paragraphe qui suit nous rencontrerons des exemples de ce fait, ainsi que de $\mu E_D = 0$. Signalons auparavant l'intérêt de [16], en particulier que pour toute loi stable, M est un cône, et vectoriel si μ est symétrique.

3. Cas où P est une loi produit dans \mathbb{R}^∞

Considérons tout d'abord le cas où les v. a. coordonnées ξ_i égalent en loi, à une translation près, les homothétiques λ_i d'une même loi ξ .

LEMME 4. — Si ξ admet une variance σ^2 (prenons $\sigma^2 = 1$), et si $\xi_i \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda_i \xi$, E_D égale l'espace autoreproduisant centré ($\lambda_i^2 = \text{var } \xi_i$)

$$(6) \quad H = \{ a = \{ a_i \} : \sum (a_i/\lambda_i)^2 < \infty \},$$

et

$$(6') \quad PH = 0.$$

Preuve. — Soit $y_n = \sum_{i \in I_n} u_{ni} \xi_i$, $u'_{ni} = \lambda_i u_{ni}$, et $\varphi(t)$ la f. c. de la loi de ξ .

Si $y_n \xrightarrow{\mathcal{C}^0} 0$, $\phi_n = \prod_{i \in I_n} \varphi(u'_{ni} t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, uniformément sur $|t| \leq T$.

Les u'_{ni} doivent, *a fortiori*, être uniformément petits, alors ϕ_n équivaut, lorsque $n \rightarrow \infty$, à $e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{i \in I_n} u_{ni}^2}$. Ainsi \mathcal{C}^0 équivaut à la topologie en moyenne quadratique, et la \mathcal{C}^0 -continuité de $a(y)$ à $a \in H$, défini par (6) puisque $(y^{(i)}(x) = \text{la coordonnée } x_i)$,

$$y = \sum u_i y^{(i)} \Rightarrow a(y) = \sum \frac{a_i}{\lambda_i} u'_i, \quad \|y\|_2 = \sum u_i'^2.$$

Que $PH = 0$ se vérifie facilement, mais est un cas particulier de la proposition 6 ci-après.

Remarque 5. — Si au contraire la f. c. de ξ est $e^{-|t|^\alpha}$, $0 < \alpha < 2$, on a

$$(7) \quad E_D = \left\{ \begin{array}{l} \{ a : \sup |a_i/\lambda_i| < \infty \}, \quad \alpha \leq 1, \\ \{ a : \sum |a_i/\lambda_i|^\beta < \infty \}, \quad \alpha > 1, \quad 1/\alpha + 1/\beta = 1 \end{array} \right.$$

donc $E_D > H$ défini par (6).

On est, suivant le théorème de Kakutani, dans un cas de dichotomie assurée : $D^c = M$. De plus on a (lemme 4) $D \supset H^c$ (sans condition) et, suivant [9], $M = H$ dès que la loi de ξ a une formation I de Fisher finie : admet une densité $p(x) > 0$, localement absolument continue et telle que

$I = \int p'^2/p dx < \infty$ ($p' = dp/dx$). C'est le cas pour les lois stables symétriques. On peut déduire en effet de [15] et [15'] que, alors p'/p est continue et bornée sur \mathbb{R} ($p(x)$ est partout > 0 et, comme $\text{Log } p(x)$, partout indéfiniment dérivable).

Dudley (cf. [4]) a simplifié la preuve de $D \supset H^c$ en imposant seulement (les ξ_i n'obéissant plus à un même type de loi) que les concentrations $Q_i(l)$ des lois des ξ_i/λ_i soient minimisées pour un l : $\inf(Q_i(l)) > 0$.

La méthode de [4] prouve que la séparation (par $PA = 1$, $P_a A = 0$) de P_a et P est réalisée par $A = \psi^{-1}(E + b)$, où ψ est l'application qui après division de la coordonnée x_i par $\sup(\lambda_i, |a_i|)$, la tronque à M_i :

$$x = \Pi x_i, (\psi(x))_i = \operatorname{sgn} x_i |x_i \wedge M_i| / (\lambda_i \vee |a_i|), M_i = (\lambda_i \vee |a_i|)(l + 1).$$

Elle explicite donc une définition de A assez maniable, que ne permet pas celle même du théorème de Kakutani, et meilleure que celle de Shepp.

Cette méthode s'applique sans troncature si les ξ_i sont de carrés intégrables. Posant $\lambda_i = \operatorname{Var} \xi_i$, elle se réduit à un cas particulier du théorème 1 de [4] : si $\Sigma(a_i/\lambda_i)^2 = \infty$, et $\xi_y = \Sigma t_i \xi_i$, on a, pour P_{-m} centrée,

$$\|y\|_2^2 = \Sigma \lambda_i^2 t_i^2, \quad \text{et } a(y) = \Sigma a_i t_i \text{ non continue pour } \|y\|_2.$$

C'est dire que $a \notin E_D$, que $E_D \subset H$, l'espace autoreproduisant centré défini par (6). Le résultat est ici moins précis qu'au lemme 4. Bien sûr $E_D = H$, du lemme 4, suit du théorème ci-dessus et du théorème de Shepp qui entraînent de même que \mathcal{C}^0 est identique à la topologie de $\|y\|_2$.

On consultera [3] pour un raffinement de la méthode et des résultats de Shepp : nous allons étendre certains arguments de [3] au cas de lois marginales quelconques, que nous notons μ_i (P demeurant la loi produit).

PROPOSITION 5. — i) Pour tout choix de $\{s_i\}$ tel que $\inf \mu_i[-s_i, s_i] > 0$ (⁵), on a, avec $a = \{a_i\}$

$$(8) \quad M_P \subset l_{\{s_i\}}^2 = \left\{ a : \sum_1^\infty (a_i/s_i)^2 < \infty \right\}.$$

ii) Si M_P contient une droite $\{ta, t \text{ réel}\}$, avec $a = \{a_i\}$, tous $a_i \neq 0$, on a

$$M_P \supset \{a : a_i = 0 \text{ pour tous } i > I(a)\},$$

et

$$\mu_i(dt) = p_i(t)dt, \quad \text{avec } p_i > 0 \text{ (p. s.)}$$

Preuve. — Celle de i) est une application du théorème 2 de [4], rappelé ci-dessus.

