ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. C. LOOTGIETER

La σ-algèbre asymptotique d'une chaîne de Galton-Watson

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 3 (1977), p. 193-230

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_3_193_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIII, n° 3, 1977, p. 193-230. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

La σ-algèbre asymptotique d'une chaîne de Galton-Watson

par

J. C. LOOTGIETER

Laboratoire de Probabilités. Tour 56,
4, Place Jussieu, Paris 5[e]

SOMMAIRE. — L'exposé qui suit recoupe les travaux de Dubuc portant sur les fonctions harmoniques d'une chaine de Galton- ^x atson surcritique ([*6*], [*7*] et [*8*]) et ceux de Seneta ([*17*] et [*18*]). En fait, nous nous proposons d'étudier essentiellement dans le cas surcritique, dans le cadre de la théorie potentielle des chaînes de Markov (cf. Neveu [*13*]), la σ-algèbre asymptotique d'une chaîne de Galton-Watson, et de mettre en lumière les propriétés fonctionnelles et spectrales de la loi de la variable aléatoire limite.

SUMMARY. — This work has certain connections with the works of Dubuc on harmonic functions of a supercritical branching process ([*6*], [*7*], [*8*]) and those of Seneta ([*17*] and [*18*]). The tail σ-field of a branching process is studied, mainly in the supercritical case, in the framework of potential theory of Markov chains (Neveu [*13*]). The functional and spectral properties of the limit laws are also brought to light.

I. PRÉLIMINAIRES

$\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) désigne l'ensemble des entiers naturels (resp. entiers relatifs), $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels ≥ 0, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels > 0.

$(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$ désigne l'espace mesurable où Ω_0 égale l'ensemble produit $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

et $\mathscr{A}_0$ la plus petite σ-algèbre de parties de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ rendant mesurables les applications coordonnées Z_n, $n \geq 0$, de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$.

Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{Q})$ est un espace de probabilité, $E(.)$ (resp. $E^{\mathscr{B}}(.)$) désigne l'espérance mathématique (resp. l'espérance conditionnelle relative à une sous-algèbre $\mathscr{B}$ de la σ-algèbre $\mathscr{A}$) définie sur l'espace des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{A})$ positives ou $\mathbb{Q}$-intégrables. Si la sous σ-algèbre $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ est engendrée par les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, nous écrivons $E(. \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$ au lieu de $E^{\mathscr{B}}(.)$. Si 1_A est la fonction indicatrice d'une partie A de Ω dans $\mathscr{A}$ nous écrivons $\mathbb{Q}^{\mathscr{B}}(A)$ au lieu de $E^{\mathscr{B}}(1_A)$ (resp. $\mathbb{Q}(A \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$ au lieu de $E(1_A \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Si P est une matrice markovienne sur $\mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{N}$, P^n désigne la puissance n-ième de P ; $P^0 = I$ où I désigne la matrice identité. La matrice potentiel associée à P est la matrice G définie par : $G = \sum_{n \geq 0} P^n$.

Si $\{ P_n, n \geq 0 \}$ est une suite de matrices markoviennes sur $\mathbb{N}$ et ν une probabilité sur $\mathbb{N}$, nous désignons par ${}_\nu\mathbb{P}$ la probabilité, définie sur l'espace mesurable $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$, engendrée par la loi initiale ν et la suite des matrices de transition $\{ P_n, n \geq 0 \}$; sur l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_\nu\mathbb{P})$ la suite des applications coordonnées $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ constitue une chaîne de Markov stationnaire dans le cas où P_n ne dépend pas de n. ${}_\nu E(.)$ désigne l'espérance mathématique associée à la probabilité ${}_\nu\mathbb{P}$. Si $\nu = \delta_i$ (δ_i désigne la mesure de Dirac au point i) nous écrivons ${}_i\mathbb{P}$ (resp. ${}_iE(.)$) au lieu de ${}_{\delta_i}\mathbb{P}$ (resp. ${}_{\delta_i}E(.)$).

Si P est une matrice markovienne sur $\mathbb{N}$, une fonction ϕ (resp. ϕ^*) est dite P-harmonique (resp. P-harmonique dans le temps) si et seulement si

$$\phi : \mathbb{N} \to R_+ \quad \text{et} \quad \phi(i) = \sum_{j \geq 0} P(i, j)\phi(j) \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}$$

(resp. $\phi^* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ et $\phi^*(i, n) = \sum_{j \geq 0} P(i, j)\phi^*(j, n + 1)$ pour tout $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

Une fonction ϕ (resp. ϕ^*) P-harmonique (resp. P-harmonique dans le temps) est dite extrêmale si la relation

$$\phi \geq \psi \quad \text{et} \quad \psi \quad \text{P-harmonique}$$

(resp. $\phi^* \geq \psi^*$ et ψ^* P-harmonique dans le temps) implique l'existence d'une constante $\lambda \geq 0$ (resp. $\lambda^* \geq 0$) telle que

$$\psi = \lambda . \phi$$
$$(\text{resp. } \psi^* = \lambda^* . \phi^*) .$$

Si $\mu = \{ \mu(j), j \geq 0 \}$ est une probabilité sur $\mathbb{N}$, nous désignons par μ^{*i} la convoluée i-ème, $i \in \mathbb{N}$, de la probabilité μ ($\mu^{*0} = \delta_0$).

Enfin au lieu de l'expression « presque-sûrement » nous écrirons « p. s. ».

Rappelons maintenant la définition d'une chaîne de Galton-Watson.

DÉFINITION 1.I. — *Soient* ν *et* μ *deux probabilités sur* $\mathbb{N}$; *soit* P *la matrice markovienne sur* $\mathbb{N}$ *définie par :*

$$\mathrm{P}(i, j) = \mu^{*i}(j).$$

Soit ${}_\nu\mathbb{P}(.)$ *la probabilité définie sur l'espace mesurable* $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$ *engendrée par la loi initiale* ν *et la matrice de transition* P.

La suite des applications coordonnées $\{ \mathrm{Z}_n, n \geq 0 \}$ *définie sur l'espace de probabilité* $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_\nu\mathbb{P})$ *est une chaîne de Markov stationnaire appelée chaîne de Galton-Watson de loi initiale* ν *et de loi génératrice* μ.

De la définition 1.I il découle que la matrice de transition d'une chaîne de Galton-Watson est parfaitement déterminée par la loi génératrice μ de cette dernière ; *dans la suite nous supposerons que* $\mu(i) < 1$ *sur* $\mathbb{N}$, sans quoi la chaîne de Galton-Watson est visiblement triviale.

Si μ est la loi génératrice d'une chaîne de Galton-Watson nous notons par m la moyenne de μ :

$$m = \sum_{j \geq 0} \mu(j) j,$$

par $f(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ la fonction génératrice de μ :

$$f(s) = \sum_{j \geq 0} \mu(j) s^j,$$

par $\{ f_n(s), n \geq 0 \}$ la suite des itérées de $f(s)$:

$$f_0(s) = s, \quad f_{n+1}(s) = f(f_n(s)) \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

par q_0 la plus petite solution positive ou nulle de l'équation :

$$f(s) = s,$$

par $f_{-1}(s)$ la fonction réciproque de $f(s)$, définie sur $[q_0, 1]$ et à valeurs dans $[q_0, 1]$, et par $\{ f_{-n}(s), n \geq 1 \}$ la suite des itérées de $f_{-1}(s)$:

$$f_{-(n+1)}(s) = f_{-1}(f_{-n}(s)) \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème suivant rappelle les relations élémentaires que vérifient la loi génératrice μ et la matrice de transition P d'une chaîne de Galton-Watson.

THÉORÈME 1.I. — *Nous avons les propriétés suivantes :*

(a) $\sum_{j\geq 0} \mathrm{P}^n(i,j)s^j = f_n^i(s)$ *pour* $(i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(b) *Pour* $m < 1$, $q_0 = 1$; *pour* $m > 1$ *et* $\mu(0) = 0$, $q_0 = 0$; *pour* $m > 1$ *et* $\mu(0) > 0$, $0 < q_0 < 1$.

