

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. SZPIRGLAS

**Sur l'équivalence d'équations différentielles  
stochastiques à valeurs mesures intervenant dans  
le filtrage markovien non linéaire**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 14, n° 1 (1978), p. 33-59

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1978\\_\\_14\\_1\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_1_33_0)

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Sur l'équivalence d'équations différentielles stochastiques à valeurs mesures intervenant dans le filtrage markovien non linéaire

par

**J. SZPIRGLAS**

Centre National d'Études des Télécommunications,  
196, rue de Paris, 92220 Bagneux, France

## PLAN

I. INTRODUCTION . . . . .	34
II. LES ÉQUATIONS DU FILTRAGE . . . . .	36
II.1 Définition du filtre . . . . .	36
II.2 Les équations du filtrage . . . . .	38
III. ÉQUIVALENCE DES ÉQUATIONS DU FILTRAGE . . . . .	41
III.1 Hypothèses — définitions . . . . .	41
III.2 Deux lemmes . . . . .	43
III.3 Équivalence des équations. . . . .	44
IV. LES ÉQUATIONS SIMPLIFIÉES DU FILTRAGE ; ÉQUIVALENCES . . . . .	47
IV.1 Les deux équations simplifiées, définitions, leur équivalence mutuelle. . . . .	48
IV.2 Pseudo-équivalence des deux systèmes . . . . .	49
V. EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS . . . . .	51
IV.1 Hypothèses — notations . . . . .	52
IV.2 Unicité . . . . .	53
IV.3 Un résultat de filtrage . . . . .	53
IV.4 Existence . . . . .	55
VI. CONCLUSION . . . . .	58
VII. BIBLIOGRAPHIE . . . . .	59

## I. INTRODUCTION

La motivation initiale de ce travail se trouve dans le problème de filtrage suivant : il s'agit d'estimer un signal, connaissant seulement une réalisation bruitée de celui-ci, l'observation. Le signal  $X$  est un processus de Markov à valeurs dans un espace lusinien  $(S, \mathcal{S})$ , de semi-groupe  $P_t$  et de générateur infinitésimal  $(L, \mathcal{D}(L))$ . Le processus d'observation  $Z$  est un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  qui s'écrit :

$$Z_t = \int_0^t h(X_s) ds + W_t$$

où  $h$  est une fonction borélienne bornée sur  $S$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , et  $W$  est un processus de Wiener, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , indépendant du signal  $X$ . Notons  $\Pi_t(f)$ , l'estimation connaissant les observations jusqu'à  $t$ , d'une fonction  $f(X_t)$  du signal.

Fusijaki-Kallianpur-Kunita (en abrégé F. K. K.) montrent dans [7] que pour toute fonction  $f$  du domaine  $\mathcal{D}(L)$  du générateur infinitésimal du signal,  $\Pi_t(f)$  est solution de l'équation suivante :

$$\Pi_t(f) = \Pi_0(f) + \int_0^t \Pi_s(Lf) ds + \int_0^t \langle dv_s, \Pi_s(fh) - \Pi_s(h)\Pi_s(f) \rangle$$

où  $v_t = Z_t - \int_0^t \Pi_s(h) ds$  est un processus de Wiener ou processus d'innovation

Kunita, dans son article sur le comportement asymptotique de l'erreur de filtrage d'un processus de Markov [10], montre que pour toute fonction  $f$  borélienne bornée sur  $S$ ,  $\Pi_t(f)$  est solution d'une seconde équation :

$$\Pi_t(f) = \Pi_0(P_t f) + \int_0^t \langle dv_s, \Pi_s(h \times P_{t-s} f) - \Pi_s(h)\Pi_s(P_{t-s} f) \rangle$$

Kunita prouve l'existence et l'unicité trajectorielle des solutions de cette équation.

Nous prouvons dans ce travail, l'équivalence de ces deux équations, considérées comme des équations à valeurs mesures, définies indépendamment de tout problème de filtrage. Ce faisant, nous montrons l'existence et l'unicité trajectorielle des solutions de la première équation. Plus précisément :

Dans le paragraphe II on donne donc des rappels sur l'obtention des deux équations du filtrage en précisant les points délicats dans les différentes étapes des démonstrations. Nous nous sommes beaucoup inspirés

de Meyer [17], mais aussi de Yor [23] qui, par sa définition du processus de filtrage, nous a permis de poser le problème des équations du filtrage en tant qu'équations différentielles stochastiques à valeurs *mesures*.

Dans le paragraphe III on définit alors de façon générale, c'est-à-dire indépendamment de tout problème de filtrage, deux équations stochastiques à valeurs mesures. On introduit la notion de solution de ces équations. On utilisera, pour ce faire, un formalisme développé par Yamada-Watanabe [22] pour les équations différentielles stochastiques ordinaires, qui sera très utile dans les paragraphes suivants et dans de futures études connexes. Nous montrons ensuite l'équivalence de ces deux équations ; c'est-à-dire que toute solution de l'une est solution de l'autre.

Au paragraphe IV, on définit deux autres équations stochastiques à valeurs mesures que nous appelons les équations simplifiées du filtrage, car elles sont de même type que les premières, mais d'expression plus simple. Nous montrons que ces équations simplifiées sont mutuellement équivalentes mais aussi pseudo-équivalentes aux premières, en ce que toute solution des premières permet de définir une solution des secondes et réciproquement.

Au paragraphe V, on reprend les résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations du filtrage, résultats dus à Kunita. Nous montrons que les démonstrations de Yamada-Watanabe s'étendent aux équations à valeurs mesures. Cependant, il faut remarquer que, au contraire des paragraphes III et IV, nous avons besoin pour l'existence, des résultats du filtrage et donc du paragraphe II de cette étude.

Les résultats originaux de ce travail sont ceux des paragraphes III et IV, en particulier l'équivalence des deux équations du filtrage et la formalisation des équations simplifiées.

Rappelons que si Kunita a montré l'existence et l'unicité des solutions de la deuxième équation (voir paragraphe V), l'on ne savait rien dire jusqu'alors au sujet de la première, à part que, dans les hypothèses d'un problème de filtrage, le filtre en était une solution (voir paragraphe II). Nous prouvons, par le paragraphe III, l'existence et l'unicité des solutions de ce type d'équation.

Dans la théorie du filtrage, cette étude a donc un intérêt évident :

— En effet pratiquement, c'est souvent sous la première forme, faisant intervenir un opérateur différentiel, que le problème se pose et qu'on le résout ; d'où l'intérêt de prouver l'unicité des solutions de la première équation.

— De même, l'introduction des équations simplifiées et les équivalences démontrées dans IV, permettent de justifier théoriquement et de généraliser

la méthode des densités conditionnelles non normalisées développée en particulier par Zakai [24].

Enfin, je remercie Marc Yor d'avoir bien voulu lire la version finale du manuscrit et de m'en avoir signalé les incorrections.

Ce travail a été réalisé dans le cadre du Centre National d'Études des Télécommunications. Le problème de l'équivalence des équations du filtrage m'a été posé par Nicole El Karoui qui a dirigé ce travail et sans laquelle il ne serait pas.

## II. LES ÉQUATIONS DU FILTRAGE

Après avoir présenté le problème du filtrage, nous définissons le filtre ou processus de filtrage en II.1 comme un processus à valeurs mesures.

Nous présentons en II.2 deux résultats fondamentaux du filtrage non linéaire : les équations différentielles stochastiques du filtrage.

Ce paragraphe rassemble donc des résultats qui, sauf dans le § V, ne seront pas utilisés, puisque cette étude traite d'équations définies indépendamment du filtrage ; mais il est nécessaire pour comprendre nos motivations initiales et faire le lien avec les problèmes pratiques du filtrage.

### II.1 Définition du filtre

II.1.A. — Un modèle de filtrage suppose donc la donnée sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  :

- d'un signal  $(X_t)_{t \in T}$  où  $T$  est une partie de  $\mathbb{R}^+$  ;
- d'un processus d'observation  $(Z_t)_{t \in T}$ , observation bruitée des réalisations du signal ;
- et enfin de certaines conditions initiales pour  $X$  et  $Z$ .

Plus précisément :

- Si  $F_t^0$  désigne la sous-tribu de  $\mathcal{A}$  engendrée par les observations jusqu'à l'instant  $t$ ,  $F_t^0 = \sigma(Z_s, s \leq t)$ ,
- Si  $\mathcal{B}_0$  est la sous-tribu de  $\mathcal{A}$  des conditions initiales (c'est souvent une sous-tribu de  $\sigma(X_0)$ ), la filtration croissante  $(F_t^0 \vee \mathcal{B}_0)_{t \in T}$  résume tout ce qui est connu du signal  $X$  ; en particulier  $F_t^0 \vee \mathcal{B}_0$  résume tout ce qui est connu de  $X$  jusqu'à  $t$ .

On définit les filtrations  $(F_t)_{t \in T}$  et  $(F_{t+})_{t \in T}$  de la façon suivante :

- $(F_t)_{t \in T}$  est la filtration complétée pour  $\mathbb{P}$  de  $(F_t^0 \vee \mathcal{B}_0)_{t \in T}$
- $F_{t+} = \bigcap_{s > t} F_s$

La filtration  $(F_{t+})_{t \in T}$  satisfait aux conditions habituelles : elle est  $\mathbb{P}$ -complète et continue à droite (c. a. d.).

Le problème de filtrage est alors, connaissant la filtration  $(F_t)_{t \in T}$ , d'estimer un nombre suffisant de fonctions du signal, et donc le signal lui-même si possible, sous forme d'une bonne version de leur espérance conditionnelle. Pour cela nous aurons besoin de préciser quelques hypothèses supplémentaires sur le signal et l'observation.

II. 1. B. — DÉFINITION DU FILTRE DE X POUR LA FILTRATION  $(F_t)_{t \in T}$  (cf. [23])

— T désigne soit  $\mathbb{R}^+$  tout entier, soit un intervalle  $[0, T]$  fermé borné de  $\mathbb{R}^+$ .

—  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilité muni d'une filtration  $\mathbb{P}$ -complète  $(F_t)_{t \in T}$ .