Pour ii) il suffit de noter que, puisque les μ_i égalent les restrictions de P aux tribus de dimension 1 correspondantes, $ta_i \in M(\mu_i)$, pour tout t , si $\Delta_a \subset M_\mu$.

(⁵) On peut traduire au préalable les μ_i (pour atteindre la concentration $Q_i(l)$, $l = 2s_i$), cela laisse invariante les lois β_i introduites ci-après.

Le résultat suit alors du lemme de [4'] (I, p. 454).

Nous supposons maintenant que les μ_i sont toutes absolument continues, de densités notées p_i . M_P est alors un groupe additif, car la dichotomie étant assurée, $P_a \ll P \Rightarrow P_{-a} \ll P$ (sinon on aurait $P_{-a} \perp P$ donc $P \perp P_a$). Le critère (de Kakutani) est $\prod \rho_i > 0$, avec

$$1 \geq \rho_i = \int \sqrt{d\mu_i d\mu_{ia_i}} = \int p_i^{1/2}(x) p_i^{1/2}(x - a_i) dx = \int \cos a_i u |\hat{h}_i(u)|^2 du,$$

pour $\hat{h}_i(u) = \int e^{iux} p_i(x) dx / \sqrt{2\pi}$.

Posons

$$\gamma_i(t) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos tu) d\beta_i(u) \quad \text{avec } d\beta_i(u) = |\hat{h}_i(u)|^2 du, \sigma_i^2 = \int u^2 d\beta_i \text{ fini ou non,}$$

$$\psi_i(t) = \int_{\mathbb{R}} (t^2 u^2 \wedge 1) d\beta_i.$$

THÉORÈME 1. — i) On a

$$M_P \supset E_{\{\beta_i\}} \supset I_{\{\sigma_i^{-1}\}},$$

avec $I = \{i : \sigma_i^2 < \infty\}$

$$E_{\{\beta_i\}} = \left\{ a : \sum_1^\infty \psi_i(a_i) < \infty \right\}, \quad I_{\{\sigma_i^{-1}\}} = \left\{ a : \sum a_i^2 \sigma_i^2 < \infty \right. \\ \left. \text{et } a_j = 0 \text{ pour } j \notin I, \text{ sauf un nombre fini} \right\}.$$

ii) Si M_P est vectoriel $M_P = E_{\{\beta_i\}}$.

iii) Pour tout choix de $\{s_i\}$ tel que $\inf \beta_i \{ [s_i^{-1}, \infty[\} > 0$, on a $E_{\{\beta_i\}} \subset I_{\{s_i\}}^2$.

Preuve. — i) (Pour $M \supset E$) suit de $\gamma(a) \leq 2\psi(a)$, vu le critère $\prod \rho_i > 0$ équivalent à $\sum \gamma_i(a_i) < \infty$.

La deuxième relation suit de $\psi_i(a_i) \leq a_i^2 \sigma_i^2$.

ii) Se prouve comme dans [3] pour des β_i identiques : $\gamma(t) = \sum \gamma_i(ta_i) < \infty$ pour tout t réel exprime que les convoluées de 1 à I des lois $e(\beta_i)$ ont des

f. c. $\phi_t = \exp \left(- \sum_1^I \gamma_i(ta_i) \right)$ qui convergent pour tout t . Suivant Doob la convolution infinie existe, $\gamma(t)$ est continue et

$$\Gamma(t) = \int_0^1 \gamma(t) dt = \sum \int_{-\infty}^\infty \left(1 - \frac{\sin a_i u}{a_i u} \right) d\beta_i < \infty$$

assure $\sum \psi_i(a_i) < \infty$, soit $a \in E_{\{\beta_i\}}$ par définition de celui-ci.

iii) On peut supposer que $s_i = 1$, car aux lois $\frac{1}{t} \cdot \mu$ (homothétie de rapport $1/t$) correspondent les lois $t \cdot \beta_1$. Soit donc $\beta_i \{ [1, \infty[\} \geq \varepsilon > 0$.

Puisque $\psi_i(a_i) \geq \int_1^\infty d\beta_i$ si $|a_i| \geq 1$, un nombre fini seulement de $|a_i|$ dépasse 1, si $\Sigma \psi_i(a_i) < \infty$. Pour les autres on a $|a_i| \leq 1$, d'où

$$\psi_i(a_i)/a_i^2 = \int (u^2 \wedge a_i^{-2}) d\beta_i \geq \int (u^2 \wedge 1) d\beta_i \geq \varepsilon \Rightarrow \Sigma a_i^2 \leq \Sigma \psi_i(a_i)/\varepsilon.$$

COROLLAIRE. — On suppose tous les σ_i finis. Alors

$$\begin{aligned} \inf \mu_i[-\sigma_i^{-1}, \sigma_i^{-1}] > 0 &\Rightarrow l_{\xi_i^{-1}}^2 = M_P = E_{\beta_i} \\ \inf \beta_i[\sigma_i, \infty] > 0 &\Rightarrow l_{\xi_i}^2 = E_{\beta_i} \subset M_P. \end{aligned}$$

PROPOSITION 6. — Si les ξ_i/λ_i ont des lois distinctes mais dont la décroissance à l'infini est bornée à la fois supérieurement et inversement, alors $PE_D = 0$.

Preuve. — Soit $y_i = c_i \xi_i$ et $c'_i = c_i \lambda_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Alors la suite y_i tend vers 0 en probabilité. Mais un choix des c'_i tel que $\Sigma P \{ |\xi_i/\lambda_i| > 1/c'_i \} = \infty$, est possible, vu les hypothèses, alors l'ensemble E de convergence vers 0 de la suite y_i est P-nul et contient E_D suivant le lemme 2.

4. Exemple d'application

On suppose que $\{e_n\}$ est une base faible de X (cf. la proposition 1), et une partie bornée de X (cela équivaut à : les coordonnées c_i de chaque $y = \Sigma c_i y_i$, $y_i(e_j) = \delta_{ij}$, sont bornées).

PROPOSITION 7. — On suppose que μ_0 est une loi stable symétrique d'exposant α de mesure σ_0 (cf. [12']) portée par les points $\pm e_i$.