(c) *Sur* $]q_0, 1[$ *la suite* $\{ f_n(s), n \in \mathbb{Z} \}$ *décroît strictement selon* n *et :*

$$\lim_{n\uparrow +\infty} \downarrow f_n(s) = q_0 \quad et \quad \lim_{n\downarrow -\infty} \uparrow f_n(s) = 1 .$$

Dorénavant v, μ, P et ${}_v\mathbb{P}$ désignent les objets tels qu'ils sont définis et construits dans la définition 1.I.

L'étude des chaînes de Galton-Watson a conduit à distinguer plusieurs cas suivant la place de la moyenne m par rapport à 1 :

Cas sous-critique : $m < 1$
Cas critique : $m = 1$
Cas surcritique : $1 < m < +\infty$
Cas explosif : $m = +\infty$.

Le résultat classique qui suit précise la nature des états d'une chaîne de Galton-Watson.

THÉORÈME 2.I. — (a) *Tout état* $i \geq 1$ *est transient et* 0 *est absorbant.*

(b) ${}_i\mathbb{P}(\{ \mathrm{Z}_n = 0$ *pour* n *assez grand* $\}) = q_0^i$,

${}_i\mathbb{P}(\{ \lim_{n\uparrow +\infty} \mathrm{Z}_n = +\infty \}) = 1 - q_0^i$ *pour* $i \in \mathbb{N}$.

Le théorème suivant rassemble certaines propriétés remarquables des chaînes de Galton-Watson surcritiques.

THÉORÈME 3.I. — *Si* $1 < m < +\infty$, *il existe une suite* $\{ c(n), n \geq 0 \}$ *de nombres réels positifs telle que :*

(a) $$\lim_{n\uparrow +\infty} c(n) = +\infty , \qquad \lim_{n\uparrow +\infty} \frac{c(n+1)}{c(n)} = m ,$$

et telle que si W *est la variable aléatoire définie ponctuellement par :*

$$\mathrm{W}(\omega) = \begin{cases} x & \text{si} \quad \lim_{n\uparrow +\infty} \dfrac{\mathrm{Z}_n(\omega)}{c(n)} = x \quad \text{pour} \quad x \geq 0 , \\ 0 & \text{sinon} , \end{cases}$$

la loi de W, *sous les probabilités* ${}_i\mathbb{P}$ $(i \geq 1)$, *est non dégénérée,*

$${}_i\mathbb{P}(\{ \mathrm{W} = 0 \}) = q_0^i \quad et \quad {}_i\mathbb{P}(\{ \mathrm{W} > 0 \}) = 1 - q_0^i .$$

(b) *La transformée de Laplace* $g(\lambda) = {}_1\mathrm{E}(\exp - \lambda \mathrm{W})$ *est l'unique solu-*

tion, parmi les transformées de Laplace des probabilités non dégénérées sur $\mathbb{R}_+$ *(considérées à une homothétie près), de l'équation fonctionnelle*

$$f(g(\lambda)) = g(\lambda m).$$

(c) *La loi de* W *admet sur* $\mathbb{R}_+^*$ *une densité continue et strictement positive* $h(x)$. *Définissant par récurrence,* $h(0, x) = 0$, $h(1, x) = h(x)$, $h(i + 1, x) = q_0^i h(1, x) + q_0 h(i, x) + \int_0^x h(1, x - t)h(i, t)dt, \ldots,$ *puis :*

$$\bar{h}(i, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m^n h(i, xm^n),$$

alors les fonctions du couple (i, n), $m^n h(i, xm^n)$, *sont* P-*harmoniques dans le temps. Les fonctions de* i, $\bar{h}(i, x)$, *sont* P-*harmoniques sauf peut-être pour des* x *appartenant à une partie de* $\mathbb{R}_+^*$ *de mesure de Lebesgue nulle.*

(d) *Pour tout réel* α *tel que* $0 < \alpha < 1$:

$$_1\mathrm{E}(\mathrm{W}^\alpha) < + \infty.$$

(e) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $$_1\mathrm{E}(\mathrm{W}) < + \infty.$$

(*ii*) $$\sum_{j\geq 1} \mu(j)j \operatorname{Log} j < + \infty.$$

(*iii*) $c(n) \sim am^n$ *pour une constante* $a > 0$ *quand* $n \uparrow + \infty$.

Le théorème 3.I. est la somme des contributions de différents auteurs : Seneta [*17*] et [*18*], Dubuc [*8*], Heyde [*11*], Athreya [*2*] et [*3*].

Nous allons ici nous borner à donner la démonstration de l'assertion (*a*).

Démonstration de l'assertion (a). — Comme $m > 1$, l'assertion (*b*) du théorème 1.I assure que $q_0 < 1$. Soit alors s_0 un réel tel que $q_0 < s_0 < 1$ et posons :

(1.3.I) $\quad \phi_q^*(i, n) = f_{-n+q}^i(s_0)$ pour $q \in \mathbb{Z}$ et $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Les fonctions ϕ_q^* sont visiblement P-harmoniques dans le temps et toutes bornées par 1. Dès lors, les suites $\{ \phi_q^*(Z_n, n), n \geq 0 \}$ sont des martingales positives bornées, et convergent donc $_1\mathbb{P}$-p. s. vers les limites respectives X_q ; il est alors clair que le théorème de convergence dominé de Lebesgue implique, en faisant tendre $n \uparrow + \infty$ dans l'égalité

$$f_q(s_0) = {_1\mathrm{E}}(\phi_q^*(Z_n, n)),$$

l'égalité :

(2.3.I) $$f_q(s_0) = {}_1\mathrm{E}(\mathrm{X}_q).$$

L'assertion (*c*) du théorème 1.I assure que $\phi_q^*(i, n)$ est décroissant selon q pour (i, n) fixé ; par suite X_q décroît selon q, et comme la suite de variables aléatoires $\{ \mathrm{X}_q, q \in \mathbb{Z} \}$ est bornée, il va de soi que de l'assertion (*c*) du théorème 1.I l'on déduit :

(3.3.I) $$\begin{aligned} q_0 &= \lim_{q\uparrow+\infty} \downarrow f_q(s_0) = {}_1\mathrm{E}(\lim_{q\uparrow+\infty} \downarrow \mathrm{X}_q), \\ 1 &= \lim_{q\downarrow-\infty} \uparrow f_q(s_0) = {}_1\mathrm{E}(\lim_{q\downarrow-\infty} \uparrow \mathrm{X}_q). \end{aligned}$$

Comme 0 est un état absorbant et que ${}_1\mathbb{P}(\{ \mathrm{Z}_n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand} \}) = q_0$ (cf. Théorème 2.I), il est clair que l'assertion (*c*) du théorème 1.I et l'égalité (1.3.I) assurent que :

$$\mathrm{X}_q = 1 \quad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.} \qquad \text{sur} \qquad \{ \mathrm{Z}_n = 0 \quad \text{pour un} \quad n \geq 0 \}.$$

De plus : $0 \leq \mathrm{X}_q \leq 1$ ${}_1\mathbb{P}$-p. s. Par conséquent les égalités (3.3.I) impliquent sans difficultés :

(4.3.I) $$\begin{aligned} &\lim_{q\uparrow+\infty} \downarrow \mathrm{X}_q = 0 \quad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.} \qquad \text{sur} \qquad \{ \lim_{n\uparrow+\infty} \mathrm{Z}_n = +\infty \}, \\ &\lim_{q\downarrow-\infty} \uparrow \mathrm{X}_q = 1 \quad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.} \qquad \text{sur} \qquad \{ \lim_{n\downarrow+\infty} \mathrm{Z}_n = +\infty \}. \end{aligned}$$

Le lecteur démontrera aisément que la loi faible des grands nombres assure que, pour $q \in \mathbb{Z}$ fixé, la suite $\left\{ \frac{\mathrm{Z}_{n+q}}{\mathrm{Z}_n}, n \geq |q| \right\}$ converge en probabilité vers la constante m^q sur $\{ \lim_{n\uparrow+\infty} \mathrm{Z}_n = +\infty \}$ et que par suite :

(5.3.I) Pour $q \in \mathbb{Z}$, $\quad \mathrm{X}_q^{m^q} = \mathrm{X}_0 \quad {}_1\mathbb{P}$-p. s. sur $\{ \lim_{n\uparrow+\infty} \mathrm{Z}_n = +\infty \}$.