— Le signal  $(X_t)_{t \in T}$  est un processus défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs dans un espace métrisable lusinien  $(S, \mathcal{S})$ . Rappelons (cf. [3]) que l'on choisit une topologie compacte métrisable sur S qui fait de  $\mathcal{S}$  sa tribu borélienne. Ce qui permet de définir les ensembles suivants :

—  $\mathcal{B}(S)$  (resp.  $C_b(S)$ ) désigne l'ensemble des fonctions boréliennes (resp. continues) bornées sur S à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

—  $\mathcal{M}(S)$  (resp.  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$ ) désigne l'ensemble des probabilités (resp. mesures bornées positives) sur S. A la topologie sur S correspond la topologie de la convergence étroite sur  $\mathcal{M}(S)$  et  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$ , indépendante donc de celle choisie sur S. La tribu borélienne  $\mathfrak{M}$  (resp.  $\tilde{\mathfrak{M}}$ ) de  $\mathcal{M}(S)$  (resp.  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$ ) est alors engendrée par les applications :  $\mu \rightarrow \mu(f)$  où  $\mu$  appartient à  $\mathcal{M}(S)$  (resp.  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$ ) et  $f$  à  $\mathcal{B}(S)$ .

—  $\mathcal{O}$  désigne la tribu optionnelle sur  $\Omega \times T$  pour la filtration  $(F_{t+})_{t \in T}$ . Rappelons que  $\mathcal{O}$  est engendrée par les processus  $F_{t+}$ -adaptés continus à droite limités à gauche (c. a. d.-l. a. g.).

Ces hypothèses étant posées, le filtre de X pour  $(F_t)_{t \in T}$  sera défini à partir de la filtration  $(F_{t+})_{t \in T}$  par le théorème suivant de M. Yor [23] qui utilise un théorème de régularisation des pseudo-noyaux dû à G. Mokobodzki et qui figure dans (Gettoor [8]).

THÉORÈME II. 1. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un noyau  $\Pi_t(\omega, dy)$  de  $(S, \mathcal{S})$  dans  $(T \times \Omega, \mathcal{O})$  à valeurs dans  $\mathcal{M}(S)$  tel que :*

i) *Pour tout  $f$  de  $\mathcal{B}(S)$ ,  $\Pi_t(\cdot, f)$  est une  $(F_{t+}$ - $\mathbb{P}$ )-projection optionnelle de  $f(X_t)$ .*

ii) *Si  $(X_t)_{t \in T}$  est un processus c. à d.  $\Pi_t(\omega, dy)$  est  $\mathbb{P}$ -p. s. continu à droite pour la topologie étroite sur  $\mathcal{M}(S)$ .*

*La séparabilité de S entraîne qu'un tel noyau est unique à un ensemble évanescant près. On l'appelle le filtre de X pour la filtration  $(F_t)_{t \in T}$ .*

## II.2 Les équations du filtrage

Nous donnons dans ce paragraphe deux résultats importants du filtrage non linéaire dus à Fusijaki-Kunita-Kallianpur (F. K. K.) (cf. [7]) et à Kunita (cf. [10]). Nous utilisons aussi les démonstrations de Meyer [16] qui éclairent certains points de F. K. K. ou Kunita. Ces résultats montrent que dans des hypothèses particulières que nous allons énoncer, le filtre vérifie deux équations différentielles stochastiques.

### II.2.A. — LES HYPOTHÈSES.

Soient :

—  $(S, \mathcal{S})$  un espace métrisable lusinien.  $\mathcal{B}(S)$ ,  $C_b(S)$ ,  $\mathcal{M}(S)$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$  désignent les mêmes ensembles qu'au II.1.B. (on considérera sur  $\mathcal{B}(S)$  la topologie de la convergence faible, c'est-à-dire la convergence simple uniformément bornée).

—  $T$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}^+$ .

On suppose que le signal  $X$  est un processus de Markov (cf. [1]) homogène, à valeurs dans  $(S, \mathcal{S})$ , muni de sa filtration naturelle  $(\Omega, \mathcal{A}, (X_t)_{t \in T}, \theta_t, (\mathbb{P}_x)_{x \in S})$ . Il est de plus, c. a. d. conservatif, de semi-groupe borélien  $P_t$  et de générateur infinitésimal faible  $(L, \mathcal{D}(L))$ . Rappelons que

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ f \in \mathcal{B}(S) / \lim_{t \rightarrow 0} \text{faible} \frac{P_t f - f}{t} = Lf \text{ existe dans } \mathcal{B}(S) \right\}$$

La loi initiale de  $X$  est  $\mu$  appartenant à  $\mathcal{M}(S)$ .

On considère alors l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mu)$ .

On suppose que le processus d'observation  $(Z_t)_{t \in T}$  est une fonction aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mu)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , de la forme suivante

$$Z_t = \int_0^t h(X_s) ds + W(t)$$

où

—  $h$  est une fonction borélienne bornée sur  $S$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$

—  $W(t)$  est un  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mu)$  processus de Wiener pour sa filtration naturelle, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et indépendant du signal  $X$ .

On définit alors la filtration naturelle de  $Z$  :  $F_t^0 = \sigma(Z_s, s \leq t)$ .

Si la tribu  $B_0$  résume les conditions initiales, appelons comme au II.2.A,

$(F_t)$  la tribu  $\mathbb{P}_\mu$ -complétée de  $(F_t^0 \vee B_0)$  et  $F_{t+} = \bigcap_{s > t} F_s$ .

Nous ferons sur  $B_0$  l'hypothèse suivante :

Soient  $\mathcal{G}_t^0$  la tribu engendrée par  $X$  et  $W$  jusqu'à  $t$

$$\mathcal{G}_t^0 = \sigma(X_s, W_s, s \leq t) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t^0 \vee B_0$$

$B_0$  et  $\mathcal{G}_t^0$  sont indépendantes conditionnellement à la tribu engendrée par  $X_0$ , valeur initiale du signal.

On vérifie alors que  $W_t$  est un  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P}_\mu)$  processus de Wiener.

Cette adjonction d'une tribu initiale n'est pas très classique. En général, les conditions initiales sont résumées par l'observation initiale  $Z_0$  qui est  $\sigma(X_0)$ -mesurable. Il est alors évident que l'hypothèse d'indépendance conditionnelle est satisfaite.

En fait, les résultats classiques du filtrage n'en sont pas changés et cette généralisation nous sera utile dans la suite, car nous aurons besoin de considérer comme connu le filtre initial  $\Pi_0$ , v. a. sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mu)$  à valeurs dans  $\mathcal{M}(S)$ .

On construit alors le filtre  $\Pi_t$  à partir de la filtration  $(F_t)_{t \in T}$  comme au paragraphe précédent.

## II.2.B. — LES ÉQUATIONS DU FILTRAGE.

Nous ne donnerons que les étapes des démonstrations et ferons quelques remarques.

**THÉORÈME II.2.** — (F. K. K.). *Sous les hypothèses de II.3.A, pour tout  $t \geq 0$ , pour tout  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(L)$ , le filtre  $\Pi_t$  de  $X$  pour la filtration  $(F_t)_{t \in T}$  vérifie*

$$\begin{aligned} \Pi_t(f) = \Pi_0(f) + \int_0^t \Pi_s(Lf) ds \\ + \int_0^t \langle dv_s \{ \Pi_s(fh) - \Pi_s(f)\Pi_s(h) \} \rangle \quad \mathbb{P}_\mu\text{-p. s.} \end{aligned}$$

où  $v_t$  est le processus d'innovation défini par le lemme II.1.

**LEMME II.1.** — *Le processus d'innovation  $v_t = Z_t - \int_0^t \Pi_s(h) ds$  est un  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P}_\mu)$  processus de Wiener à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .*

*Remarque 1.* — L'intégrale stochastique du théorème II.2 est une intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien d'un processus optionnel. On sait, en outre, que pour une martingale continue, l'intégrale stochastique d'un processus optionnel est indistinguable de l'intégrale stochastique de sa projection prévisible.



LEMME II. 2. — Toute  $v. a. Y$  appartenant à  $L^2(F_\infty)$  admet une représentation comme intégrale stochastique par rapport à l'innovation  $v_t$  :

$$Y = E_\mu(Y) + \int_0^\infty \phi_s dv_s$$

où  $\phi_s$  est un processus  $F$ -prévisible tel que  $E_\mu\left(\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right) < \infty$ .

Remarque 2. — Meyer dans [16] démontre ce lemme dans le cas où  $(F_t)_{t \in T}$  est la filtration naturelle de  $Z$ , mais sa démonstration est encore valide sous nos hypothèses.

Le lemme II. 2 entraîne alors les remarques suivantes :

Remarque 3. — Toute  $(\Omega, A, (F_{t+})_{t \in T}, \mathbb{P}_\mu)$  martingale de carré intégrable (resp. martingale locale) est une  $(\Omega, A, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P}_\mu)$  martingale de carré intégrable (resp. martingale locale) continue représentable par une intégrale stochastique par rapport à l'innovation  $v$ .

Remarque 4. — Les processus  $F_t$ -prévisibles et  $F_{t+}$ -optionnels coïncident. En effet :

Soit  $S$  un  $F_{t+}$ -temps d'arrêt (t. a.) arbitraire.  $A_t(\omega) = 1_{[S, \infty[}$  définit un processus croissant adapté c. à. d.. Si  $A_t^P$  désigne sa projection duale  $F_t$ -prévisible, le compensé  $\check{A}$  de  $A$ ,  $\check{A} = A - A^P$  est une  $(\Omega, A, (F_{t+})_{t \in T}, \mathbb{P}_\mu)$  martingale, d'où une  $(\Omega, A, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P}_\mu)$  martingale continue à variation finie, nulle en 0, d'où nulle partout. Donc  $A = A^P$  est  $F_t$ -prévisible, ce qui entraîne le résultat car les  $F_{t+}$ -optionnels sont engendrés par les intervalles stochastiques du type  $[[S, \infty[$ .