Alors on a (pour M et D relatifs à μ_0 , notés M_0 et D_0) $M_0 = D_0^c$, et

$$(9) \quad M_0 = \{ x = \Sigma a_i e_i, (a_i/\lambda_i)^2 < \infty \}, \quad \text{avec } y_i(\cdot) \text{ de f. c. } e^{-|\lambda_i t|^\alpha}$$

$$(9') \quad \mu_0 E_D(\mu_0) = \mu_0 M_0 = 0.$$

Si μ est une loi strictement stable, de mesure de Lévy $\sigma(d\tau) \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}$, où

$\sigma \geq \sigma_0$ (τ décrit la « frontière » ∂B ⁽⁶⁾ du disque B engendré par les e_i), on a $M \supset M_0$ donc $D \subset D_0$. Si $\alpha < 1$, et si $\sigma - \sigma_0$ est sans atomes, on a $E_D(\mu) = E_D(\mu_0)$.

Preuve. — (9) suit du théorème de Shepp (cf. la remarque 4) et a été noté par Zinn (cf. [16]). (9') suit de la proposition 6.

μ_0 est un facteur de μ , donc $M_0 \subset M$ (cf. le § 5). Si $\alpha < 1$, on sait que le dual de l'espace $L^\alpha(\partial B, \sigma - \sigma_0)$ est vide. On voit aisément qu'alors, la topologie $\mathcal{C}^0(\mu)$, qui est identique, même pour σ non symétrique, à celle de $L^\alpha(\partial B, \sigma)$, se réduit à celle de $L^\alpha(\partial B, \sigma_0)$, donc égale

$$\mathcal{C}^0(\mu_0) : \text{Log } \hat{\mu}(y) = -C_\alpha \int |y(\tau)|^\alpha \left(1 - i \text{tg } \frac{\pi\alpha}{2} \text{sign } y \right) d\sigma$$

(cf. [12'], p. 181).

5. Influence de la convolution

LEMME 5. — *Le domaine $M(\mu) = \{ a : \mu_a \ll \mu \}$ augmente par convolution.*

Preuve. — Soit $\mu = \rho v$. μ_a s'écrit $\rho_a v$ (comme ρv_a), donc $a \in M_\rho$ et

$$\mu A = \int \rho(A - x)v(dx) = 0 \Rightarrow \rho_a(A - x) \stackrel{p.s.}{=} 0 \Rightarrow \mu_a A = 0.$$

LEMME 6. — *Un sous-groupe additif G admet un translaté plein pour $\mu = \rho v$, si et seulement si il en est ainsi pour ρ et v . On a donc*

$$(10) \quad G_0(\rho) \cup G_0(v) \subset G_0(\rho v)$$

$$\mathcal{G}(\rho v) = \mathcal{G}(\rho) \cap \mathcal{G}(v), \quad \mathcal{E}(\rho v) = \mathcal{E}(\rho) \cap \mathcal{E}(v) \text{ et}$$

$$(10') \quad E_0(\rho) \cup E_0(v) \subset E_0(\rho v).$$

Preuve. — Soit $A = G - b$ avec $\mu A = 1$.

$$\mu A = \int \rho(A - x)v(dx) = 1 \Rightarrow vS = 1 \quad \text{avec } S = \{ s : \rho(A - s) = 1 \}.$$

Il suffit donc de constater qu'un $A - s$ plein pour ρ existe, et symétriquement un autre pour v . Réciproquement cela suffit, car si $\rho(G - s) = v(G - s') = 1$, pour $b = s' + s$, $A - x = G - s$ pour tout x dans $G - s'$: $\mu(G - b) = 1$.

⁽⁶⁾ On a $\partial B = \{ x \in X, \Sigma | y_j | = 1 \}$ et

$$\{ x : y_i < a \Sigma | y_j | \} = \cup \left\{ x : y_i < a \sum_1^j | y_j | \right\}$$

prouve que la projection $x \rightarrow x/\Sigma | y_j |$ de X sur ∂B est mesurable pour les tribus \mathcal{C} et $\mathcal{C} \cap \partial B$, l'objection de la remarque de [14] est levée en ce cas aussi.

LEMME 7. — Avec les notations de (2') on a

$$\mathcal{E}'(\rho\nu) = \mathcal{E}'(\rho) \cap \mathcal{E}'(\nu), \quad E'_0(\rho\nu) \supset E'_0(\rho) \cup E'_0(\nu).$$

Preuve. — Soit $E = \{x : y_n(x) \rightarrow 0, \text{ avec } y_n(\cdot) \rightarrow 0 \text{ p. s. pour } \mu_b = \rho_b\nu\}$.

Il est clair, vu la formule de Fubini qu'il existe un c tel que $y_n(\cdot) \rightarrow 0$ p. s. pour ν_c , soit $E \in \mathcal{E}'(\nu)$. De même pour ρ_d (en fait $d = b - c$).

Inversement si $E \in \mathcal{E}'(\rho) \cap \mathcal{E}'(\nu)$, on a $\rho_d E = \nu_c E = 1$ (c et d convenables), par définition, avec $E = \{x : y_n(x) \rightarrow 0\}$.

Remarque 6. — On voit que seule la propriété additive de E est intervenue. Le résultat vaut donc aussi bien avec les familles $\mathcal{G}' = \{G \in \mathcal{G}, \exists f_i \rightarrow 0, \text{ pour tout } x \in G\}$, f_i étant maintenant une fonction additive.

PROPOSITION 8. — On suppose μ indéfiniment divisible : les $\mu^{1/n}$ (n entier > 0) donc les μ^r (r rationnel > 0) sont définies sur \mathcal{C} . Les familles $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{G}$ (aussi bien \mathcal{G}'), donc les ensembles E_0, E'_0, G_0 sont les mêmes pour toutes les lois μ^r .

Cette propriété s'étend aux μ^t (t réel > 0), lorsque μ est strictement stable (et faiblement de Radon).

Preuve. — Raisonnons avec la famille \mathcal{E}_r relative à μ^r . On a $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{1/2}$, aussi bien $\mathcal{E}_{1/n} = \mathcal{E}_{2/n}$ donc de proche en proche, par addition des r , $\mathcal{E}_{m/n} = \mathcal{E}$ pour $m/n < 1$, donc pour $m/n = r > 1$ puisque $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_{r/k}$ (m, n, k entiers).

Pour μ strictement stable d'exposant α , on devra la supposer faiblement de Radon pour assurer la continuité en 0 du demi-groupe μ^r (cf. [10]), ce qui assure la définition de μ^r . Alors μ^r est l'homothétique de μ dans le rapport $t^{1/\alpha}$, et la proposition devient évidente pour \mathcal{E} et \mathcal{E}' donc E_0 et E'_0 .