Par suite les égalités (5.3.I) et (4.3.I) entraînent visiblement que :

(6.3.I) Pour $q \in \mathbb{Z}$, $\quad 0 < \mathrm{X}_q < 1 \quad {}_1\mathbb{P}$-p. s. sur $\{ \lim_{n\uparrow+\infty} \mathrm{Z}_n = +\infty \}$.

Choisissant alors $c^{-1}(n) = -\operatorname{Log} f_{-n}(s_0)$ pour $n \geq 0$, il est clair que :

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \frac{\mathrm{Z}_n}{c(n)} = -\operatorname{Log} \mathrm{X}_0 \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.},$$

et de (6.3.I) il découle que :

$$0 \leq -\operatorname{Log} \mathrm{X}_0 < +\infty \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

et on a vu que :

$$ {}_1\mathbb{P}(\{ -\operatorname{Log} X_0 = 0 \}) = q_0 . $$

Le théorème 1.I assure que $\lim_{n\uparrow+\infty} c^{-1}(n) = +\infty$. Comme la suite $\left\{ \frac{Z_{n+1}}{Z_n}, n \geq 0 \right\}$ converge ${}_1\mathbb{P}$ en probabilité vers m sur la partie $\{ \lim_{n\uparrow+\infty} Z_n = +\infty \}$, il va de soi que $\lim_{n\uparrow+\infty} c(n+1) \mid c(n) = m$. Il est évident alors que :

$$ W = -\operatorname{Log} X_0 \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.} $$

Les suites $\left\{ \frac{Z_{n+1}}{c(n)}, n \geq 0 \right\}$ et $\left\{ \frac{Z_n}{c(n)}, n \geq 0 \right\}$ convergeant respectivement ${}_1\mathbb{P}$-p. s. vers $W.m$ et W, il est clair que :

$$ \begin{aligned} {}_1E(\exp - W.m) &= \lim_{n\uparrow+\infty} f_{n+1}(\exp - \lambda c^{-1}(n)) \\ &= \lim_{n\uparrow+\infty} f(f_n(\exp - \lambda c^{-1}(n))) \qquad (7.3.\mathrm{I}) \\ &= f({}_1E(\exp - \lambda W)). \end{aligned} $$

Si W était dégénéré, W serait alors nécessairement égale à une constante $k > 0$ ${}_1\mathbb{P}$-p. s., et l'on aurait :

$$ \exp - \lambda k m = f(\exp - \lambda k), $$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse faite sur la loi génératrice μ :

$$ \mu(i) < 1 \quad \text{sur} \quad \mathbb{N} . $$

Sous la probabilité ${}_i\mathbb{P}$, le lecteur observera sans difficultés que la suite $\left\{ \frac{Z_n}{c(n)}, n \geq 0 \right\}$ converge ${}_i\mathbb{P}$-p. s. vers W et que :

$$ {}_iE(\exp - \lambda W) = ({}_1E(\exp - \lambda W))^i . $$

La démonstration de l'assertion (a) est donc achevée.

REMARQUE SUR L'ASSERTION (c) DU THÉORÈME 3.1. — Pour tout $x>0$ on a :

$$ \bar{h}(i, x) = \sum_{j\geq 0} P(i, j)\bar{h}(j, x) \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{N} , \tag{8.3.I} $$

$$ m\bar{h}(i, xm) = \bar{h}(i, x) \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{N} . \tag{9.3.I} $$

D'autre part la relation

$$(10.3.\mathrm{I}) \qquad 1 - q_0^i = \int_1^m \bar{h}(i, x)dx$$

assure l'existence d'une partie $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}_+^*$ de mesure de Lebesgue nulle telle que :

$$(x \notin \mathrm{D}) \Rightarrow (\bar{h}(i, x) < +\infty \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N});$$

par suite, pour $x \notin \mathrm{D}$, il résulte de la relation (8.3.I) que la fonction de i, $\bar{h}(i, x)$, est P-harmonique.

Dès lors nous sommes amenés à nous demander sous quelles hypothèses $\bar{h}(i, x)$ est fini quelque soit le couple (i, x) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$. Comme réponse nous n'avons pas pu trouver mieux que le résultat suivant dû à Dubuc [7] :

THÉORÈME 4.I. — *Si* $\sum_{j \geq 1} \mu(j)j\,(\mathrm{Log}\, j)^2 < +\infty$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *les fonctions de* x, $x\bar{h}(i, x)$, *sont continues et bornées selon* x.

Nous désignons par $f^{(1)}$ la dérivée de f sur $[0, 1]$. Dans la suite nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 1.I. — (Cas surcritique) *Sous l'une des deux hypothèses* (H_1) *ou* (H_2) *suivantes :*

$$(\mathrm{H}_1) \qquad m.f^{(1)}(q_0) < 1,$$

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \sum_{j \geq 1} \mu(j)j\,\mathrm{Log}\, j < +\infty,$$

on a pour tout $x > 0$:

$$\lim_{n \uparrow +\infty} (f^{(1)}(q_0))^n m^n h(1, xm^n) = 0$$

où $h(1, x)$ *désigne la densité citée dans l'assertion* (c) *du théorème 3.I.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.I. — On sait (cf. Athreya-Ney [*4*]) que sous l'hypothèse (H_1) la transformée de Fourier

$$\bar{g}(iu) = \int_0^{+\infty} \exp\{-iux\} h(1, x)dx$$

de la densité $h(1, x)$ est intégrable, si bien qu'en ce cas $h(1, x)$ est bornée de x ; il va de soi alors que l'hypothèse (H_1) assure que

$$\lim_{n \uparrow +\infty} (f^{(1)}(q_0))^n m^n h(1, xm^n) = 0.$$

Sous l'hypothèse (H_2) il est bien connu (cf. [*4*]) que la transformée de

Fourier $\bar{g}(iu)$ est dérivable par rapport à u et sa dérivée $\bar{g}^{(1)}(iu)$ est intégrable en u, si bien qu'en ce cas $xh(1, x)$ est bornée selon x ; comme $f^{(1)}(q_0) < 1$, visiblement l'hypothèse (H_2) assure la conclusion du lemme 1.I.

La démonstration du lemme 1.I est donc achevée.

II. σ-ALGÈBRE ASYMPTOTIQUE DES CHAÎNES DE GALTON-WATSON

Nous allons d'abord introduire quelques notations et des définitions usuelles.

Si $\{ X_i, i \in I \}$ est une famille de variables aléatoires réelles sur l'espace mesurable $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$, nous désignons par $\sigma(X_i, i \in I)$ la σ-algèbre engendrée par les X_i, $i \in I$.

$\{ Z_n, n \geq 0 \}$ désignant toujours la suite des applications coordonnées sur l'espace $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$, nous notons par $\mathscr{A}_n$ la σ-algèbre $\sigma(Z_q, 0 \leq q \leq n)$, par $\mathscr{F}_n$ la σ-algèbre $\sigma(Z_q, q \geq n)$. La σ-algèbre $\mathscr{F}_\infty$ définie par :

$$\mathscr{F}_\infty = \lim_{n \uparrow +\infty} \downarrow \mathscr{F}_n$$

est appelée la σ-algèbre asymptotique associée à la suite $\{ Z_n, n \geq 0 \}$.

Que dire de la σ-algèbre asymptotique $\mathscr{F}_\infty$ pour une chaîne de Galton-Watson $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ à une ${}_1\mathbb{P}$-équivalence p. s.? La réponse à cette question est l'objet des deux parties qui suivent.

A. Cas sous-critique et critique

Ces cas n'offrent pas de difficultés. Nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.II. — *Pour une chaîne de Galton-Watson $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ sous-critique ou critique, le σ-algèbre asymptotique $\mathscr{F}_\infty$ est ${}_1\mathbb{P}$-p. s. égale à la σ-algèbre triviale $\{ \Omega_0, \emptyset \}$ et toute fonction ϕ^** P*-harmonique dans le temps bornée est constante.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.II. — Ici, l'état 0 est absorbant et la probabilité d'atteinte de cet état, soit :

$${}_1\mathbb{P}(\{ Z_n = 0 \quad \text{pour un } n \geq 0 \})$$

égale 1, d'après le théorème 2.I. Des arguments classiques (cf. [*1*] et [*5*]) ayant trait à la description de la σ-algèbre asymptotique des chaînes de Markov impliquent alors que :

$$\mathscr{F}_\infty = \{ \Omega_0, \emptyset \} \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

Soit maintenant ϕ^* une fonction P-harmonique dans le temps bornée par 1. La suite de variables aléatoires $\{ \phi^*(Z_n, n), n \geq 0 \}$ constitue alors une martingale positive bornée, et par conséquent converge ${}_1\mathbb{P}$-p. s. vers une variable aléatoire $\mathscr{F}_\infty$-mesurable L ; de ce qui précède il découle que L est ${}_1$P-p. s. constante.