Remarque 5. — On obtient alors que  $F_{t+} = F_t = F_{t-}$ , c'est-à-dire que la filtration  $(F_t)_{t \in T}$  satisfait aux conditions habituelles de Meyer. En effet, supposons qu'il existe un  $t > 0$  tel que  $F_{t+} \neq F_{t-}$ . Soit alors  $Y$  appartenant à  $L^2(F_{t+})$  et orthogonal à  $L^2(F_{t-})$ . Le processus  $Y_s = Y1_{t < s}$  est un processus à variation finie c. a. d. l. a. g., discontinu en  $t$  si  $Y$  est différent de 0. D'autre part  $Y_s$  est une martingale, car  $Y$  est orthogonale à  $F_{t-}$ , continue d'après le lemme II. 2 Or elle est à variation finie, nulle en 0 et donc identiquement nulle.

Remarque 6. —  $\Pi_t(f)$  est alors une bonne version de l'espérance conditionnelle  $E(f(X_t) | F_t)$ ; ce qui est l'interprétation classique de F. K. K. et Kunita.

LEMME II.3. — Posons pour  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(L)$

$$M_t^f = f(X_t) - \Pi_0(f) - \int_0^t Lf(X_s) ds$$

$$\bar{M}_t^f = \Pi_t(f) - \Pi_0(f) - \int_0^t \Pi_s(Lf) ds$$

Alors  $M_t^f$  (respectivement  $\bar{M}_t^f$ ) est une  $(\Omega, \mathcal{A}, (G_t)_{t \in T}, \mathbb{P}_\mu)$  (resp.  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P}_\mu)$ ) martingale continue de carré intégrable.

$\bar{M}_t^f$  est alors, d'après le lemme II.2, représentable comme une intégrale stochastique de l'innovation que l'on identifie à celle du théorème II.2.

On a enfin le second résultat dû à Kunita qui s'appuie sur les mêmes lemmes que le théorème II.2, mais aussi sur les propriétés markoviennes du signal, et plus particulièrement les propriétés de martingale associées à son semi-groupe.

THÉORÈME II.3. — (Kunita). Sous les hypothèses de II.3.A, pour tout  $t \geq 0$ , pour tout  $f$  appartenant à  $\mathcal{B}(S)$ , le filtre  $\Pi_t$  de  $X$  pour la filtration  $(F_t)_{t \in T}$  vérifie :

$$\begin{aligned} \Pi_t(f) &= \Pi_0(P_t f) \\ &+ \int_0^t \langle dv_s \{ \Pi_s(h \times P_{t-s}(f)) - \Pi_s(h) \Pi_s(P_{t-s}(f)) \} \rangle \quad \mathbb{P}_\mu\text{-p. s.} \end{aligned}$$

Remarque 7. — Les égalités des théorèmes II.2 et II.3 ont lieu en dehors d'un ensemble négligeable dépendant de  $t$  et de  $f$  et non au sens de l'indistinguabilité des processus.

### III. ÉQUIVALENCE DES ÉQUATIONS DU FILTRAGE

Nous allons, indépendamment de tout problème de filtrage, définir deux équations différentielles stochastiques à valeurs mesures, et en nous inspirant de la formulation de Yamada-Watanabe (cf. [22]) pour les équations différentielles stochastiques d'Ito, définir la notion de solution de ces équations. Nous montrerons ensuite l'équivalence de ces équations, c'est-à-dire que toute solution de l'une est solution de l'autre.

#### III.1 Hypothèses : les équations (1) et (2)

Soient :

- $(S, \mathcal{S}, \mathcal{B}(S), C_b(S), \mathcal{M}(S), \tilde{\mathcal{M}}(S), \mathfrak{M}, \tilde{\mathfrak{M}})$ , les ensembles définis au II.1.B.
- $P_t$  un semi-groupe borélien sur  $\mathcal{B}(S)$  conservatif de générateur infinitésimal faible  $(L, \mathcal{D}(L))$ .

—  $h$  une fonction borélienne bornée sur  $S$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u_t)_{t \in T}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  un ensemble vérifiant les conditions suivantes :

a)  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilité muni d'une filtration complète et continue à droite  $(F_t)_{t \in T}$  sur  $T$  un intervalle fini de  $\mathbb{R}^+$ .

b)  $u_0$  est une v. a. sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathcal{M}(S)$ ,  $F_0$ -mesurable.

c)  $(u_t)_{t \in T}$  est un processus stochastique défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathcal{M}(S)$  c. a. d. pour la topologie étroite sur  $\mathcal{M}(S)$  de valeur initiale  $u_0$ , et adapté à la filtration  $(F_t)_{t \in T}$ .

d)  $(B_t)_{t \in T}$  est un  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  processus de Wiener à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

**DÉFINITION III. 1.** — On appelle solution de l'équation (1), respectivement de l'équation (2), tout ensemble  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u_t)_{t \in T}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  vérifiant les conditions a), b), c), d) ci-dessus et la condition e) suivante :

Pour tout  $f$  de  $\mathcal{D}(L)$ , pour tout  $t$  positif ou nul

$$(1) \quad u_t(f) = u_0(f) + \int_0^t u_s(Lf) ds + \int_0^t \langle dB_s, \{ u_s(fh) - u_s(f)u_s(h) \} \rangle \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

respectivement :

Pour tout  $f$  de  $\mathcal{B}(S)$ , pour tout  $t$  positif ou nul

$$(2) \quad u_t(f) = u_0(P_t f) + \int_0^t \langle dB_s, \{ u_s(h \times P_{t-s} f) - u_s(h)u_s(P_{t-s} f) \} \rangle \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

*Remarque 1.* — Pour tout  $f$  de  $\mathcal{B}(S)$ ,  $u_t(f)$  est un processus  $F_t$ -optionnel. En effet, par hypothèse,  $u_t$  est c. a. d. pour la topologie étroite de  $\mathcal{M}(S)$  et  $F_t$ -adapté; c'est-à-dire pour tout  $f$  de  $C_b(S)$ ,  $u_t(f)$  est un processus  $F_t$ -adapté et  $\mathbb{P}$ -p. s. c. a. d. à valeurs réelles c'est-à-dire  $F_t$ -optionnel. Une simple application du théorème des classes monotones (cf. [15], IT 20) donne alors le résultat, car  $u_{t\omega}$  est une probabilité sur  $S$  et on peut appliquer les théorèmes de convergence dominée. L'intégrale stochastique de l'équation (1) est alors définie comme une intégrale stochastique de processus optionnels par rapport à un processus de Wiener.

*Remarque 2.* — L'intégrale stochastique de l'équation (2) a un sens grâce à la remarque précédente et au fait que, comme au théorème II. 3,  $u_t$  peut se prolonger aux fonctions  $f(t, x)$  boréliennes en  $(t, x)$  sur  $(T \times S, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{S})$ .

*Remarque 3.* — On dira indifféremment, quand il n'y aura pas d'ambiguïté,  $u$  ou  $(u_t, u_0, B_t)$  est une solution de l'équation (1) ou (2).

Avant d'aborder la démonstration de l'équivalence des deux équations du filtrage, montrons deux lemmes importants pour la suite.

### III.2 Deux lemmes

Le premier sera une application du théorème des classes monotones, le second une formule du type Fubini, portant sur des intégrales du genre :

$$\int_0^v du \int_0^t dB_s m(u, s, \omega)$$

où  $m$  est un processus  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{O}$ -mesurable convenablement intégrable et  $B$  est un mouvement brownien.  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  désigne les boréliens de  $\mathbb{R}$  pour la variable  $u$  et  $\mathcal{O}$  les optionnels pour les variables  $(s, \omega)$  (cf. [9] etc.).

LEMME III.1. — Soient :

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité ;
- $(U, \mathcal{U})$  un espace mesurable ;
- $K$  un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{B}(U)$  muni de la topologie faible dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  tel que  $K1 = 0$   $\mathbb{P}$ -p. s.

Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{B}(U)$  telles que  $Kf = 0$   $\mathbb{P}$ -p. s. Si  $\mathcal{M}$  est une partie de  $\mathcal{H}$  stable par multiplication,  $\mathcal{H}$  contient l'ensemble des fonctions bornées mesurables par rapport à la tribu engendrée par les éléments de  $\mathcal{M}$ .

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que nous sommes dans les conditions d'application du théorème des classes monotones ([15] IT 20).

Or, par linéarité de  $K$ ,  $\mathcal{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}(U)$ , celui-ci contenant les constantes par hypothèse. De plus, on peut écrire pour tout  $f$  et  $f_n$  de  $\mathcal{B}(U)$ .

$$E(Kf)^2 \leq 2E(K(f - f_n))^2 + 2E(Kf_n)^2$$

Si  $f$  est limite uniforme d'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{H}$ ,  $f$  appartient à  $\mathcal{B}(U)$ ; de même, si  $f$  est limite croissante de fonctions positives  $f_n$  de  $\mathcal{H}$ , uniformément bornées. L'inégalité précédente, ajoutée à la continuité de  $K$ , entraîne que dans les deux cas  $f$  appartient à  $\mathcal{H}$ .

LEMME III.2. — Sous les hypothèses et notations de III.1, si  $m(u, s, \omega)$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  définie sur  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{O})$  de

carré du  $\otimes dP \otimes ds$ -intégrable, l'identité suivante est valide  $\mathbb{P}$ -p. s. pour tout réel positif  $t$  et tout réel  $v$  :

$$(5) \quad \int_0^t \langle dB_s, \int_0^v du m(u, s, \omega) \rangle = \int_0^v du \int_0^t \langle dB_s, m(u, s, \omega) \rangle$$

*Démonstration.* — Nous montrerons d'abord que les deux membres de (5) sont bien définis, puis nous appliquerons le lemme III. 1 après avoir montré que l'identité (5) est vraie pour des fonctions  $m$ , élémentaires. Nous travaillerons bien sûr sur des fonctions réelles  $m$ .

a) Le théorème de Fubini classique montre que  $\int_0^v du m(u, s, \omega)$  est dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{O}, ds \otimes dP)$  et donc le premier membre de (5) est parfaitement défini dans  $L^2(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ . La définition du second membre est moins évidente. Mais c'est un cas particulier d'un théorème de [4] sur les intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre. En effet,  $\int_0^t dB_s m(u, s, \omega)$  est indistinguable d'un processus  $X : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\mathcal{B}_u(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{O}_t)$ -mesurable et continu en  $t$   $\mathbb{P}$ -p. s.

b) Montrons d'abord que (5) est vraie pour toutes les fonctions  $m(u, s, \omega)$  bornées de  $(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^+, \mathcal{B}_u(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{O}_s)$ . Reprenant les notations du lemme III.1, appelons :

$$U = \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad \mathcal{U} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{O}$$

De même, la différence des deux membres de (5) définit un opérateur  $K$  de  $\mathcal{B}(U)$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  linéaire continu tel que  $K1 = 0$   $\mathbb{P}$ -p. s.