S'il s'agit de \mathcal{G} ou \mathcal{G}' , cela suit (par exemple pour $\mathcal{G}_r = \mathcal{G}(\mu^r)$) de ce que, suivant le lemme 7, si $r < t < r'$ on a $\mathcal{G}_r \supset \mathcal{G}_t \supset \mathcal{G}_{r'}$, et de l'égalité $\mathcal{G}_r = \mathcal{G}_{r'}$.

6. Topologie \mathfrak{T}^0

pour certaines probabilités cylindriques « isotropes »

Soit $\|y\|$ une « norme » sur Y (il n'est pas nécessaire que $\|y\| = 0$ implique $y = 0$, le plus souvent on peut se ramener à ce cas, par un quotient).

DÉFINITION. — Nous dirons que μ , probabilité cylindrique est isotrope (relativement à cette norme) si la f. c. $\hat{\mu}(y)$ ne dépend que $\|y\|$.

Nous nous limitons dans ce qui suit aux $\hat{\mu}(y)$ du type suivant

$$(12) \quad \hat{\mu}(y) = \int_{]0, \infty[} \varphi(t \|y\|) \nu(dt), \quad \nu[0, \infty[= 1.$$

Nous supposons dans (11) que $\varphi(\|y\|)$ est la f. c. d'une probabilité cylin-

drique μ_1 , alors $\hat{\mu}$ est assurément celle d'une probabilité cylindrique μ , que nous écrivons aussi

$$(13) \quad \mu = \int_{[0, \infty[} \mu_t \nu(dt), \quad \text{avec } \mu_t = t \cdot \mu_1$$

μ est le mélange, suivant la loi ν portée par $[0, \infty[$, des homothétiques, notées $\mu_t = t \cdot \mu_1$, de μ_1 dans le rapport $t \geq 0$.

On sait que lorsque $\|y\|$ est la norme d'un espace L^p , pour $0 < p \leq 2$, les seules μ isotropes (pour cette norme) sont les mélanges (12), avec $\varphi(t) = e^{-t^p}$ ($t \geq 0$, pour $p = 2$ on prendra $e^{-t^2/2}$). En ce cas μ_1 est stable et $\varphi(t\|y\|) = \varphi^\alpha(\|y\|)$ avec $\alpha = t^p$, soit $\mu = \int \mu^\alpha \nu'(d\alpha)$. Sous cette forme la propriété qui vient d'être rappelée (cf. [2]) doit s'étendre à de larges classes d'espaces d'Orlicz.

PROPOSITION 9. — Soit μ une probabilité cylindrique du type (4), \mathbf{P} la probabilité correspondante.

a) Si $\nu(0) = 0$, la topologie \mathcal{C}^0 (7) (dans Y) est moins fine au sens large, que celle définie par $\|y\|$.

b) Si $\nu(0) < 1$, la topologie \mathcal{C}^0 est plus fine (au sens large) que celle de la norme, sous la condition que $\varphi(|t|)$ soit f. c. d'une loi (réelle) propre ν_0 ($\nu_0 \neq \delta(0)$).

c) Si $\|y\|$ est τ -continue ($\tau(Y, X)$ topologie de Mackey), si $\nu(0) = 0$ et $\nu_0 \neq \delta(0)$, E_D est le dual de $(Y, \|\cdot\|)$, pour le plongement naturel de ce dual dans X .

Preuve. — a) Soit $\nu(0) = 0$ et (ξ_y) note le processus linéaire associé à μ

$$V(\eta, \varepsilon) = \{y : \mathbf{P}\{|\xi_y| > \eta\} < \varepsilon\}.$$

On a

$$\mathbf{P}\{|\xi_y| > \eta\} = \int \mathbf{P}_1\{|\xi_y| > \eta/t\} \nu(dt).$$

μ_{1y} (loi de ξ_y pour \mathbf{P}_1) a pour f. c. $\varphi(t\|y\|)$, donc $\mu_{1y} = \|y\| \cdot \nu_0$ avec la notation de (12).

On a donc, $\rho(\alpha)$ désignant $\nu_0(t > \alpha)$,

$$\mathbf{P}_1\{|\xi_y| > \eta/t = \nu_0\{|\theta| > \eta/\|y\|\} = \rho(\alpha) \quad \text{avec } 1/\alpha = t\|y\|/\eta.$$

Puisque $\rho(\alpha) \downarrow 0$ lorsque $\alpha \uparrow \infty$, on a

$$(14) \quad \mathbf{P}\{|\xi_y| > \eta\} \leq \nu[0, \delta[+ \rho\eta/\delta\|y\|.$$

(7) Définie au début du n° 2.

(13) prouve bien que pour $\|y\|$ assez petit, $y \in V(\eta, \varepsilon)$, que \mathcal{C}^0 est « moins fine que $\|\cdot\|$ ».

b) Suit $v(0) < 1$ et $v_0 \neq \delta(0)$. Puisque

$$P\{|\xi_y| > \eta\} \geq v[\delta, \infty[\cdot\rho(\eta/\delta\|y\|)],$$

on a

$$y \in V(\eta, \varepsilon) \Rightarrow \rho(\eta/\delta\|y\|) < \varepsilon/v[\delta, \infty[.$$

Fixant δ de sorte que $\gamma = v[\delta, \infty[$ soit > 0 (un $\delta > 0$), ce que permet l'hypothèse $v(0) < 1$, on voit que

$$y \in V(\eta, \varepsilon) \Rightarrow \alpha = \eta/\delta\|y\| \geq \rho^{-1}(\varepsilon/\gamma),$$

ρ^{-1} étant la fonction réciproque de ρ .

C'est dire que $V \subset \{y : \|y\| \leq \eta/\delta\rho^{-1} = \theta\}$ (le $\rho^{-1}(\varepsilon/\gamma)$ susdit). Ainsi se donnant θ , on peut fixer ε de sorte $\rho^{-1}(\varepsilon/\gamma) > 0$, d'où $\eta = \theta\delta\rho^{-1}$ tel que $\{\|y\| \leq \theta\} \supset V$.

c) Suit évidemment de la définition de E_D et de l'équivalence « de \mathcal{C}^0 et $\|\cdot\|$ ».