Observons alors que :

$$\phi^*(i, q) \geq {}_1\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{P}^{n-q}(i, \mathrm{Z}_n)}{\mathrm{P}^n(1, \mathrm{Z}_n)} \phi^*(\mathrm{Z}_n, n)\right). \tag{1.1.II}$$

Sans difficultés on remarque que :

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{P}^{n-q}(i, \mathrm{Z}_n)}{\mathrm{P}^n(1, \mathrm{Z}_n)} = 1 \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

Le lemme de Fatou-Lebesgue appliqué à (1.1.II) donne en faisant tendre $n \uparrow +\infty$ que :

$$\phi^*(i, q) \geq {}_1\mathrm{E}(\mathrm{L}).$$

Alternativement, en considérant la fonction P-harmonique dans le temps $1 - \phi^*(i, q)$ on obtient :

$$1 - \phi^*(i, q) \geq {}_1\mathrm{E}(1 - \mathrm{L}).$$

Par suite :

$$\phi^*(i, q) = {}_1\mathrm{E}(\mathrm{L}) \qquad \text{quelque soit } (i, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Remarques. — On sait (Lootgieter [*12*]) que dans le cas critique toute fonction ϕ P-harmonique bornée ou non est de la forme :

$$\phi(i) = a + bi.$$

Que dire des fonctions ϕ^* P-harmoniques dans le temps non bornées?

Dans le cas critique cette question soulève l'étude des fonctions λP-harmoniques, pour $0 < \lambda < 1$ (cf. [*12*]), qui reste, à notre connaissance, un problème ouvert.

Dans le cas sous-critique cette question est en général ouverte.

B. Cas sur-critique

Nous allons d'abord formuler l'idée intuitive, donnée par le théorème 3.I que « conditionnellement en $\{ \mathrm{W} = x \}$ la suite $\left\{ \frac{\mathrm{Z}_n}{c(n)}, n \geq 0 \right\}$ converge p. s. vers x » en nous appuyant sur le procédé de relativisation d'une chaîne de Markov (cf. Neveu [*13*]).

1.B. Relativisation par W de la chaine $\{ \mathrm{Z}_n, n \geq 0 \}$.

1) *Les espaces de probabilité* $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_i\mathbb{P}(x, .))$.

Pour $x > 0$, ${}_i\mathbb{P}(x, .)$ désigne la probabilité sur $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$ engendrée par la loi initiale δ_i et la suite des matrices markoviennes $\{ \mathrm{P}_{n,x}, n \geq 0 \}$ définies par :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{n,x}(i, j) &= \frac{1}{m^n h(i, xm^n)} \mathrm{P}(i, j) m^{n+1} h(j, xm^{n+1}) \qquad \text{pour } i \text{ et } j \geq 1\,, \\ &= 1 \quad \text{si} \quad i = j = 0\,, \\ &= 0 \quad \text{sinon}\,, \end{aligned}$$

où $h(i, x)$ désignent les densités continues et strictement positives citées dans le théorème 3.I.

Si $q_0 > 0$, alors ${}_i\mathbb{P}(0, .)$ désigne la probabilité sur $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$ engendrée par la loi initiale δ_i et la matrice de transition P_0 définie par :

$$\mathrm{P}_0(i, j) = \frac{1}{q_0^i} \mathrm{P}(i, j) q_0^j \qquad \text{pour } i \text{ et } j \geq 0\,.$$

Pour $x > 0$, la suite des variables aléatoires coordonnées $\{ \mathrm{Z}_n, n \geq 0 \}$ définies sur l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_i\mathbb{P}(x, .))$ constitue une chaîne de Markov non stationnaire. Pour $x = 0$, la suite $\{ \mathrm{Z}_n, n \geq 0 \}$ constitue une chaîne de Markov stationnaire sur l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_i\mathbb{P}(0, .))$.

2) *Les molécules* A_x.

Pour $x > 0$, A_x désigne la partie de Ω_0 dans $\mathscr{A}_0$ définie par :

$$\mathrm{A}_x = \left\{ \omega \mid \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{Z}_n(\omega)}{c(n)} = x \right\}.$$

Pour $x = 0$, A_0 désigne la partie de Ω_0 dans $\mathscr{A}_0$ définie par :

$$\mathrm{A}_0 = \{ \omega \mid \mathrm{Z}_n(\omega) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ assez grand} \}.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2.II. — (a) *Si* $q_0 > 0$, ${}_i\mathbb{P}(0, \mathrm{A}_0) = 1$ *pour tout* $i \geq 1$.

(b) *Si* $q_0 = 0$, ${}_i\mathbb{P}(x, \mathrm{A}_x) = 1$ *pour tout* $x > 0$ et tout $i \geq 2$.

(c) *Si l'une des deux hypothèses* (H_1) *ou* (H_2) *est vérifiée (que* q_0 *soit nul ou positif),* ${}_i\mathbb{P}(x, \mathrm{A}_x) = 1$ *pour tout* $x > 0$ *et tout* $i > 1$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.II. — L'assertion (*a*) est bien connue. Passons à la démonstration des assertions (*b*) et (*c*).

1. *Cas où* $q_0 = 0$. Soit W la limite ${}_i\mathbb{P}$-p. s. de la suite $\left\{ \frac{Z_n}{c(n)}, n \geq 0 \right\}$. Comme $q_0 = 0$, W prend ${}_i\mathbb{P}$-p. s. ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; et sous la probabilité ${}_i\mathbb{P}$ la loi de W admet sur $\mathbb{R}_+^*$ la densité continue et strictement positive $h(i, x)$.

Par suite, comme

$$(1.2.\mathrm{II}) \qquad \lim_{n\uparrow+\infty} \frac{Z_n}{c(n)} = W \qquad {}_i\mathbb{P}\text{-p. s.},$$

il suit que pour tout $a > 0$ (théorème de convergence dominée de Lebesgue) :

$$(2.2.\mathrm{II}) \qquad {}_i\mathbb{P}(\{ Z_n \mid c(n) \leq a \} \mid W) \xrightarrow[n\uparrow+\infty]{} 1_{\{W \leq a\}} \qquad {}_i\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

D'autre part le lecteur explicitera sans difficultés que :

$${}_i\mathbb{P}(\{ Z_n \mid c(n) \leq a \} \mid W) = \frac{1}{h(i, W)} \sum_{j \leq c(n)a} P^n(i, j) m^n h(j, Wm^n),$$

et utilisant le fait que $h(i, x)$ est continue et > 0, on peut affirmer sans difficultés l'existence d'une partie A_a de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lambda_0(\mathbb{R}_+^* - A_a) = 0$ (λ_0 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$) et :

$$(3.2.\mathrm{II}) \quad (x \in A_a) \Rightarrow \lim_{n\uparrow+\infty} \frac{1}{h(i, x)} \sum_{j \leq c(n)a} P^n(i, j) m^n h(j, xm^n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq a, \\ 0 & \text{si} \quad x > a. \end{cases}$$

Mais l'on remarque que :

$$(4.2.\mathrm{II}) \quad {}_i\mathbb{P}(x, \{ Z_n \leq c(n)a \}) = \frac{1}{h(i, x)} \sum_{j \leq c(n)a} P^n(i, j) m^n h(j, xm^n).$$

Faisant varier a dans l'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$ des rationnels strictement > 0 et posant :

$$A = \bigcap_{a \in \mathbb{Q}_+^*} A_a,$$

les relations (3.2.II) et (4.2.II) assurent que :

$$(5.2.\mathrm{II}) \quad (x \in A \text{ et } a \in \mathbb{Q}_+^*) \Rightarrow \lim_{n\uparrow+\infty} {}_i\mathbb{P}(x, \{ Z_n c(n) \leq a \}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq a, \\ 0 & \text{si} \quad x > a. \end{cases}$$