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{B}(U)$  de la forme suivante :

$$m(u, s, \omega) = 1_{(u, u_2)}^{(u)} 1_{\llbracket SS' \rrbracket}^{(s, \omega)}$$

avec  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \infty$  et  $S, S'$  deux  $F_t$ -temps d'arrêt arbitraires.

Il est immédiat que  $\mathcal{M}$  est une partie de  $\mathcal{H}$  stable par multiplication. D'où  $\mathcal{H}$  contient toutes les fonctions bornées mesurables par rapport à la tribu engendrée par  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{B}_u(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{O}_s$  (cf. [3] IV T 64).

c) (5) est aussi vrai pour les fonctions  $m$  seulement de carré intégrable. En effet

$$m = \lim_{N \rightarrow \infty} \wedge (m \wedge N) \vee - N \quad \text{et donc} \quad Km = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

### III.3 Équivalence des équations (1) et (2)

**DÉFINITION.** — On dit qu'il y a équivalence des équations (1) et (2) si toute solution  $(\Omega, \mathbb{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u_t)_{t \in T}, (I_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  de (1) est solution de (2) et réciproquement.

THÉORÈME III.1. — Il y a équivalence des équations (1) et (2).

*Démonstration.* — Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u_t)_{t \in T}, (I_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  une solution de l'équation (1) ou (2). Si  $f$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$  on considère la différence  $v(t, f)$  des deux seconds membres des équations (1) et (2).

$$(6) \quad v(t, f) = u_0(P_t f) + \int_0^t dI_s \{ u_s[h \times P_{t-s} f] - u_s[h]u_s[P_{t-s} f] \} \\ - u_0(f) - \int_0^t u_s(Lf) ds - \int_0^t dI_s \{ u_s[fh] - u_s[f]u_s[h] \}$$

On peut trouver dans [8] les résultats utilisés dans la suite sur les semi-groupes.

a) Faisons quelques transformations sur  $v(t, f)$   $f$  étant dans  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ ,  $Lf$  appartient à  $\mathcal{B}(\mathbb{S})$  et donc toutes les fonctions et mesures qui interviennent dans (6) sont bornées. En appliquant alors plusieurs fois le théorème de Fubini classique, il vient :

$$(7) \quad v(t, f) = \int_0^t u_0(P_s Lf) ds - \int_0^t u_s(Lf) ds \\ + \int_0^t dI_s \int_0^{t-s} dk \{ u_s[hP_k Lf] - u_s[h]u_s[P_k Lf] \}$$

sachant que pour tout  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$

$$P_t f - f = \int_0^t P_s(Lf) ds$$

La fonction de  $s, k$ , et  $\omega$  dans l'intégrale double est bornée et  $\mathcal{B}_k(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{O}_s$  mesurable, d'après la définition des solutions de (1) ou (2) et la continuité de l'application  $(t \rightarrow P_t f)$  pour  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ . On peut donc appliquer le lemme III.2 :

$$(8) \quad v(t, f) = \int_0^t u_0(P_s Lf) ds - \int_0^t u_s(Lf) ds \\ + \int_0^t dk \int_0^{t-k} \langle dI_s \{ u_s[hP_k Lf] - u_s[h]u_s[P_k Lf] \} \rangle$$

b) Supposons que  $u$  soit solution de (1). Nous allons montrer que  $u_t(f)$  vérifie l'égalité (2)  $\mathbb{P}$ -p. s. pour les résolvantes de fonctions du domaine  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ , puis les fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$  de  $C_b(\mathbb{S})$  et de  $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ . Ce qui entraîne que  $u$  est aussi solution de (2).

i) Si  $f$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ , on pose

$$g_\lambda = R_\lambda f$$

une résolvante de  $f$ . Remarquons alors que  $g_\lambda, Lg_\lambda, LLg_\lambda$  existent et sont dans  $\mathcal{B}(S)$  car :

$$\lambda g_\lambda - Lg_\lambda = f$$

D'autre part,  $\lambda g_\lambda$  a pour limite faible  $f$  dans  $\mathcal{B}(S)$  quand  $\lambda$  tend vers l'infini, c'est-à-dire que  $\lambda g_\lambda$  converge simplement vers  $f$  et reste borné uniformément en  $\lambda$ . On écrira  $g = g_\lambda$  dans la démonstration.  $u$  étant solution de ((1),  $u_0, I_t$ ), comme  $Lg$  appartient au domaine  $\mathcal{D}(L)$  on a :

$$(9) \quad \int_0^{t-k} dI_s \{ u_s[hP_k Lg] - u_s[h]u_s[P_k Lg] \} \\ = u_{t-k}[P_k Lg] - u_0[P_k Lg] - \int_0^{t-k} u_s[P_k LLg] ds$$

Reportant (9) dans (8) où  $f$  est remplacée par  $g_\lambda$  il vient :

$$(10) \quad v(t, g) = \int_0^t dk u_{t-k}[P_k Lg] - \int_0^t u_s(Lg) ds - \int_0^t dk \int_0^{t-k} u_s(P_k LLg) ds$$

$P_k LLg$  appartenant à  $\mathcal{B}(S)$ , on peut appliquer deux fois le théorème de Fubini à la dernière intégrale de (10). On obtient alors :

$$\int_0^t dk \int_0^{t-k} u_s(P_k LLg) ds \\ = \int_0^t ds \int_0^{t-s} u_s[P_k LLg] ds = \int_0^t ds \{ u_s[P_{t-s} Lg] - u_s[Lg] \}$$

D'où finalement :  $v(t, g) = 0$   $\mathbb{P}$ -p. s. pour toute fonction  $g = R_\lambda f$  où  $f$  appartient à  $\mathcal{D}(L)$ .

ii) Remarquons que si  $u$  est solution de (1), et si  $g$  appartient à  $\mathcal{D}(L)$

$$(11) \quad v(t, g) = u_0(P_t g) + \int_0^t dI_s \{ u_s[hP_{t-s} g] - u_s[h]u_s[P_{t-s} g] \} - u_t(g)$$

Appelons  $\bar{v}(t, g)$  le second membre de (11). L'application  $g \rightarrow \bar{v}(t, g)$  de  $\mathcal{B}(S)$  dans  $L^2(\Omega, A, \mathbb{P})$  est linéaire et continue pour la topologie faible sur  $\mathcal{B}(S)$  grâce au théorème de convergence dominée. En effet,  $u_{t\omega}$  est une probabilité sur  $S$  et par exemple :

$$E \left[ \int_0^t dI_s u_s \{ hP_{t-s}(\lambda g_\lambda - f) \} \right]^2 = E \int_0^t ds \{ u_s[hP_{t-s}(\lambda g_\lambda - f)] \}^2$$

D'où comme  $\lambda g_\lambda$  converge faiblement vers  $f$  quand  $\lambda$  tend vers l'infini,

$$\bar{v}(t, f) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

pour tout  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(L)$ . D'autre part, la fermeture faible de  $\mathcal{D}(L)$

dans  $\mathcal{B}(S)$  contient  $C_b(S)$ . D'où la continuité pour la topologie faible sur  $\mathcal{B}(S)$  de  $f \rightarrow \bar{v}(t, f)$  définie par (11) entraîne que

$$\bar{v}(t, f) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

pour tout  $f$  de  $C_b(S)$ . Et donc, si  $u$  est solution de (1)  $u_t(f)$  vérifie (2) pour tout  $f$  continue bornée sur  $S$ .

iii) Nous nous trouvons dans les conditions d'application du lemme III.1 avec  $(U, \mathcal{U}) \equiv (S, \mathcal{S})$  et  $Kf \equiv \bar{v}(t, f)$  où  $\bar{v}(t, f)$  est défini par (11).

$\mathcal{H}$  est l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{B}(S)$  telles que  $Kf = 0$   $\mathbb{P}$ -p. s.

$\mathcal{M}$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $S$  de la boule unité, et engendre la tribu  $\mathcal{S}$  des boréliens de  $S$  car  $S$  est métrique. Donc  $\mathcal{H}$  coïncide avec  $\mathcal{B}(S)$  ce qui signifie que si  $u$  est solution de (1),  $u$  est solution de (2).

c) Supposons inversement que  $u$  soit solution de (2).

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{D}(L)$ , on a :

$$(12) \quad u_s(Lf) = u_0(P_s Lf) + \int_0^s dI_k \{ u_k[hP_{s-k} Lf] - u_k[h]u_k[P_{s-k} Lf] \}$$

ce qui permet d'écrire la deuxième intégrale du second membre de (8) comme

$$(13) \quad \int_0^t u_s(Lf) ds = \int_0^t ds u_0(P_s Lf) + \int_0^t ds \int_0^s dI_k \{ u_k[hP_{s-k} Lf] - u_k[h]u_k[P_{s-k} Lf] \}$$

Appliquons à nouveau le lemme III.2

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_0^s dI_k \{ u_k[hP_{s-k} Lf] - u_k[h]u_k[P_{s-k} Lf] \} \\ = \int_0^t dI_k \int_k^t ds \{ u_k[hP_{s-k} Lf] - u_k[h]u_k[P_{s-k} Lf] \} \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'intégrale stochastique de (7). D'où, d'après (13) et (7)

$$v(t, f) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

pour tout  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(L)$ . Ce qui signifie que  $u$  est aussi solution de l'équation (1).