PROPOSITION 10. — *Dans un espace vectoriel polonais (X, \mathcal{C}) , localement convexe, la σ -additivité (sur une algèbre \mathcal{A}_0 engendrée par une base dénombrable d'ouverts, et engendrant \mathcal{B}) du mélange $\mu = \int_{[0, \infty[} \mu_t v(dt)$, avec $\mu_t = t \cdot \mu_1$, équivaut à celle de μ_1 .*

Preuve. — Suivant Harris (cf. [5]), il suffit de prouver que $\mu_1 A_n \downarrow 0$ avec $A_n \downarrow \emptyset$, pour une famille dénombrable de telles suites. Or $\mu A_n \downarrow 0$ implique que $\mu_t A_n \downarrow 0$ pour toutes ces suites et tout t sauf un ensemble dénombrable. Ainsi une des μ_t , $t \neq 0$, donc toutes sont σ -additives. Mais cela suppose que le μ_t sont définies (additives) sur \mathcal{A}_0 qui ne peut être dans l'algèbre cylindrique \mathcal{A} .

7. On suppose que $\|y\|$ est préhilbertienne

C'est-à-dire que $\|y\|^2$ est une forme quadratique ≥ 0 sur Y . Le dual de $(Y, \|\cdot\|)$ est alors l'espace autoreproduisant H_1 relatif à μ_1 , dans R^T . Nous dirons avec d'autres auteurs que μ est « hilbertienne-isotrope », si elle est isotrope pour une telle norme. Une telle μ est, nous l'avons rappelé (suivant Schoenberg) nécessairement de la forme (12) avec $\hat{\mu}_1(y) = e^{-\|y\|^2/2}$.

THÉORÈME 2. — *On suppose que μ est une loi dans X , sur \mathcal{C} , hilbertienne-isotrope, et H_1 l'espace autoreproduisant, dans R^T , relatif à la forme $\|y\|^2$. Alors*

a) Si $v(0) = 0$, $a \in H_1$ implique $P_a \sim P$ (lois dans R^T)

et $\mu_a \sim \mu$ si $a \in H_1 \cap X$.

$a \notin H_1$ implique $P_a \perp P$ (lois dans R^T)

et $\mu_a \sim \mu$ si $a \in X - H_1$.

On a, dans X , $E_D = E_0 = G_0 = X \cap H_1$.

b) Si $v(0) > 0$, on n'a ni $P_a \ll P$ ni $P \ll P_a$, pour $a \in H_1$.

c) Si $C = \int t^2 v(dt) < \infty$, H_1 est l'autoreproduisant de μ , lorsqu'on le munit de la norme $C^{-1/2} \|x\|_{H_1}$.

Preuve de a). — Soit $L \in \mathcal{C}$ et $PL = 0$. Vu $v(0) = 0$, on a

$$(15) \quad PL = \int_{]0, \infty[} P_t(L)v(dt),$$

donc $P_t(L) = P_1(L/t) = 0$ p. s. pour v . Il en est de même de $P_t(L - a) = P_{1a/t}(L/t)$, si $a \in H_1$ (puisque P_1 est la loi gaussienne canonique), d'où $P_a L = 0$.

La preuve que $P \ll P_a$ est la même, et celle de $\mu_a \sim \mu$ s'obtient en prenant les traces sur X , si $a \in X$.

Si $a \in X - H_1$, (a, y) n'est pas continue pour $\| \cdot \|$, dans Y , *a fortiori* pour $\tilde{\mathcal{C}}^0$ (proposition 10 a)), donc $\mu_a \perp \mu$ (et $P_a \perp P$) suivant Dudley.

b) Soit $v > 0$. Il est clair que si $L \ni a$, $0 \notin L$ et si $\mu_1 L = 0$, on a $\mu L = 0$ et $\mu_a L = (L - a) \geq v(0)$.

c) Est également immédiat. On notera que si $C = \infty$, μ n'est pas du second ordre, sans que cela empêche les propriétés de a).

Remarque 7. — Linde a prouvé, dans H_1 , l'uniforme absolue continuité de P_a par rapport à P (comme probabilités cylindriques) pour toute translation (cf. [7]). La preuve ci-dessus de $\mu \sim \mu_a$ vaut pour des P_t qui ne sont plus les $t.P_1$ mais seulement gaussiennes et d'autoreproduisant contenant H_1 , ou encore seulement H_1 -quasi-invariantes.

Remarque 8. — Supposons $H_1 \subset X$ et μ_1 σ -additive dans X . Pour $v(0) = 0$, la preuve que $\mu E = 0$ ou 1 pour tout vectoriel E (mesurable pour \mathcal{B}_μ , \mathcal{B} tribu $\tilde{\mathcal{C}}$ -borélienne, μ τ -régulière sur \mathcal{B} , cf. [13]) est triviale vu (14), puisque $\mu E = \mu_1 E$. Nous n'avons pu aborder le cas d'un $A H_1$ -invariant quelconque, mais la preuve habituelle que $\mu G > 0 \Rightarrow G \supset H_1 \cap X$, demeure valable.

Remarque 8. — Les lois μ du théorème 1 contiennent certaines lois stables, toutes celles (dans X ou R^T) de transformée de Fourier $e^{-c\|y\|^p}$ ($c > 0$, $0 < p < 2$). La forme explicite de la loi v (assurant $e^{-t^p} = \int_{]0, \infty[} e^{-xt^{2/2}} v(dx)$) est connue (cf. [15']), c'est la loi $\frac{dv(x)}{dx} = \int_0^x e^{-\lambda t^p} \sin \mu t^p \sin \frac{tx}{2} dt / \pi$, avec $\lambda = \cos \pi p / 2$, $\mu = \sin \pi p / 2$.

En particulier si X est hilbertien, on obtient toutes les lois.

$$(16) \quad \mu(y) = e^{-\|Ay\|^p},$$

où, dans (15) la norme est celle du dual hilbertien de X et A un opérateur, quelconque, de Hilbert-Schmidt, dans Y . Rappelons (cf. [8]) qu'en ce cas $H_1 = AY$ — en identifiant X et Y .

8. Autres propriétés des lois hilbertienne-isotropes

Certaines autres propriétés des lois gaussiennes s'étendent aisément.