Tout en observant que $\lambda_0(\mathbb{R}_+^* - A) = 0$, la dernière relation (5.2.II) assure en fait que :

$$(6.2.\mathrm{II}) \quad (x \in A) \Rightarrow \lim_{n\uparrow+\infty} \frac{Z_n}{c(n)} = x \qquad \text{en loi sur } (\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_i\mathbb{P}(x, .)).$$

Le lecteur, remontant à la définition des probabilités ${}_i\mathbb{P}(x, .)$, remarquera que ${}_i\mathbb{P}(x, .)$ est mesurable en x sur $\mathbb{R}_+^*$ et, moyennant quelques arguments classiques de la théorie de la mesure obtiendra :

$$(7.2.\text{II}) \qquad {}_i\mathbb{P}(.) = \int_0^{+\infty} h(i, x)\,{}_i\mathbb{P}(x, .)dx .$$

Alors, il n'est pas difficile de s'assurer que la stricte positivité des fonctions de x, $h(i, x)$, et l'égalité

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \frac{Z_n}{c(n)} = W \qquad {}_i\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

impliquent que pour presque tout x de $\mathbb{R}_+^*$ (par rapport à la mesure de Lebesgue λ_0 sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$(8.2.\text{II}) \qquad \liminf_n \frac{Z_n}{c(n)} = \limsup_n \frac{Z_n}{c(n)} \qquad {}_i\mathbb{P}(x, .)\text{-p. s.}$$

Dès lors, dans une première étape, on peut affirmer (en confrontant les relations (5.2.II) et (8.2.II) l'existence d'une partie D de $\mathbb{R}_+^*$, avec $\lambda_0(\mathbb{R}_+^* - D) = 0$, et telle que :

$$(9.2.\text{II}) \qquad (x \in D) \Rightarrow {}_i\mathbb{P}(x ; A_x) = 1 .$$

Reste à établir que la relation précédente (9.2.II) reste vraie si l'on remplace D par $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, considérons une version

$$\{ \{ (\tilde{\Omega}_0, \tilde{\mathscr{A}}_0, {}_i\tilde{\mathbb{P}}(x, .)) \}, x > 0 \}, \{ \tilde{Z}_n, n \geq 0 \} \}$$

identique à $\{ \{ (\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_i\mathbb{P}(x, .)) \}, x > 0 \}, \{ Z_n, n \geq 0 \} \}$.

Sur l'espace produit $(\Omega_0, \mathscr{A}_0) \otimes (\tilde{\Omega}_0, \tilde{\mathscr{A}}_0)$ nous nous donnons la probabilité ${}_i\mathbb{P} * {}_1\tilde{\mathbb{P}}(x, .)$ qui sur la classe des pavés mesurables de $\mathscr{A}_0 \otimes \tilde{\mathscr{A}}_0$ a pour expression :

$$(10.2.\text{II}) \quad {}_i\mathbb{P} * {}_1\tilde{\mathbb{P}}(x, C \times \tilde{C}) = \int_0^x {}_i\mathbb{P}(x - t, C)\, {}_1\tilde{\mathbb{P}}(t, \tilde{C}) \frac{h(i, x - t)h(1, t)}{h(i + 1, x)} dt$$

pour $C \times \tilde{C} \in \mathscr{A}_0 \otimes \tilde{\mathscr{A}}_0$.

Considérons alors la suite $\{ Z_n + \tilde{Z}_n, n \geq 0 \}$; de (9.2.II) il n'est pas difficile de déduire l'existence d'une partie D_x de $[0, x]$ ne différant de $[0, x[$ que d'une partie de Lebesgue de mesure nulle telle que

$$(t \in D_x) \Rightarrow {}_i\mathbb{P}(x - t, A_{x-t}) = 1 \text{ et } {}_1\tilde{\mathbb{P}}(t, \tilde{\mathscr{A}}_t) = 1$$

où $\tilde{A}_t$ désigne l'homologue de A_t, autrement dit :

$$(t \in D_x) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\uparrow+\infty} \dfrac{\tilde{Z}_n}{c(n)} = t & {}_1\tilde{\mathbb{P}}(t, .)\text{-p. s.} \\ \lim\limits_{n\uparrow+\infty} \dfrac{Z_n}{c(n)} = x - t & {}_i\mathbb{P}(x - t, .)\text{-p. s.} \end{cases}$$

Par suite, il n'est pas difficile d'observer que la définition (10.2.II) de la probabilité ${}_i\mathbb{P} * {}_1\tilde{\mathbb{P}}(x, .)$ assure que :

$$(11.2.\mathrm{II}) \qquad \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{Z_n + \tilde{Z}_n}{c(n)} = x \qquad {}_i\mathbb{P} * {}_1\tilde{\mathbb{P}}(x, .)\text{-p. s.}$$

Nous avons alors le lemme suivant dont nous laissons au lecteur le soin de la démonstration :

LEMME 1.2.II. — *L'image de la probabilité* ${}_i\mathbb{P} * {}_1\tilde{\mathbb{P}}(x, .)$ *par l'application mesurable :*

$$(\omega, \tilde{\omega}) \to \{ Z_n(\omega) + Z_n(\tilde{\omega}), n \geq 0 \}$$

de $(\Omega_0, \mathscr{A}_0) \otimes (\tilde{\Omega}_0, \tilde{\mathscr{A}}_0)$ *dans* $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$ *est la probabilité* ${}_{i+1}\mathbb{P}(x, .)$.

La relation (11.2.II) et le lemme 1.2.II impliquent alors visiblement que :

$$(12.2.\mathrm{II}) \qquad (x > 0 \quad \text{et} \quad i \geq 2) \Rightarrow {}_i\mathbb{P}(x, A_x) = 1\,.$$

L'assertion (*b*) est donc démontrée. Pour démontrer l'assertion (*c*) dans le cas où $q_0 = 0$, reste à établir la relation (12.2.II) pour $i = 1$.

Pour cela, la propriété de Markov appliquée à la chaîne $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_1\mathbb{P}(x, .))$ entraîne sans difficultés que :

$$h(1, x)\ {}_1\mathbb{P}(x, A_x) = \sum_{j \geq 1} P^n(1, j) m^n h(j, xm^n)\,.\ {}_j\mathbb{P}(xm^n, A_{xm^n})$$

quelque soit $n \geq 0$.

Compte tenu de (12.2.II) il vient :

$$(13.2.\mathrm{II}) \quad h(1, x)\ {}_1\mathbb{P}(x, A_x) = P^n(1, 1) m^n h(1, xm^n)\ {}_1\mathbb{P}(xm^n, A_{xm^n}) + h(1, x) - P^n(1, 1) m^n h(1, xm^n)\,.$$

Mais sous l'une des deux hypothèses (H_1) ou (H_2), on a vu (lemme 1.I) que :

$$\lim_{n \uparrow +\infty} P^n(1, 1) m^n h(1, xm^n) = 0$$

Faisant tendre $n \uparrow +\infty$ dans l'égalité (13.2.II) et compte tenu du fait que $h(1, x) > 0$, il vient en définitive :

$${}_1\mathbb{P}(x, A_x) = 1 \qquad \text{pour tout } x > 0\,.$$

2. *Cas où* $q_0 > 0$ (Démonstration succincte).

Reprenant les arguments utilisés dans le cas où $q_0 = 0$, on obtient pour $x > 0$:

$$(14.2.\mathrm{II}) \quad h(i + 1, x)\ {}_{i+1}\mathbb{P}(x, A_x) = q_0^i h(1, x)\ {}_1\mathbb{P}(x, A_x) + q_0 h(i, x)\ {}_i\mathbb{P}(x, A_x) + \int_0^x h(i, x - t) h(t) dt$$

quelque soit $i \geq 0$.

Mais nous avons la relation de récurrence (cf. théorème 3.I) :

$$h(i+1, x) = q_0^i h(1, x) + q_0 h(i, x) + \int_0^x h(i, x-t)h(t)dt\,,$$

si bien qu'un simple calcul de récurrence appliqué à la relation (14.2.II) entraîne

$$h(i+1, x)(1 - {}_{i+1}\mathbb{P}(x, A_x)) = q_0^i h(1, x)(1 - {}_1\mathbb{P}(x, A_x))$$

quelque soit $i \geq 0$.