Nous avons achevé ainsi la démonstration de l'équivalence des équations (1) et (2).

#### IV. LES ÉQUATIONS SIMPLIFIÉES DU FILTRAGE : ÉQUIVALENCES

Nous allons voir qu'il est possible de définir deux autres équations différentielles stochastiques à valeurs mesures plus simples que les précé-



dentes, mais de type peu différent. La simplification est de deux ordres.

D'une part, les intégrales stochastiques qui interviennent ont un terme de moins, ce qui, dans le cas où  $S = \mathbb{R}^n$  et où les solutions de ces équations sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, supprime une non-linéarité très gênante pour le calcul pratique des solutions.

D'autre part, quand toutes nos hypothèses sont celles d'un problème de filtrage, les équations simplifiées font intervenir l'observation du signal et non l'innovation qui elle, n'est pas directement accessible et qu'il est nécessaire d'évaluer à chaque instant.

Quoi qu'il en soit, nous définissons ces équations en général, nous montrons qu'elles sont équivalentes entre elles, mais aussi qu'elles sont pseudo-équivalentes aux deux premières, c'est-à-dire que toute solution du premier système permet d'obtenir une solution du second et réciproquement.

#### IV.1 Les équations (3) et (4). Définition-équivalence

Nous conservons ici les hypothèses et notations de III.1. Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (\tilde{u}_t)_{t \in T}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  un ensemble vérifiant les conditions suivantes :

a)  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilité muni d'une filtration complète et continue à droite  $(F_t)_{t \in T}$  sur  $T$  intervalle fini de  $\mathbb{R}^+$ .

b)  $u_0$  est une v. a. sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathcal{M}(S)$ ,  $F_0$ -mesurable.

c)  $\tilde{u}_t$  est un processus stochastique défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$ , c. a. d. pour la topologie étroite, de valeur initiale  $u_0$ , adapté à la filtration  $(F_t)_{t \in T}$  et tel que  $\sup_t E \|\tilde{u}_t\|^2 < \infty$ .

d)  $(B_t)_{t \in T}$  est un  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  processus de Wiener à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

DÉFINITION IV.1. — On appelle solution de l'équation (3), respectivement de l'équation (4) tout ensemble  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (\tilde{u}_t)_{t \in T}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  vérifiant les conditions a), b), c), d) ci-dessus et la condition e) suivante :

e) Pour tout  $f$  de  $\mathcal{D}(L)$ , pour tout  $t$  positif ou nul

$$(3) \quad \tilde{u}_t(f) = u_0(f) + \int_0^t \tilde{u}_s(Lf) ds + \int_0^t \langle dB_s, \tilde{u}_s(fh) \rangle \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

Respectivement :

Pour tout  $f$  de  $\mathcal{B}(S)$ , pour tout  $t$  positif ou nul

$$(4) \quad \tilde{u}_t(f) = u_0(P_t f) + \int_0^t \langle dB_s, \tilde{u}_s(h \times P_{t-s} f) \rangle \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

on a les mêmes remarques qu'au III.

**THÉORÈME IV. 1.** — *Il y a équivalence entre les équations (3) et (4).*

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que dans la démonstration du théorème III. 1, nous ne nous sommes servis que du caractère positif de  $u_t$  et de la propriété  $\sup_t E \|u_t\|^2 < \infty$ .

Donc la démonstration du théorème IV. 1 pour  $\tilde{u}$  est la même que celle du théorème III. 1 pour  $u$ .

#### IV. 2 Pseudo-équivalence des systèmes d'équations (1), (2) et (3), (4)

La première partie de cette pseudo-équivalence est prouvée par le théorème suivant :

**THÉORÈME IV. 2.** — *Sous les hypothèses de III. 1, si  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u_t)_{t \in T}, (I_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  est une solution des équations (1) et (2), appelons :*

$$\begin{aligned} - O_t &= I_t + \int_0^t u_s(h) ds \\ - \chi_t &= \exp - \left\{ \int_0^t u_s(h) dI_s + \frac{1}{2} \int_0^t (u_s(h))^2 ds \right\} = \psi_t^{-1} \end{aligned}$$

$\chi_t$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale et nous pouvons définir :

$$\begin{aligned} - d\tilde{\mathbb{P}} &= \chi_T d\mathbb{P} \\ - \tilde{u}_t &= \psi_t u_t \end{aligned}$$

Alors,  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (\tilde{u}_t)_{t \in T}, (O_t)_{t \in T}, \tilde{\mathbb{P}})$  est une solution des équations (3) et (4).

*Démonstration.* — (Les notations  $I_t, O_t$  sont là pour rendre plus évidentes les applications au filtrage.)

Comme  $u_s(h)$  est un processus borné, les probabilités  $\mathbb{P}$  et  $\tilde{\mathbb{P}}$  définies dans l'énoncé du théorème IV. 2 sont équivalentes. Le théorème de Girsanov (cf. [19]) entraîne que le processus  $O$  est un  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \tilde{\mathbb{P}})$  processus de Wiener.

— De plus,  $\psi_t$  est une  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \tilde{\mathbb{P}})$  martingale continue de carré intégrable et

$$\sup_t \tilde{E} \| \tilde{u}_t \|^2 = \tilde{E} (\psi_T)^2 < \infty$$

— Il suffit enfin de vérifier que  $\tilde{u}$  satisfait à la condition e) de la définition d'une solution de l'équation (3) (équivalente à l'équation (4)). Pour cela, pour tout  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(L)$ , appliquons la formule de Ito au produit des deux  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \tilde{\mathbb{P}})$ -semi-martingales  $\psi_t$  et  $u_t(f)$  où  $u_t(f)$  est défini par le second membre de l'équation (1). Rappelons que l'intégrale

stochastique de processus prévisibles par rapport à des semi-martingales, ne dépend pas d'un changement de probabilités équivalentes.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(f) = u_0(f) &+ \int_0^t \psi_s u_s(Lf) ds + \int_0^t \psi_s dI_s \{ u_s(fh) - u_s(f)u_s(h) \} \\ &+ \int_0^t u_s(f) \psi_s u_s(h) dO_s + \int_0^t \psi_s u_s(h) \{ u_s(fh) - u_s(f)u_s(h) \} ds \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$(3) \quad \tilde{u}_t(f) = u_0(f) + \int_0^t \tilde{u}_s(Lf) ds + \int_0^t dO_s \tilde{u}_s(fh)$$

On a donc montré que l'application  $u_t \rightarrow \tilde{u}_t = \psi_t u_t$ , transforme toute solution des équations (1) et (2) en une solution des équations (3) et (4).

Montrons la réciproque dans le théorème suivant :

THÉORÈME IV. 3. — *Sous les hypothèses de III. 1.*

*Si  $(\Omega, \mathbb{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (\tilde{u}_t)_{t \in T}, (O_t)_{t \in T}, \tilde{\mathbb{P}})$  est une solution des équations (3) et (4),  $\tilde{u}_t(1)$  est  $\tilde{\mathbb{P}}$ -p. s. strictement positif. Notons alors :*

$$\begin{aligned} - I_t &= O_t - \int_0^t (\tilde{u}_s(h)/\tilde{u}_s(1)) ds \\ - \psi_t &= \exp \left\{ \int_0^t (\tilde{u}_s(h)/\tilde{u}_s(1)) dO_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\tilde{u}_s(h)/\tilde{u}_s(1))^2 ds \right\} \end{aligned}$$

$\psi_t$  est une  $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingale et nous pouvons définir :

$$\begin{aligned} - dP &= \psi_T d\tilde{\mathbb{P}} \\ - u_t &= \tilde{u}_t/\tilde{u}_t(1) \end{aligned}$$

Alors  $(\Omega, \mathbb{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u_t)_{t \in T}, (I_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  est une solution des équations (1) et (2).

*Démonstration.* — Montrons d'abord que  $\tilde{u}_t(1)$  est  $\tilde{\mathbb{P}}$ -p. s. strictement positif, puis, que  $\psi_t = \tilde{u}_t(1)$ .

En effet, par définition,  $\tilde{u}_t(1)$  est positif ou nul et égal à

$$\tilde{u}_t(1) = 1 + \int_0^t dO_s \tilde{u}_s(h) \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p. s.}$$

Comme  $h$  est borné, c'est une  $(\Omega, \mathbb{A}, (F_t)_{t \in T}, \tilde{\mathbb{P}})$  martingale de carré intégrable. Supposons que l'ensemble  $\{ (t, \omega)/\tilde{u}_{t\omega}(1) = 0 \}$  ne soit pas évanescent. Définissons alors :  $\tau = \inf \{ t/\tilde{u}_t(1) = 0 \}$   $\tau$  est un t. a. car  $\tilde{u}_t(1)$  est continue. Sur  $[[\tau, T]]$ ,  $\tilde{u}_t(1)$  est nulle, car (cf. [19]) toute martingale  $M$  positive garde la valeur 0 à partir de l'instant  $\inf \{ t/M_t = 0 \text{ ou } M_{t-} = 0 \}$ . D'où

$\tilde{u}_t(1) = \tilde{u}_{t \wedge \tau}(1)$  partout ; or  $\tilde{u}_{t \wedge \tau}(1)$  est l'unique solution de l'équation :

$$X_t = 1 + \int_0^t X_{s-} [\tilde{u}_{t \wedge \tau}(h) / \tilde{u}_{t \wedge \tau}(1)] dO_s$$

avec  $\tilde{u}_{t \wedge \tau}(h) / \tilde{u}_{t \wedge \tau}(1)$  borné par  $\sup |h| \cdot \tilde{u}_{t \wedge \tau}(1)$  et donc  $\tilde{u}_t(1)$  est alors (cf. [19]) strictement positif  $\mathbb{P}$ -p. s. ce qui contredit notre hypothèse.

Montrons alors que  $u_t = \tilde{u}_t / \tilde{u}_t(1)$  est solution des équations (1) et (2).