PROPOSITION 11. — Soit μ une loi (τ -régulière) sur la tribu borélienne \mathcal{B} de l'espace normé X , isotrope pour la norme préhilbertienne, supposée τ -continue, $\|y\|$. Cette norme définit l'espace autoreproduisant $H_1 \subset X$, de la loi μ_1 liée à μ par (12). On suppose $v(0) = 0$ (et μ_1 σ -additive, si X n'est pas complet), et $\int tv(dt) < \infty$. Alors pour toute base $\{e_i\}$ de H_1 , et les v. a. $\xi_i(\omega)$ associées suivant $y(e_i) = E_{\xi_y(\omega)} \xi_i(\omega)$ ($y \in Y$, $\omega \in \mathbf{R}^T$), le développement

$$\zeta_1 = \sum_1^I \xi_i(\omega) e_i$$

converge p. s. en norme et au sens de $L^1(X, \|\cdot\|)$ dans X vers un vecteur aléatoire $\zeta(\omega)$ de loi μ .

Preuve. — Elle suit (suivant Neveu) de ce que ζ_1 est une martingale, avec $\zeta_1 = E(\zeta | \xi_1, \dots, \xi_1)$. Pour des détails cf. une proposition plus générale dans [12]. Pour assurer que les ξ_y sont intégrables nous devons supposer $\int t\gamma(dt) < \infty$. Alors $\int_X \|x\| d\mu < \infty$, et on est dans un cas d'application directe du théorème de Chatterji.

PROPOSITION 12. — Dans les conditions de la proposition 11, la fonction $\|h\|_X$, a , pour $h \in H_1$, la propriété de Gross: il existe (pour chaque ε) un sous-espace E_ε de dimension finie, de H_1 , tel que pour tout autre tel sous-espace $E \perp E_\varepsilon$ on ait (pour P probabilité cylindrique dans H_1)

$$(17) \quad P \{ \|\pi_E h\|_X > \varepsilon \} < \varepsilon, \quad \pi_E \text{ projection de } h \text{ sur } E.$$

Remarque 10. — (17) est une propriété d'uniforme convergence en probabilité qui implique la convergence p. s. d'une sous-suite seulement (contrairement à la proposition 11).

Preuve. — Si $\{e_1, \dots, e_l\}$ est une base de E_σ , soit E de base e_{l+1}, \dots, e_j . Alors

$$\begin{aligned} P \{ \|\pi_E h\| > \varepsilon \} &= P \{ \|\zeta_j - \zeta_l\| > \varepsilon \} \\ &= \nu(dt)\mu_1 \{ \|\zeta_j - \zeta_l\| > \varepsilon/t \} \leq \nu |0, \eta| + \mu_1 \{ \|\zeta_j - \zeta_l\| > \varepsilon/\eta \}. \end{aligned}$$

Il est donc clair que les v. a. $\|\pi_E h\|$ sont uniformément petites en μ -mesure si elles le sont pour μ_1 , d'où le choix de E_ε suivant la propriété de Gross pour μ_1 .

Aussi bien on peut reprendre l'argument de Neveu, basé sur la convergence au sens de $L_1(V, \|\cdot\|)$ de ζ_l et l'inégalité $\|\pi_E h\|_{L_1} \leq \|\zeta - \zeta_l\|_{L_1}$ ($\pi_E h$ a pour loi celle de $E(\zeta - \zeta_l | \zeta_{l+1}, \dots, \zeta_j)$), et l'espérance conditionnelle est une contraction dans L_1 .

9. Espace autoreproduisant d'une loi décentrée

Nous prouvons ici le résultat énoncé dans [13] (note (7)) :

PROPOSITION 13. — Soit P une probabilité du 2^e ordre dans $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$. On désigne par H_0 et H les espaces autoreproduisants relatifs à $P_0 = P_{-m}$, loi centrée, et $P = P_{0m}$. Alors

- ou i) $m \in H_0, \quad \|m\|_H < 1 \quad \text{et} \quad H = H_0$
- ou ii) $m \notin H_0, \quad \|m\|_H = 1 \quad \text{et} \quad (17) \quad H = H_0 \oplus \{tm\}.$

Il existe une application i de \hat{Y} sur \hat{Y}_0 (complétés respectifs du dual Y pour $Q(y) = \int y^2(x)dP$ et $Q_0(y)$), prolongement de l'identité sur Y , injective seulement dans le cas i) (sinon $i(R^{-1}m) = 0$) et définie par

$$(18) \quad R\hat{y} = R_0\hat{y}_0 + (m, \hat{y})m, \quad \text{avec} \quad (y', Ry) = Q(y', y), \quad (y', R_0y) = Q_0(y', y).$$

Preuve. — Il est clair que si $y_n \in Y$ et si $Q(\hat{y} - y_n) \rightarrow 0$, il existe \hat{y}_0 tel que $Q_0(y_n - \hat{y}_0) \rightarrow 0$, vérifiant (18). Inversement, posons

$$B_\eta = \{y : Q_0(y - \hat{y}_0) < \eta^2\},$$

pour y_0 donné quelconque dans Y_0 .

La projection suivant $y \rightarrow (y, m)$ de B_η est non vide et convexe, c'est un intervalle décroissant avec η . Il existe donc une suite y_n telle que $y_n \xrightarrow{Q_0} \hat{y}_0$, et que (y_n, m) converge. Alors $Q(y_n - y_m) \rightarrow 0$ et définit \hat{y} tel que $i\hat{y} = \hat{y}_0$.

Ainsi i existe et $i\hat{Y} = \hat{Y}_0$. Alors

i) Si $m \in H_0$, pour $\hat{y}_0 = R_0^{-1}m$ on a ($m \neq 0$ bien sûr)

$$R\hat{y} = m(1 + \theta) \quad \text{avec} \quad \theta = (\hat{y}, m) \Rightarrow \theta = \|m\|_H^2(1 + \theta) \Rightarrow \|m\|_H < 1$$

et i est inversible car $i\hat{y}=0$ équivaut à $R\hat{y}=(m, \hat{y})m$, soit $\langle m, R\hat{y} \rangle = \langle m, R\hat{y} \rangle^2$ (produit scalaire dans H), donc posant $c = (m, \hat{y})$, $c = c^2 = 1$ (si $\hat{y} \neq 0$), contredisant $\|m\|_H < 1$.

ii) Si au contraire $m \notin H_0$, $R^{-1}m = \hat{y}$ donne $m = R_0\hat{y}_0/(1 - \|m\|_H^2)$ donc $\|m\|_H = 1$ (sinon m serait dans H_0).