Par suite, pour tout $i \geqslant 1$, nous avons l'inégalité :

$$h(i, x)(1 - {}_i\mathbb{P}(x, A_x)) \leq q_0^{i-1}h(1, x)\,. \tag{15.2.II}$$

D'autre part la propriété de Markov appliquée à la chaîne $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_i\mathbb{P}(x, .))$ conduit à :

$$h(i, x)(1 - {}_i\mathbb{P}(x, A_x)) = \sum_{j \geq 1} P^n(i, j)m^n h(j, xm^n)(1 - {}_j\mathbb{P}(xm^n, A_{xm^n}))\,. \tag{16.2.II}$$

La relation (15.2.II) et l'harmonicité des fonctions du couple (i, n), $m^n h(i, xm^n)$, entraînent :

$$h(i, x)(1 - {}_i\mathbb{P}(x, A)) \leq \sum_{j \geq 1} P^n(i, j)q_0^{j-1}\,.\, m^n h(1, xm^n)\,. \tag{17.2.II}$$

Mais d'autre part le théorème des accroissements finis assure que :

$$\sum_{j \geq 1} P^n(i, j)q_0^{j-1} = \frac{f_n^i(q_0) - f_n^i(0)}{q_0} \leq (f^{(1)}(q_0))^n \frac{1 - q_0^i}{1 - q_0}\,.$$

Alors, sous l'une des deux hypothèses (H_1) ou (H_2), compte tenu du lemme 1.I, il vient en faisant tendre $n \uparrow +\infty$ dans (17.2.II) :

$$h(i, x)(1 - {}_i\mathbb{P}(x, A_x)) = 0\,, \qquad \text{pour tout } i \geqslant 1\,.$$

Comme $h(i, x) > 0$, cette dernière égalité implique

$${}_i\mathbb{P}(x, A_x) = 1\,.$$

L'assertion (*c*) du théorème 2.II est donc établie.

2.B. Relativisation par W (modulo les puissances entières de m) de la chaine $\{ Z_n, n \geq 0 \}$.

1. *Les espaces de probabilité* $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_i\bar{\mathbb{P}}(x, .))$.

Considérons les fonctions de x sur $\mathbb{R}_+^*$ $\bar{h}(i, x)$ définies par :

$$\bar{h}(i, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m^n h(i, xm^n)$$

qui ont été introduites dans l'énoncé du théorème 3.I.

Pour $x > 0$ tel que $\bar{h}(i, x)$ soit fini sur $\mathbb{N}$, ${}_i\bar{\mathbb{P}}(x, .)$ désigne la probabilité sur $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$ engendrée par la loi initiale δ_i et la matrice de transition $\bar{P}_x$ définie par :

$$\begin{aligned} \bar{P}_x(i, j) &= \frac{1}{\bar{h}(i, x)} \,.\, P(i, j)\bar{h}(j, x), \qquad \text{pour } i \text{ et } j \geq 1, \\ &= 1 \quad \text{si} \quad i = j = 0, \\ &= 0 \quad \text{sinon}. \end{aligned}$$

Dès lors la suite $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_i\bar{\mathbb{P}}(x, .))$ constitue une chaîne de Markov stationnaire.

2. *Les molécules* $\bar{A}_x$.

Pour $x > 0$, $\bar{A}_x$ désigne la partie de Ω_0 dans $\mathscr{A}_0$ définie par :

$$\bar{A}_x = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_{xm^n}.$$

Notons que ${}_i\bar{\mathbb{P}}(xm, .) = {}_i\bar{\mathbb{P}}(x, .)$ et $\bar{A}_{xm} = \bar{A}_x$. Sous l'hypothèse

$$\sum_{j \geq 1} \mu(j) j \,(\text{Log } j)^2 < +\infty$$

on sait (cf. théorème 4.I) qu'en fait les fonctions $\bar{h}(i, x)$ sont finies. Le théorème 2.II entraîne alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.2.II. — *Sous l'hypothèse* $\sum_{j \geq 1} \mu(j) j \,(\text{Log } j)^2 < \infty$, *pour tout* x, $1 \leq x < m$, *on a les assertions :*

(a) $${}_i\bar{\mathbb{P}}(x, \bar{A}_x) = 1,$$

(b) $${}_i\bar{\mathbb{P}}(x, A_{xm^n}) = \frac{m^n h(i, xm^n)}{\bar{h}(i, x)},$$

quelque soit $i \geq 1$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION SUCCINCTE DU COROLLAIRE 1.2.II. — On observe d'abord que pour toute suite finie $\{ i_0, i_1, \ldots, i_q \}$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\bar{h}(i, x)} I(i, i_0)P(i_0, i_1) \ldots P(i_{q-1}, i_q)\bar{h}(i_q, x) \\ &= \frac{1}{\bar{h}(i, x)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} m^n h(i, xm^n) \,.\, \left(\frac{1}{h(i, xm^n)} P(i, i_0) \ldots P(i_{q-1}, i_q) m^q h(i_q, xm^{q+n}) \right). \end{aligned}$$

Par suite les méthodes habituelles de prolongement de la théorie de la mesure conduisent à :

$$_i\bar{\mathbb{P}}(x, .) = \frac{1}{\bar{h}(i, x)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} m^n h(i, xm^n) \, . \, _i\mathbb{P}(xm^n, .) \, .$$

Cette dernière égalité confrontée au théorème 1.2.II, l'hypothèse (H_2) étant visiblement assurée, conduit alors aux relations (*a*) et (*b*) du corollaire (1.2.II).

REMARQUE 1. — L'hypothèse $\sum_{j \geq 1} \mu(j) j \, (\operatorname{Log} j)^2 < +\infty$ du corollaire 1.2.II ne joue en définitive qu'un rôle mineur : les assertions (*a*) et (*b*) seraient intégralement maintenues si l'on pouvait démontrer que les fonctions $\bar{h}(i, x)$ sont finies sans aucune hypothèse.

Introduisons les algèbres de Banach complexes $L^1(\mathbb{R}_+)$ et $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et l'espace des mesures positives M_h sur $\mathbb{R}_+$ défini par :

$$M_h = \left\{ \eta \mid q_0 \eta(\{0\}) + \int_0^{+\infty} h(1, x) \eta(dx) < +\infty \right\} .$$

Pour tout $n \geq 1$, nous désignons par $[h]_n$ la sous-algèbre de $L^1(\mathbb{R}_+)$ engendrée par la fonction intégrable $m^n h(1, xm^n)$. Nous laissons le soin au lecteur de remarquer que si $\overline{[h_n]}$ désigne l'adhérence dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ de la sous-algèbre $[h]_n$ on a :

$$\overline{[h]}_n \subset \overline{[h]}_{n+1} , \qquad \text{pour tout } n \geq 1 .$$

Nous avons alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.2.II. — (a) *L'ensemble* $\bigcup_{n=1}^{\infty} [h]_n$ *est dense dans* $L^1(\mathbb{R}_+)$.

(b) *Si* η_1 *et* η_2 *sont deux mesures de* M_h *telles que*

$$q_0^i \eta_1(\{0\}) + \int_0^{+\infty} m^n h(i, xm^n) \eta_1(dx) = q_0^i \eta_2(\{0\}) + \int_0^{+\infty} m^n h(i, xm^n) \eta_2(dx),$$

alors suivant la valeur de q_0 :

(*i*) *Si* $q_0 = 0$, $\eta_1 = \eta_2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

(*ii*) *Si* $q_0 > 0$, *sous l'une des deux hypothèses* (H_1) *ou* (H_2), $\eta_1 = \eta_2$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

(c) *Si* $q_0 = 0$ *pour* $0 < x < y$ (resp. $1 < x < y < m$) *les fonctions du couple* (i, n), $m^n h(i, xm^n)$ *et* $m^n h(i, ym^n)$, *(resp. de* i, $\bar{h}(i, x)$ *et* $\bar{h}(i, y)$, *quand ces dernières sont finies) sont linéairement indépendantes ; ce résultat est* *conservé quand* $q_0 > 0$ *pourvu que l'une des deux hypothèses* (H_1) *ou* (H_2) *soit vérifiée. Si* $q_0 > 0$ *chacune des fonctions du couple* (i, n), $m^n h(i, xm^n)$, *(resp. de* i, $\bar{h}(i, x)$ *quand cette dernière est finie) est linéairement indépendante de la fonction* q_0^i *de* i.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.2.II.

1. *Cas où* $q_0 = 0$.