Primo, la martingale  $\tilde{u}_t(1)$  est l'unique solution de l'équation :

$$\tilde{u}_t(1) = 1 + \int_0^t dO_s \tilde{u}_s(1) \{ \tilde{u}_s(h) / \tilde{u}_s(1) \}$$

c'est-à-dire que  $\tilde{u}_t(1) = \psi_t$ . Comme  $|\tilde{u}_t(h)| \leq \sup |h| \times \tilde{u}_t(1)$ , les deux probabilités  $\mathbb{P}$  et  $\tilde{\mathbb{P}}$  sont équivalentes et  $[\tilde{u}_t(h)]^{-1}$  est une  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  semi-martingale.

Secundo,  $u_t$  ainsi défini, vérifie les propriétés a), b), c), d), e) de définition des solutions de l'équation (3). Montrons la propriété e).

Appliquons la formule de Ito au produit des deux  $\mathbb{P}$ -semi-martingales  $[\tilde{u}_t(1)]^{-1}$  et  $\tilde{u}_t(f)$ , pour  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(L)$ ,  $\tilde{u}_t(f)$  étant défini par le second membre de l'équation (3). Il vient :

$$\begin{aligned} u_t(f) = u_0(f) + \int_0^t (\tilde{u}_s(Lf) / \tilde{u}_s(1)) ds \\ + \int_0^t dI_s(\tilde{u}_s(fh) / \tilde{u}_s(1)) - \int_0^t \tilde{u}_s(f) \tilde{u}_s(h) [\tilde{u}_s(1)]^{-2} dI_s \\ + \int_0^t ds \tilde{u}_s(f) [\tilde{u}_s(h)]^2 [\tilde{u}_s(1)]^{-3} - \int_0^t \tilde{u}_s(fh) \tilde{u}_s(h) [\tilde{u}_s(1)]^{-2} ds \end{aligned}$$

On a démontré que l'application  $\tilde{u}_t \rightarrow u_t = \tilde{u}_t / \tilde{u}_t(1)$  transforme toute solution des équations (3) et (4) en une solution des équations (1) et (2) ; ce qui achève la démonstration de la pseudo-équivalence des deux systèmes d'équations du filtrage.

## V. EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS DES SYSTÈMES (1), (2) ET (3), (4)

Nous restreignons ici très légèrement les hypothèses des paragraphes précédents et nous utilisons l'article de Yamada-Watanabe [22] pour montrer les résultats d'existence et d'unicité trajectorielle de la solution de l'équation (2) de Kunita [10]. Ce faisant, nous démontrons, grâce aux paragraphes III et IV l'existence et l'unicité trajectorielle des solutions des équations (1), (3) et (4).

Rappelons que Yamada-Watanabe montre pour les équations différentielles stochastiques de Ito des résultats d'unicité ; en particulier l'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi ; mais aussi sous certaines hypothèses des résultats généraux d'existence.

Les démonstrations utilisent des propriétés de régularité des espaces canoniques des fonctions réelles continues sur  $\mathbf{R}^+$ , en particulier l'existence de versions régulières des espérances conditionnelles. Avec nos équations à valeurs mesures interviennent des espaces canoniques de fonctions à valeurs mesures possédant les mêmes propriétés.

— Signalons que, à la différence des paragraphes III et IV, nous aurons besoin ici des résultats du filtrage non linéaire rappelés au paragraphe II.

### V.1 Hypothèses et notations

—  $(S, \mathcal{S})$  désigne un espace polonais muni de sa tribu borélienne.  $\mathcal{B}(S)$ ,  $C_b(S)$ ,  $\mathcal{M}(S)$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\tilde{\mathfrak{M}}$  sont définis comme au II.1.B.

—  $(P_t)_{t \in T}$  est un semi-groupe sur  $\mathcal{B}(S)$  indexé par  $t$  dans  $T = [0, T]$ , conservatif de générateur infinitésimal faible  $(L, \mathcal{D}(L))$ , et tel qu'il existe pour tout  $\mu$  de  $\mathcal{M}(S)$  un processus de Markov à valeurs dans  $(S, \mathcal{S})$ , c. a. d. de semi-groupe  $P_t$  et de loi initiale  $\mu$ .

(Cette hypothèse est, en fait, la première hypothèse droite HD1 de Meyer [16]).

—  $h$  est une fonction borélienne bornée sur  $S$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$ .

Nous travaillerons, par la suite, sur les espaces canoniques suivants :

— Soit  $W_1$  (resp.  $W_2$ ) l'ensemble des fonctions de  $t$  appartenant à  $T$ , continues (resp. c. a. d.) à valeurs dans  $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}^d)$  (resp.  $(S, \mathcal{S})$ ).

— Soit encore  $W_3$ , l'ensemble des fonctions de  $t$ , c. a. d. à valeurs dans  $(\tilde{\mathcal{M}}(S), \tilde{\mathfrak{M}})$ .

On munit  $W_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de sa tribu borélienne naturelle  $\mathcal{B}_i$  et de la filtration croissante  $\mathcal{B}_i^t$  engendrée par les applications coordonnées  $W_{is}$  jusqu'à  $t$ .

On sait que  $\mathcal{B}_i = \bigvee_t \mathcal{B}_i^t$ .

D'après ([3], p. 118) comme  $(S, \mathcal{S})$  est polonais,  $(\mathcal{M}(S), \mathfrak{M})$  et  $(\tilde{\mathcal{M}}(S), \tilde{\mathfrak{M}})$  le sont aussi. De même  $(W_1, \mathcal{B}_1)$  [resp.  $(W_2, \mathcal{B}_2)$ ,  $(W_3, \mathcal{B}_3)$ ] est polonais (resp. cosouslinien, cosouslinien). Sur tous ces espaces, on peut définir des probabilités conditionnelles régulières (cf. [8]).

Nous n'utiliserons, grâce aux équivalences obtenues en III et IV que l'équation (4).

## V.2 Unicité

**DÉFINITION V. 1.** — On dit qu'il y a unicité trajectorielle pour l'équation (i) ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) si,  $(\Omega, \mathbb{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u_t)_{t \in T}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  et  $(\Omega, \mathbb{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u'_t)_{t \in T}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  étant deux solutions de (i) définies sur le même espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathbb{A}, (F_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  avec la même condition initiale  $u_0$  et le même mouvement brownien  $(B_t)$ , on a :  $u_t = u'_t$ .

**THÉORÈME V. 1.** — Il y a unicité trajectorielle pour l'équation (4).

*Démonstration.* — ([10], p. 373).

Pour tout  $f$  de  $\mathcal{B}(S)$ , on note  $\|f\| = \sup_S |f|$  et

$$\begin{aligned} \rho_t(f) &= E(u_t(f) - u'_t(f))^2 \\ \rho_t(f) &= E \left[ \int_0^t dB_s(u_s - u'_s)(hP_{t-s}f) \right]^2 = \int_0^t ds \rho_s(hP_{t-s}f) \end{aligned}$$

Or :  $\rho_t(f) \leq 4 \|f\|^2$

Par itération il vient :

$$\rho_t(f) \leq 4 \|h\|^{2n} \|f\|^2 \frac{t^n}{n!}$$

Et donc  $\rho_t(f) = 0$  c'est-à-dire que  $u_t(f)$  et  $u'_t(f)$  ne diffèrent pour tout  $t$  et pour tout  $f$  que sur un ensemble négligeable. La continuité à droite des solutions de (4), au sens de la convergence étroite et la séparabilité de  $C_b(S)$ , entraînent alors que les deux processus  $u$ . et  $u'$ . à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$  sont indistinguables.

## V.3 Un résultat de filtrage

**THÉORÈME V. 2.** — Pour toute mesure de probabilité  $\nu$  sur  $(\mathcal{M}(S), \mathfrak{M})$  il existe une solution de (4),  $(\Omega, \mathbb{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, (u_t)_{t \in T}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ , telle que la loi de probabilité de  $u_0$  soit  $\nu$  sur  $\mathcal{M}(S)$ .

*Démonstration.* — On va définir les différents éléments d'un problème de filtrage, où les conditions initiales sont données par la tribu engendrée par le filtre initial  $u_0$ , supposé connu, et satisfaisant aux hypothèses de II. 2. A.

a) Sur  $(\mathcal{M}(S), \mathfrak{M}, \nu)$ , considérons l'identité de  $\mathcal{M}(S)$ ,  $u_0$  qui est bien sûr de loi  $\nu$ .  $\sigma(u_0)$  la tribu engendrée par  $u_0$  est  $\mathfrak{M}$  toute entière. Soit  $\mu$  la moyenne de  $u_0$  par rapport à  $\nu$

$$\mu = \int_{\mathcal{M}(S)} u_0(m) \nu(dm) = \int_{\mathcal{M}(S)} m \nu(dm)$$

$\mu$  est la probabilité sur  $S$  telle que

$$\mu(f) = \int_{m \in \mathcal{M}(S)} m(f) \nu(dm) \quad \text{pour } f \text{ appartenant à } \mathcal{B}(S).$$

b) L'hypothèse HD1 sur  $P_t$  entraîne que l'on peut construire un processus de Markov canonique  $X$  c. a. d. de semi-groupe  $P_t$  et de loi initiale  $\mu$  définie plus haut.

C'est-à-dire : il existe une probabilité unique  $\mathbb{P}_\mu$  sur  $(W_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^t)$  l'espace canonique des fonctions de  $t$ , c. a. d., à valeurs dans  $(S, \mathcal{S})$ , faisant des applications coordonnées  $(W_{2t})_{t \in T} = (X_t)_{t \in T}$  un processus de Markov de semi-groupe  $P_t$  et de loi initiale  $\mu$ .

Le problème est alors d'agrandir l'espace  $(W_2, \mathcal{B}_2, \mathbb{P}_\mu)$  afin de construire  $W(t)$  le « bruit d'observation » et  $u_0$  le filtre initial.

c) Introduisons d'abord le bruit d'observation  $W(t)$ . Considérons l'espace de probabilité :

$$\begin{aligned} & (W_1 \times W_2, \mathcal{G}_\infty^0, \mathcal{G}_t^0, \mathbb{P}_\mu^{(2)}) \\ \text{où :} & \quad \mathcal{G}_t^0 = \mathcal{B}_1^t \otimes \mathcal{B}_2^t \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_\mu^{(2)} = \mathbb{P}_\mu \otimes \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$  est la mesure de Wiener sur  $(W_1, \mathcal{B}_1)$ .