Alors ce $\hat{y}_0 = 0$, $i(R^{-1}m) = 0$. Lorsque \hat{y}_0 décrit \hat{y}_0 , $R_0\hat{y}_0$ décrit $H_0 \subset H$. (18) s'ensuit puisque $R(\hat{y} + tR^{-1}m) = R(\hat{y}) + tm = R_0\hat{y}_0 + \{(m, \hat{y}) + t\}m$.

Remarque 11. — (18) est à rapprocher du problème suivant :

DÉFINITION. — La loi μ est dite « centrable » si l'intersection A des $E_{-a}(\mu)$ de (2') est non vide. Il est équivalent de dire qu'il existe un m (tout point de A convient) tel que $\mathcal{E}'(\mu) = \mathcal{E}_D(\mu_{-m})$, ou encore que $\mu_{-m} = \mu_0$ est telle que pour tout b de X on a $b \in E_D(\mu_{0b})$. Il est clair qu'alors on a, vu $\mathcal{E}_D(\mu) \subset \mathcal{E}'(\mu) = \mathcal{E}_D(\mu_0)$,

$$(18') \quad E_D(\mu_{0m}) \supset E_D(\mu_0) \oplus \{tm\}.$$

Nous ne savons pas si la relation (18') est une égalité. Cependant, lorsque — comme pour une loi gaussienne — $E_D = H$, (18) se réduit à (18') qui devient donc une égalité, sans nécessiter la preuve de (18) qui précède, seul est à prouver en effet que H n'est pas plus petit que $H_0 \oplus \{tm\}$. Si il existe une loi gaussienne μ' de même covariance que μ , cet argument vaut toujours, pour prouver (18). Si maintenant μ est une loi stable d'exposant $p \neq 1$, elle est centrable en ce sens que, après translation $-m$, elle est strictement stable. Soit alors $E \in \mathcal{E}(\mu) = \mathcal{E}(\mu_0)$. Dès que E est \mathcal{B}_μ -mesurable (\mathcal{B}_μ tribu complétée de \mathcal{B} pour μ), avec μ τ -régulière, on a $\mu_0 E = 1$. En effet, si $m \notin E$, il existe une fonction L linéaire sur X , égale à t si $x \in E + tm$, mesurable car de loi dégénérée, donc de loi strictement stable pour μ_0 (cf. la preuve du lemme 6 de [13]). En particulier on obtient que $\mathcal{E}'(\mu) = \mathcal{E}_D(\mu_0)$, μ est centrable au sens ci-dessus.

Ceci ne nous renseigne pas sur la famille \mathcal{E} de (2), sauf dans le cas gaussien, où l'on sait (le lemme 6 sus-dit) qu'il existe $\hat{y} \sim L$ pour μ_0 , donc $\hat{y} = 0$: tout E' de \mathcal{E} équivaut ($:\mu_0(E'\Delta E) = 0$) à un E de $\mathcal{E}_D(\mu_0)$. En fait on sait aussi que $E' \supset E_D(\mu_0) = H_0$.

10. Invariance de la décomposition de Lebesgue par prolongement τ -réguliers

Il s'agit des passages de la tribu \mathcal{C} à \mathcal{B}_σ , puis de \mathcal{B}_σ à \mathcal{B} (lemmes 1 et 3 de [13]).

Soit $\nu = \nu_s + \nu_c$ la décomposition de ν relativement à μ , et à la tribu \mathcal{C} .

L'affirmation (du lemme 1) suit clairement de ce que (cf la note ⁽²⁾ de [13]) $\nu F_\alpha \downarrow 0$ si $F_\alpha \downarrow \emptyset$, pour des F_α cylindriques fermés ($F_\alpha \in \mathcal{A}$) est un critère de τ -régularité : de prolongement τ -régulier à \mathcal{B}_σ (on ne change pas de topologie). Si donc ν est τ -régulière (faiblement), les composantes ν_s et ν_c définies par la seule décomposition relative à \mathcal{C} , sont (faiblement) τ -régulières : admettent un prolongement tel à \mathcal{B}_σ . Le lemme 1 a prouvé que la densité $(d\nu_c/d\mu)_\mathcal{C}$ était aussi une densité du prolongement (par τ -régularité pour μ et ν_c), ce qui justifie notre assertion.

Supposons maintenant que μ et ν définies sur \mathcal{B}_σ aient des prolongements τ -réguliers à \mathcal{B} , tribu borélienne pour une topologie ayant en 0, une base de voisinages ouverts $U \in \mathcal{B}_\sigma$.

La preuve est la même (que pour \mathcal{C} et \mathcal{B}_σ) que l'absolue continuité se conserve par prolongement τ -régulier, avec la même densité. Ainsi si a est un point de dichotomie pour μ , relativement à \mathcal{C} , il en est de même pour \mathcal{B}_σ et \mathcal{B} .

LEMME 8 ⁽⁸⁾. — Si \mathcal{C} est localement convexe (soit les U absolument convexes), en chaque point x , les $U_x^t = tU + x (t > 0)$ ont des \mathcal{C} -fermetures \bar{U}_x^t qui $\in (\mathcal{B}_\sigma)_\mu$ pour tous les t sauf une quantité dénombrable (variant avec x) (μ est donnée, τ -régulière, sur \mathcal{B}_σ).

Preuve. — Pour tout $t > 1$, la convexité de U fait que tU contient la fermeture faible \bar{U} de $U : \bar{U} = \bigcap_{t>1} tU$. Si donc t est « de continuité » pour $\mu(U_x^t)$, on a

$$\mu U_x^t = \mu \bar{U}_x^t \Rightarrow U_x^t \in (\mathcal{B}_\sigma)_\mu, \quad \text{tribu complétée pour } \mu.$$

PROPOSITION 14. — Il suffit (et faut) pour que μ loi donnée sur \mathcal{B}_σ ait un prolongement τ -régulier à \mathcal{B} (pour \mathcal{C} avec une base d'ouverts a. c. $U \in \mathcal{B}_\sigma$) ⁽⁸⁾, que pour toute famille filtrante \uparrow de réunions finies V_α de U_x , on ait (si V est réunion de U_x de continuité pour μ)

$$(19) \quad \sup V_\alpha \supset \bar{V} \quad \text{et} \quad \mu(\bar{V} - V) = 0 \Rightarrow \sup \mu V_\alpha \geq \mu V.$$

Il suffit (et faut) a fortiori que

$$(20) \quad F_\alpha = \bar{V} - V_\alpha \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu F_\alpha \downarrow 0.$$

⁽⁸⁾ Le lemme 8 est erroné. Il faut supposer que tU ($t > 1$) contient \bar{U} . C'est le cas si \mathcal{C} est compatible avec le dual Y , c'est aussi le cas si X est dual d'un Banach. Dans ces deux cas $\bar{U} = U$.