Soient η_1 et η_2 deux mesures de M_h portées par $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$(17.2.\mathrm{II}) \qquad \int_0^{+\infty} m^n h(i, xm^n)\eta_1(dx) = \int_0^{+\infty} m^n h(i, xm^n)\eta_2(dx) \text{ sur } \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Partant de l'égalité (17.2.II) les méthodes habituelles de la théorie de la mesure et les procédés de relativisation d'une chaîne de Markov assurent que :

$$(18.2.\mathrm{II}) \qquad \int_0^{+\infty} mh(i, xm)\, {}_i\mathbb{P}(xm, \,.\,)\eta_1(dx) = \int_0^{+\infty} mh(i, xm)\, {}_i\mathbb{P}(xm, \,.\,)\eta_2(dx)$$

pour tout $i \geq 1$ tel que $\mathrm{P}(1, i) > 0$ (les deux membres de l'égalité (18.2.II) prenant alors des valeurs finies sur $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$).

Soit alors B une partie mesurable de $\mathbb{R}_+^*$; posons :

$$\tilde{\mathrm{B}} = \bigcup_{x \in \mathrm{B}} \mathrm{A}_{xm}.$$

$\tilde{\mathrm{B}}$ est manifestement une partie mesurable de Ω_0 dans $\mathscr{A}_0$. Le théorème 2.II assure alors que pour $i \geq 2$

$${}_i\mathbb{P}(xm, \tilde{\mathrm{B}}) = {}_i\mathbb{P}(xm, \tilde{\mathrm{B}} \cap \mathrm{A}_{xm}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{B}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathrm{B}. \end{cases}$$

Fixant $i_0 \geqslant 2$ tel que $\mathrm{P}(1, i_0) > 0$, la relation (18.2.II) entraîne

$$(19.2.\mathrm{II}) \qquad \int_{\mathrm{B}} mh(i_0, xm)\eta_1(dx) = \int_{\mathrm{B}} mh(i_0, xm)\eta_2(dx)$$

pour toute partie mesurable B de $\mathbb{R}_+^*$ (les deux membres de l'égalité (19.2.II) comme ceux de l'égalité (18.2.II) étant alors finis).

Comme $h(i_0, x)$ est continue et strictement positive de x la relation (19.2.II) assure que $\eta_1 = \eta_2$.

L'assertion (*b*) est donc établie ; l'assertion (*a*) découle de l'assertion (*b*) d'après le théorème de Hahn-Banach.

2. *Cas où* $q_0 > 0$.

Pour établir l'assertion (*a*) on se ramène au cas précédent ($q_0 = 0$) en observant que la densité de probabilité

$$\frac{1}{1 - q_0} h(1, x)$$

a pour transformée de Laplace $\tilde{g}(\lambda)$ définie par :

$$\tilde{g}(\lambda) = \frac{1}{1 - q_0}(g(\lambda) - q_0),$$

et que si $\tilde{f}(s)$ est la fonction génératrice définie par :

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{1 - q_0}(f(q_0 + (1 - q_0)s) - q_0)$$

alors :

$$\tilde{f}(\tilde{g}(\lambda)) = \tilde{g}(\lambda m).$$

. L'assertion (*b*) s'établit en utilisant les mêmes arguments que dans le cas précédent ($q_0 = 0$); mais alors le lemme 1.I est nécessaire : ce qui suppose que l'une des deux hypothèses (H_1) ou (H_2) soit vérifiée.

Le lecteur s'assurera facilement que l'assertion (*c*) est une conséquence de l'assertion (*b*).

REMARQUE 1. — Sous l'hypothèse $\sum_{j \geq 1} \mu(j)j^2 < +\infty$ Dubuc [8] avait établi l'indépendance linéaire des fonctions $\bar{h}(i, x)$ et $\bar{h}(i, y)$ pour $1 \leq x < y < m$; le corollaire (2.2.II) assure qu'en fait cette dernière propriété se conserve sous l'hypothèse plus faible $\sum_{j \geq 1} \mu(j)j\,(\operatorname{Log} j)^2 < +\infty$, laquelle assure (cf. théorème 4.I) que les fonctions $\bar{h}(i, x)$ sont finies.

REMARQUE 2. — On peut se demander sous quelles hypothèses la sous-algèbre $[h]_1$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}_+)$; cette question, non dénuée d'intérêt, est étudiée dans la partie IV de cet exposé.

3.B. σ-ALGÈBRE ASYMPTOTIQUE ET FONCTIONS HARMONIQUES DANS LE TEMPS.

$\sigma(W)$ désigne la σ-algèbre engendrée par la variable aléatoire limite W citée dans l'énoncée du théorème 3.I.

Rappelons que $\mathscr{F}_\infty$ désigne la σ-algèbre asymptotique associée à la suite $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ des applications coordonnées définies sur l'espace mesurable $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$.

Dans cette partie, en nous appuyant sur le théorème 3.II qui suit, dû à Dubuc [7], nous établissons que la σ-algèbre asymptotique $\mathscr{F}_\infty$ est égale à $\sigma(W)$ à une équivalence ${}_i\mathbb{P}$-presque sûre, donnons la représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées dans le temps et les dérivées mutuelles des probabilités ${}_i\mathbb{P}$, $i \geq 1$, sur la σ-algèbre asymptotique $\mathscr{F}_\infty$.

Dans toute la partie 3.B nous supposerons que la chaîne de Galton-Watson $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ est apériodique, c'est-à-dire que nous demandons à ce que le p. g. c. d. d de l'ensemble

$$\{ i - j \mid i \neq j, \mu(i) > 0 \quad \text{et} \quad \mu(j) > 0 \}$$

soit égal à 1 ; de surcroît nous supposerons que

$$\sum_{j \geq 1} \mu(j)j \operatorname{Log} j < +\infty .$$

THÉORÈME 3.II (Dubuc [7]) (*). — *Si la loi génératrice μ de la chaîne de Galton-Watson apériodique $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ vérifie*

$$\sum_{j \geq 1} \mu(j)j \operatorname{Log} j < +\infty .$$

alors pour toute suite $\{ j_n, n \geq 0 \}$ dans $\mathbb{N}$ et tout $x > 0$ tels que

$$\lim_{n \uparrow +\infty} j_n m^{-n} = x ,$$

nous avons :

$$\lim_{n \uparrow +\infty} P^n(i, j_n)j_n = xh(i, x) \qquad \text{pour tout } i \geq 1 .$$

Les théorèmes 3.I et 3.II impliquent alors visiblement l'assertion (a) du corollaire suivant, les théorèmes 2.II et 3.II l'assertion (b).

COROLLAIRE 1.3.II. — *Pour tout $q \geq 0$, i et $k \geq 1$ sous l'hypothèse que la chaîne $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ est apériodique et que $\sum_{j \geq 1} \mu(j)j \operatorname{Log} j < +\infty$, nous avons :*

(a) $$\frac{P^{n-q}(i, Z_n)}{P^n(k, Z_n)} \xrightarrow[n \uparrow +\infty]{} \frac{m^q h(i, Wm^q)}{h(k, W)} \qquad {}_k\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

sur $\{ \lim_{n \uparrow +\infty} Z_n = +\infty \}$.

(b) $$\frac{P^{n-q}(i, Z_n)}{P^n(k, Z_n)} \xrightarrow[n \uparrow +\infty]{} \frac{m^q h(i, xm^q)}{h(k, x)} \qquad {}_k\mathbb{P}(x, .)\text{-p. s.}$$

quelque soit $x > 0$.

(*) S. Dubuc et E. Seneta ont généralisé le théorème 3.II : « The local limit theorem for the Galton-Watson process ». *Ann. Probability*, t. **4**, n° 3, 1976, p. 490-496.

Le corollaire qui suit donne la σ-algèbre asymptotique (à une équivalence ${}_k\mathbb{P}$-p. s.), la représentation intégrale des fonctions P-harmoniques dans le temps bornées et assure l'extrêmalité des fonctions harmoniques $m^n h(i, x, m^n)$ et $\bar{h}(i, x)$.