Il est facile de voir que :

$X_t(w_1, w_2) = w_1(t)$  est un processus de Markov sur  $(W_1 \times W_2, \mathcal{G}_\infty^0, \mathcal{G}_t^0, \mathbb{P}_\mu^{(2)})$  de loi initiale  $\mu$ , et de semi-groupe  $P_t$ .  $W_t(w_1, w_2) = w_2(t)$  est un  $(W_1 \times W_2, \mathcal{G}_\infty^0, \mathcal{G}_t^0, \mathbb{P}_\mu^{(2)})$  processus de Wiener.

d) Pour introduire enfin la donnée initiale, définissons l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t^0, \tilde{\mathbb{P}}_\mu)$  suivant où :

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathcal{M}(S) \times W_1 \times W_2 \\ \mathcal{A} &= \mathfrak{M} \otimes \mathcal{G}_\infty^0 \\ \mathcal{A}_t^0 &= \mathfrak{M} \otimes \mathcal{G}_t^0 \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbb{P}}_\mu$  est le produit semi-direct sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  de  $\nu$  et  $(\mathbb{P}_m^{(2)}, m \in \mathcal{M}(S))$ ; de façon explicite on a, si  $A$  est un élément de  $\mathfrak{M}$  et  $B$  de  $\mathcal{G}_\infty^0$  :

$$\tilde{\mathbb{P}}_\mu(A \times B) = \int_{A(m)} \mathbb{P}_m^{(2)}(B) d\nu(m)$$

Soient sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t^0, \tilde{\mathbb{P}}_\mu)$  :

$$\begin{aligned} X_t(m, w_1, w_2) &= w_1(t) \\ W_t(m, w_1, w_2) &= w_2(t) \\ u_0(m, w_1, w_2) &= m \end{aligned}$$

Pour  $h$  appartenant à  $\mathcal{B}(S)$ , définissons :

$$Z_t(m, w_1, w_2) = \int_0^t h(X_s) ds + W_t$$

ou encore :

$$Z_t(m, w_1, w_2) = \int_0^t h(w_1(s)) ds + w_2(t)$$

Soient :  $F_t^0 = \sigma(Z_s, s \leq t)$  et  $(F_t)_{t \in T}$  la filtration complète déduite de  $(\mathfrak{M} \vee F_t^0)_{t \in T}$ .  $\mathfrak{M}$  est considérée ici comme la tribu des conditions initiales.

e) Ce modèle satisfait aux hypothèses de II.2.A :  $X_t(m, w_1, w_2) = w_1(t)$  est un  $(\Omega, \mathcal{A}, A_t^0, \tilde{\mathbb{P}}_\mu)$  Markov de semi-groupe  $P_t$  et de loi initiale  $\mu$ .  $W_t(m, w_1, w_2) = w_2(t)$  est un  $(\Omega, \mathcal{A}, A_t^0, \tilde{\mathbb{P}}_\mu)$  Wiener indépendant de  $X_t$ .  $\mathfrak{M}$  satisfait à l'hypothèse d'indépendance avec  $\mathcal{G}_t^0$  conditionnellement à  $\sigma(X_0)$ .

f) Soient :

—  $\Pi_t$  le filtre de  $X_t$  par rapport à  $(F_t)_{t \in T}$

—  $v_t$  l'innovation :  $v_t = Z_t - \int_0^t \Pi_s(h) ds$

—  $\psi_t = \exp \left\{ \int_0^t \Pi_s(h) dv_s + \frac{1}{2} \int_0^t [\Pi_s(h)]^2 ds \right\}$

—  $\chi_t = \exp \left\{ \int_0^t \Pi_s(h) dv_s - \frac{1}{2} \int_0^t [\Pi_s(h)]^2 ds \right\}$

Comme  $h$  est bornée, si  $\tilde{\mathbb{P}} = \chi_T \tilde{\mathbb{P}}_\mu$ ,  $Z_t$  est un  $(\Omega, (F_t)_{t \in T}, \tilde{\mathbb{P}})$  processus de Wiener à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  (cf. [17]).

Si  $\tilde{\Pi}_t = \psi_t \Pi_t$  désigne le filtre non normalisé de  $X$  par rapport à  $(F_t)_{t \in T}$ , on sait d'après les paragraphes II et IV que  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, \tilde{\Pi}_t, Z_t, \tilde{\mathbb{P}})$  est une solution de l'équation (4).

#### V.4 Les résultats de Yamada-Watanabe. Existence

Nos hypothèses sur les espaces canoniques  $W_1$  et  $W_3$  font que les démonstrations et les résultats que nous souhaitons sont identiques à ceux de Yamada-Watanabe [22].

DÉFINITION V.2. — On dit qu'il y a unicité en loi pour l'équation (4), si pour deux solutions  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, \mu \in \mathcal{M}(S), u_t, B_t, \mathbb{P})$  et  $(\Omega', \mathcal{A}', (F'_t)_{t \in T}, \mu' \in \mathcal{M}(S), u'_t, B'_t, \mathbb{P}')$  telles que  $\mu = \mu'$  les lois de  $u_t$  et  $u'_t$  sur  $(W_3, \mathcal{B}_3)$  coïncident.



**THÉORÈME V. 3.** — *Il y a unicité en loi pour les solutions de l'équation (4).*

*Démonstration.* — Il y a unicité trajectorielle pour l'équation (4) (cf. théorème V. 1) et donc la proposition 1 de [22] transposée à nos espaces de mesures entraîne l'unicité en loi.

Les théorèmes V. 2 et V. 3 permettent de considérer la famille de probabilités  $\{\mathbb{P}_m, m \in \mathcal{M}(S)\}$  lois sur  $(W_3, \mathcal{B}_3, (\mathcal{B}_3^t)_{t \in T})$  des solutions de l'équation (4) associées à une valeur initiale  $m$  appartenant à  $\mathcal{M}(S)$ . D'après le corollaire 2 de [22] on a :

**THÉORÈME V. 4.** — *L'application :  $m \rightarrow \mathbb{P}_m(B)$  pour tout  $B$  appartenant à  $\mathcal{B}_3$ , de  $\mathcal{M}(S)$  dans  $\mathbb{R}$  est universellement mesurable. La loi  $Q$  d'une solution  $u_t$ , de loi initiale  $\nu$  sur  $(\mathcal{M}(S), \mathfrak{M})$ , est donnée par :*

$$Q(B) = \int_{\mathcal{M}(S)} \mathbb{P}_m(B) \nu(dm)$$

pour tout  $B$  appartenant à  $\mathcal{B}_3$ . De plus, la famille  $(\mathbb{P}_m, m \in \mathcal{M}(S))$  possède la propriété de Markov forte sur  $(W_3, \mathcal{B}_3, (\mathcal{B}_3^t)_{t \in T})$ .

On retrouve ainsi un résultat de Kunita, à savoir : les solutions de (4) et donc de (3), (d'après III)  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, m, u_t, B_t, \mathbb{P}_m)_{m \in \mathcal{M}(S)}$  définissent  $u_t$  comme un processus de Markov fort à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$  pour la famille de probabilités  $(\mathbb{P}_m, m \in \mathcal{M}(S))$ .

On a les mêmes résultats pour les solutions de (1) et (2) en remplaçant  $\tilde{\mathcal{M}}(S)$  par  $\mathcal{M}(S)$ .

Avant d'arriver au théorème final d'existence des solutions de l'équation (4) générale, nous avons le théorème V. 5 suivant qui se déduit du corollaire 3 de [22] et des théorèmes V. 1 et V. 2.

**THÉORÈME V. 5.** — *Il existe une fonction*

$$F(m, w_1); (m, w_1) \in \mathcal{M}(S) \times W_1 \rightarrow F(m, w_1) \in W_3$$

telle que pour tout  $t$  elle soit  $\bigwedge_v^{\nu \otimes \mathbb{R}} \mathfrak{M} \otimes \mathcal{B}_1^t$   $\mathcal{B}_3^t$ -mesurable et toute solution de (4)  $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \in T}, u_0, u_t, B_t, \mathbb{P})$  vérifie  $u_t = F(u_0, B_t)$  où  $\mathbb{R}$  est la mesure de Wiener sur  $(w_1, \mathcal{B}_1)$  et  $\overline{\mathfrak{M} \otimes \mathcal{B}_1}^{\nu \otimes \mathbb{R}}$  est la  $\nu \otimes \mathbb{R}$  complétée de  $\mathfrak{M} \otimes \mathcal{B}_1^t$ .

On a alors le théorème d'existence suivant :

**THÉORÈME V. 6.** — *Soient :*

- $F(m, w_1)$  la fonction du théorème V. 5
- $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$  un espace de probabilité

—  $(B'_t)$  un mouvement brownien sur  $(\Omega', A', \mathbb{P}')$

—  $u'_0$  une v. a. à valeurs dans  $\mathcal{M}(S)$ .

Posons  $u' = F(u'_0, B')$  et  $(F'_t)_{t \in T}$  la complétée pour  $\mathbb{P}'$  de la filtration engendrée par  $u'$  et  $B'$ .

Alors  $(\Omega', A', (F'_t)_{t \in T}, u'_0, u'_t, B'_t, \mathbb{P}')$  est une solution de (4).

*Démonstration.* — Elle repose essentiellement sur la conservation des intégrales stochastiques par changement d'espace (cf. Lenglart [11]).