Preuve. — Nous avons prouvé (au théorème 7 de [13]), que suffisait la condition légèrement plus forte :

$$(21) \quad \sup V_\alpha \supset V \Rightarrow \sup \mu V_\alpha \geq \mu V.$$

Prouvons que (19) \Rightarrow (21) : il suffit de considérer une suite $V_n \subset V$, obtenue par « homothéties » de rapports $t_n \uparrow 1$ sur les U_x constituant V , les t_n étant choisis de sorte que $\mu V_n = \mu \bar{V}_n$ ($\bar{V}_n \subset V$). On a $V_n \uparrow V$, $\mu V_n \uparrow \mu V$, soit $\sup \mu V_\alpha \geq \mu \bar{V}_n$ (suivant (20)) d'où (22).

Il est immédiat aussi que (21) implique (20) car

$$\mu F_\alpha \geq \mu \bar{V} - \mu V = \mu V - \mu V_\alpha \quad \text{à une borne inf} \leq 0.$$

Notons (moins rapidement que dans [13]) que (22) contient la faible τ -régularité de μ sur \mathcal{B}_σ , lorsqu'on prend $\cup V_\alpha = V$ ouvert faible. Car $V = \cup V'_\beta$, où V'_β est une famille \uparrow d'ouverts cylindriques, chaque V_α étant contenu dans un V'_β . (22) nécessite $\mu V = \sup V'_\beta$ (critère de faible τ -régularité) et assure aussi que le prolongement $\hat{\mu}$ défini sur tout \mathcal{O} \mathcal{C} -ouvert par $\sup \mu V_\alpha$ ($V_\alpha \uparrow \mathcal{O}$) coïncide avec μ sur \mathcal{B}_σ .

COROLLAIRE. — *La décomposition de Lebesgue $v = v_s + v_c$ de v p. r. à μ , est la même, pour μ et v τ -régulières pour \mathcal{C} , sur \mathcal{B}_σ et sur \mathcal{B} (: la variation totale de v_c ne diminue pas de \mathcal{B}_σ à \mathcal{B}).*

Preuve. — Il est clair, avec le critère (21), que s'il est vérifié par v (sur \mathcal{B}_σ), il l'est aussi par v_s et v_c (décomposition pour \mathcal{B}_σ). La preuve est donc identique, maintenant, à celle du 1^{er} cas (passage de \mathcal{C} à \mathcal{B}_σ), les prolongements de v_s et v_c fournissent la décomposition de v sur \mathcal{B} (par rapport au prolongement de μ).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BORELL, Random linear subspaces and subspaces of probability one. *Arkiv for matematik*, t. **14**-1, 1976, p. 79-92.
- [2] BRETAGNOLLE, DACUNHA-CASTELLE et KRIVINE, Lois stables et espaces L^p . *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **II**-3, 1966, p. 231-259.
- [3] CHATTERJI et MANDREKAR, Quasi invariance of measures under translation. *Mathematische Zeitschrift*, t. **154**, 1977, p. 19-29.
- [3'] S. CHEVET, Quelques nouveaux résultats sur les mesures cylindriques, *preprint*.
- [4] R. M. DUDLEY, Singularity of measures on linear spaces. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **6**, 1966, p. 129-132.
- [4'] GIHMAN et SKOROHOD, *The theory of stochastic processes*. Springer, 1974.
- [5] T. E. HARRIS, Counting measures, monotone random set functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **10**, 1968, p. 102-119.
- [6] S. KOSHI et Y. TAKAHASHI, A remark on quasi-invariant measure. *Proc. Japan Acad.*, t. **50**, 1974, p. 428-429.
- [7] LINDE, Quasi-invariant cylindrical measures. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **40**, 1977, p. 91-99.

- [8] J. A. ROZANOV, Infinite dimensional gaussian distributions. *Proc. of the Steklov Institute, Transl. Amer. M. Soc.*, 1971, n° 108.
- [9] L. A. SHEPP, Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself. *The Annals of Math. Stat.*, t. 36-4, 1965, p. 1107-1112.
- [10] E. SIEBERT, Einbettung unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsmasse auf topologischen Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 28, 1974, p. 227-247.
- [11] W. SLOWIKOWSKI, Presupports of linear probability measures on linear Lusin measurable functionals. *Dissertationes Mathematicae Warszawa*, 1972.
- [11'] V. N. SUDAKOV, Ensembles linéaires avec une mesure invariante. *Dokl. Akad. Nauk.* (en russe), t. 127, n° 3, 1959.
- [12] A. TORTRAT, Sur les probabilités dans les espaces vectoriels topologiques. *Symposium Jerzy Neyman*, Varsovie, 1974.
- [12'] A. TORTRAT, Lois $e(\lambda)$ dans les espaces vectoriels et lois stables. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 37, 1976, p. 175-182.
- [13] A. TORTRAT, Prolongements τ -réguliers, application aux probabilités gaussiennes. *Symposia Mathematica*, Rome 1975.
- [13'] TARIELADZÉ, TORTRAT et VAKHANIA, Prolongements d'une dualité (X, Y) entre espaces vectoriels en une dualité de type (L^p, L^q) . *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. 284 A, p. 1561-1564.
- [14] A. TORTRAT, Sur le support des lois indéfiniment divisibles dans les espaces vectoriels. *Ann. Inst. Poincaré*, 1977, p. 27-43 et 293-298.
- [15] A. WINTNER, The singularities of Cauchy distributions. *Duke Math. J.*, 1941, p. 678-681.
- [15'] A. WINTNER, Stable distributions. *Amer. J. of Math.*, 1956, p. 819-861 (cf. 826-7).
- [16] J. ZINN, Admissible translates of stable measures. *Studia mathematica*, t. LIV, 1976, p. 245-257.

(Manuscrit reçu le 2 novembre 1977).