Soient :

—  $\nu$  la loi de  $u'_0$  et la solution,  $(\Omega, A, (F_t)_{t \in T}, u_0, \tilde{\Pi}_t, Z_t, \tilde{\mathbb{P}})$  qui lui est associée au théorème V.2 ;

—  $\Gamma$  l'application mesurable :  $\omega \rightsquigarrow \{s \rightarrow \tilde{\Pi}_s(\omega), s \rightarrow Z_s(\omega)\}$  de  $(\Omega, A, F_t)$  dans  $(W_3 \times W_1, \mathcal{B}_3 \otimes \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3^i \otimes \mathcal{B}_1^i)$  ;

—  $\tilde{\mathbb{P}}(dw_3 dw_1)$  la loi image par  $\Gamma$  de  $\tilde{\mathbb{P}}$  sur l'espace  $(W_3 \times W_1, \mathcal{B}_3 \otimes \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3^i \otimes \mathcal{B}_1^i)$  ;

—  $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$  la filtration complétée de  $(\mathcal{B}_3^i \otimes \mathcal{B}_1^i)_{t \in T}$  pour  $\tilde{\mathbb{P}}(dw_3 dw_1)$  ;

—  $u_t(w_3, w_1) = w_3(t) \quad u_{(0)} = u_0$  ;

—  $B_t(w_3, w_1) = w_1(t) \quad B_0 = 0$ .

Alors :

1)  $(W_3 \times W_1, \mathcal{B}_3 \otimes \mathcal{B}_1, (\mathcal{G}_t)_{t \in T}, u_0, u_t, B_t, \tilde{\mathbb{P}}(dw_3 dw_1))$  est solution de (4). Pour cela, il suffit de remarquer que  $Z_t$  et  $B_t$  sont deux processus de Wiener définis respectivement sur  $(\Omega, A, F_t, \tilde{\mathbb{P}})$  et  $(W_3 \times W_1, \mathcal{B}_3 \otimes \mathcal{B}_1, \mathcal{G}_t, \tilde{\mathbb{P}}(dw_3 dw_1))$ , que  $\Gamma^{-1}(\mathcal{G}_t)CF_t$  et  $Z_t = B_t \circ \Gamma$

D'après [11] :

$$\int_0^t dZ_s \tilde{\Pi}_s(P_{t-s}f \times h) = \int_0^t dB_s u_s(P_{t-s}f \times h) \circ \Gamma$$

D'où :

$$\tilde{\Pi}_t(f) - u_0(P_t f) - \int_0^t \tilde{\Pi}_s(P_{t-s}f \times h) dZ_s = 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p. s.}$$

et

$$0 = \{u_t(f) - u_0(P_t f) - \int_0^t u_s(P_{t-s}f \times h) dB_s\} \circ \Gamma \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p. s.}$$

par définition de la probabilité image, on obtient bien le résultat annoncé.

2) Soient à présent :

—  $u' = F(u'_0, B')$

—  $\Gamma' : \omega' \in (\Omega', A', F'_t) \rightsquigarrow \{s \rightarrow u'_s(\omega), s \rightarrow B'_s(\omega)\} \in (W_3 \times W_1, \mathcal{B}_3 \otimes \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3^i \otimes \mathcal{B}_1^i)$ .

Par hypothèse, la loi image de  $\mathbb{P}'$  par  $\Gamma'$  est identique à  $\tilde{\mathbb{P}}(dw_3dw_1)$  et donc :

$$u_t(f) - u'_0(\mathbf{P}_t f) - \int_0^t u_s(\mathbf{P}_{t-s} f \times h) d\mathbf{B}_s = 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}(dw_3dw_1)\text{-p. s.}$$

et par définition de la loi image

$$u'_t(f) - u'_0(\mathbf{P}_t f) - \int_0^t u'_s(\mathbf{P}_{t-s} f \times h) d\mathbf{B}'_s = 0 \quad \mathbb{P}'\text{-p. s.}$$

ce qui achève la démonstration.

Signalons une dernière propriété des solutions de (1), (2) et (3), (4).

**THÉORÈME V.7.** — *Sous les hypothèses de V.1 et si  $\mathbf{P}_t$  est un semi-groupe de Feller, toute solution de (1), (2) et (3), (4) est continue pour la convergence étroite.*

*Démonstration.* —  $\mathbf{P}_t$  étant un semi-groupe de Feller, il peut être considéré comme un semi-groupe sur  $C_b(\mathbf{S})$ . De plus, si  $(\mathbf{L}, \mathcal{D}(\mathbf{L}))$  est son générateur infinitésimal (dans ce cas générateurs forts et faibles coïncident)  $\mathcal{D}(\mathbf{L}) \cap C_b(\mathbf{S})$  est dense pour la convergence uniforme dans  $C_b(\mathbf{S})$  (cf. [16]).

Si  $(u_t, \mathbf{B}_t)$  est solution de l'équation (3) comme  $u_t$  est c. a. d. on peut écrire :

Pour tout  $f$  appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbf{L}) \cap C_b(\mathbf{S})$ ,  $\mathbb{P}$ -p. s.

$$(3) \quad u_t(f) = u_0(f) + \int_0^t u_s(\mathbf{L}f) ds + \int_0^t d\mathbf{B}_s u_s(fh) \quad \text{pour tout } t$$

D'où, pour tout  $f$  de  $\mathcal{D}(\mathbf{L}) \cap C_b(\mathbf{S})$ ,  $u_t(f)$  est  $\mathbb{P}$ -p. s. continue en  $t$ .

Pour tout  $f$  de  $C_b(\mathbf{S})$ , il existe une suite  $f_n$  de  $\mathcal{D}(\mathbf{L}) \cap C_b(\mathbf{S})$  qui converge uniformément vers  $f$ . Ce qui implique que  $u_t(f_n)$  converge aussi  $\mathbb{P}$ -p. s. uniformément en  $t$  vers  $u_t(f)$  qui est donc  $\mathbb{P}$ -p. s. continue.

D'où  $u_t$  est continue pour la topologie de la convergence étroite.

Le résultat précédent, ainsi que le caractère fellerien du semi-groupe de  $(u_t)$  figurent d'ailleurs en ([10], p. 371).

## VI. CONCLUSION

Nous avons montré qu'il est possible d'étudier les équations différentielles stochastiques à valeurs mesures comme les équations stochastiques ordinaires. Nous avons résolu ici les équations (1) et (3) du type Fusijaki-Kallianpur-Kunita qui sont très utiles dans la pratique. En particulier l'unicité trajectorielle de leurs solutions permet d'identifier les solutions de certaines équations aux dérivées partielles stochastiques classiques, à des densités d'un processus de filtrage (ou densités conditionnelles).

L'introduction des équations simplifiées du filtrage justifie le calcul des densités conditionnelles non normalisées et le retour aux densités normalisées (cf. [12] [21] [24]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. BLUMENTHAL, R. K. GETOOR, *Markov processes and potential theory*, Academic Press, 1968.
- [2] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques*, Springer-Verlag, 1972.
- [3] C. DELLACHERIE, P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, Hermann, 1975.
- [4] C. DOLEANS-DADE, Intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre, *Publ. I. S. U. P.*, t. **16**, 1967, p. 23-34.
- [5] E. B. DYNKIN, *Markov Processes*, vol. 1 et 2, Academic Press, Springer-Verlag, 1965.
- [6] N. EL KAROUI, *Processus de réflexion dans  $R^n$* , Séminaire IX, Université de Strasbourg, p. 534, n° 465, Springer-Verlag, 1975.
- [7] M. FUSIJAKI, G. KALLIANPUR, H. KUNITA, Stochastic differential equations for the non linear filtering problem, *Osaka J. Math.*, t. **9**, 1972, p. 19-40.
- [8] R. K. GETOOR, *On the construction of kernels*, Séminaire IX, Université de Strasbourg, p. 443, n° 465, Springer-Verlag, 1975.
- [9] G. KALLIANPUR, C. STRIEBEL, Stochastic differential equations occurring in the estimation of continuous parameter stochastic processes, *Th. of Probability*, vol. **14**, n° 4, 1969.
- [10] H. KUNITA, Asymptotic Behavior of the Non Linear Filtering Errors of Markov Processes, *J. of Multivariate Analysis*, vol. **1**, n° 4, décembre 1971.
- [11] E. LENGART, Sur quelques points remarquables de la théorie des martingales locales et applications. *Thèse 3 cycle*, juin 1976, Université de Rouen (Mont Saint-Aignan).
- [12] F. LEVIEUX, *Filtrage non linéaire et analyse fonctionnelle*, Laboria Rapport n° 57, février 1974.
- [13] R. Š. LIPČER, A. N. ŠIRJAEV, Non linear filtering of Markov Diffusion, *Processes, Proc. Steklov Inst. Math.*, t. **104**, 1968.
- [14] R. Š. LIPČER, A. N. ŠIRJAEV, On the absolute continuity of measures corresponding to processes of diffusion type relative to a Wiener measure, *Math. USSR Izvestya*, vol. **6**, n° 4, 1972.
- [15] P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, Hermann, 1965.
- [16] P. A. MEYER, *Processus de Markov*, n° 26, Springer-Verlag, 1967.
- [17] P. A. MEYER, *Sur un problème de Filtration*, Séminaire VII, Université de Strasbourg, n° 321, Springer-Verlag, 1973.
- [18] P. A. MEYER, *Ensembles Markoviens homogènes (II)*, Séminaire VIII, Université de Strasbourg, n° 381, Springer-Verlag, 1974.
- [19] P. A. MEYER, *Cours sur les intégrales stochastiques*, Séminaire X, Université de Strasbourg, n° 511, Springer-Verlag, 1976.
- [20] J. NEVEU, *Bases Mathématiques du Calcul des probabilités*, Masson, 1970.
- [21] E. PARDOUX, Caractérisation de la densité de la loi conditionnelle dans le problème du filtrage d'une diffusion réfléchie, *Proceeding of the European Congress of Statisticians*, Grenoble, 1976.
- [22] T. YAMADA, S. WATANABE, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, *J. of Math. of Kyoto Univ.*, vol. **11**, n° 1, 1971.
- [23] M. YOR, *Sur les théories du filtrage et de la prédiction*, Sém. XI, Université de Strasbourg, Springer-Verlag, n° 581, 1977.
- [24] M. ZAKAI, On the optimal filtering of diffusion processes, *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, t. **11**, 1969, p. 230-243.

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1977).