COROLLAIRE 2.3.II. — *Sous l'hypothèse que la chaîne* $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ *est apériodique et que* $\sum_{j \geq 1} \mu(j) j \operatorname{Log} j < +\infty$:

(a) $$\mathscr{F}_\infty = \sigma(W) \qquad {}_k\mathbb{P}\text{-p. s. } (k \geq 1).$$

(b) *Pour toute fonction ϕ^* P-harmonique dans le temps bornée il existe une mesure η positive unique sur $\mathbb{R}_+$* (resp. $\mathbb{R}_+^*$ *si* $q_0 = 0$) *telle que :*

$$\phi^*(i, n) = q_0^i \eta(\{ 0 \}) + \int_{0_+}^{+\infty} m^n h(i, tm^n) \eta(dt).$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$ η admet une densité $f(t)$ bornée par rapport à la mesure de Lebesgue ; si ϕ^* ne dépend pas de n, $f(t) = f(tm)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sauf peut-être sur une partie de mesure de Lebesgue nulle.

(c) *Pour tout $x > 0$, la fonction du couple (i, n), $m^n h(i, xm^n)$, est* P*-harmonique extrêmale dans le temps et, la fonction de i, $\bar{h}(i, x)$, quand cette dernière est finie, est* P*-harmonique extrêmale.*

La fonction de i, q_0^i, est P*-harmonique extrêmale dans le temps.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.3.II.

Assertion (a). — Soit g une variable aléatoire $\geqslant 0$ bornée $\mathscr{F}_\infty$-mesurable. Les propriétés classiques d'une chaîne de Markov entraînent que :

$${}_1E(g \mid Z_0, Z_1, \ldots, Z_n) = {}_1E(g \mid Z_n),$$

d'où

(1.3.II) $$ {}_1E(g \mid Z_n) = {}_1E({}_1E(g \mid Z_{n+1}) \mid Z_n).$$

L'espérance conditionnelle $E_1(g \mid Z_n)$ est la forme $\psi(Z_n, n)$ où ψ est une application positive bornée sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; sur les couples (i, q) tels que $P^q(1, i) > 0$ l'application ψ est univoquement déterminée, et la relation (1.3.II) assure que pour $n \geq q$ et $P^q(1, i) > 0$:

$$\psi(i, q) = \sum_{j \geq 0} P^{n-q}(i, j) \psi(j, n),$$

soit :

$$\psi(i, q) = {}_1\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{P}^{n-q}(i, \mathrm{Z}_n)}{\mathrm{P}^n(1, \mathrm{Z}_n)} \psi(\mathrm{Z}_n, n)\right). \tag{2.3.II}$$

Pour $\mathrm{P}^q(1, i) > 0$, la suite des variables aléatoires $\left\{ \frac{\mathrm{P}^{n-q}(i, \mathrm{Z}_n)}{\mathrm{P}^n(1, \mathrm{Z}_n)}, n \geq 0 \right\}$ est bornée par $\frac{1}{\mathrm{P}^q(1, i)}$; et la théorie des martingales implique :

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \psi(\mathrm{Z}_n, n) = g \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.} \tag{3.3.II}$$

Du corollaire 1.3.II des relations (2.3.II), (3.3.II) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue il découle que pour $\mathrm{P}^q(1, i) > 0$:

$$\psi(i, q) = {}_1\mathrm{E}\left(\frac{m^q h(i, \mathrm{W}m^q)}{h(1, \mathrm{W})} g\right). \tag{4.3.II}$$

Il est facile d'observer alors que la relation (4.3.II) entraîne :

$$\psi(\mathrm{Z}_n, n) = {}_1\mathrm{E}({}_1\mathrm{E}(g \mid \mathrm{W}) \mid \mathrm{Z}_n). \tag{5.3.II}$$

${}_1\mathrm{E}(g \mid \mathrm{W})$ est une variable aléatoire $\sigma(\mathrm{W})$-mesurable, donc $\mathscr{F}_\infty$-mesurable (il est visible que $\sigma(\mathrm{W}) \subset \mathscr{F}_\infty$). Les propriétés classiques d'une chaîne de Markov impliquent alors que :

$$\lim_{n \uparrow +\infty} {}_1\mathrm{E}({}_1\mathrm{E}(g \mid \mathrm{W}) \mid \mathrm{Z}_n) = {}_1\mathrm{E}(g \mid \mathrm{W}) \qquad \mathbb{P}_1\text{-p. s.} \tag{6.3.II}$$

Des relations (3.3.II), (5.3.II) et (6.3.II) il découle donc que g est ${}_1\mathbb{P}$-p. s. $\sigma(\mathrm{W})$ mesurable ; et comme $\sigma(\mathrm{W}) \subset \mathscr{F}_\infty$ il suit que

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma(\mathrm{W}) \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

De même, à de légères modifications près, le lecteur observera que les arguments précédents assurent que :

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma(\mathrm{W}) \qquad {}_i\mathbb{P}\text{-p. s. quelque soit } i \geq 1 .$$

La démonstration de l'assertion (*a*) est donc achevée.

Assertion (b). Soit $\phi^*(i, n)$ une fonction P-harmonique dans le temps bornée ; il est clair que pour tout couple $(i, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\phi^*(i, q) \geq {}_1\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{P}^{n-q}(i, \mathrm{Z}_n)}{\mathrm{P}^n(1, \mathrm{Z}_n)} \phi^*(\mathrm{Z}_n, n)\right). \tag{7.3.II}$$

La suite $\{ \phi^*(\mathrm{Z}_n, n), n \geq 0 \}$ constitue une martingale positive bornée ;

cette dernière converge donc ${}_1\mathbb{P}$-presque sûrement vers une variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable g; l'assertion (*a*) précédente assure alors que g est de la forme :

$$(8.3.\text{II}) \qquad g = f(\mathrm{W}) \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

où f est mesurable et bornée.

Le corollaire 1.2.II, les relations (7.3.II) et (8.3.II) et le théorème de Fatou-Lebesgue impliquent :

$$(9.3.\text{II}) \quad \phi^*(i, q) \geq \int_{\{\mathrm{W}>0\}} \frac{m^q h(i, \mathrm{W}m^q)}{h(1, \mathrm{W})} f(\mathrm{W})\, d_1\mathbb{P} + q_0^{i-1} f(0)\ {}_1\mathbb{P}(\{\mathrm{W}=0\}),$$

soit

$$(10.3.\text{II}) \qquad \phi^*(i, q) \geq q_0^i f(0) + \int_0^{+\infty} m^q h(i, tm^q) f(t) dt\,.$$

Alternativement, ϕ^* étant bornée (par 1 pour fixer les idées), il suit que pour la fonction P-harmonique dans le temps $1 - \phi^*$:

$$(11.3.\text{II}) \quad 1 - \phi^*(i, q) \geq q_0^i(1 - f(0)) + \int_0^{+\infty} m^q h(i, tm^q)(1 - f(t)) dt\,.$$

Des inégalités (10.3.II) et (11.3.II) il découle que :

$$(12.3.\text{II}) \qquad \phi^*(i, q) = q_0^i f(0) + \int_0^{+\infty} m^q h(i, tm^q) f(t) dt\,.$$

Si $\phi^*(i, n)$ ne dépend pas de n ($\phi(i) = \phi^*(i, n)$) est alors P-harmonique), θ désignant l'opérateur de translation sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{W}) = \lim_{n\uparrow+\infty} \phi(\mathrm{Z}_n) &= \lim_{n\uparrow+\infty} \phi(\mathrm{Z}_{n+p}) \\ &= \lim_{n\uparrow+\infty} \phi(\mathrm{Z}_n \circ \theta^p) \\ &= f(\mathrm{W} \circ \theta^p) \\ &= f(\mathrm{W}.m^p)\,. \end{aligned}$$

Et comme W admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une densité strictement positive, il va de soi que $f(t) = f(tm)$ pour presque tout $t > 0$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Du corollaire 2.2.II et de ce qui précède, il découle que la démonstration de l'assertion (*b*) est achevée.

Assertion (c). Le lecteur n'aura pas de difficultés à s'assurer que la fonction q_0^i de i est bien P-harmonique extrêmale dans le temps.

Soient $x>0$ et $\phi_x^*(i, n)$ une fonction positive bornée par 1 telle que

$$(13.3.\mathrm{II}) \quad \phi_x^*(i, n)m^n h(i, xm^n) = \sum_{j\geq 1} \mathrm{P}(i, j)\phi_x^*(j, n+1)m^{n+1}h(j, xm^{n+1})$$

pour $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sous la probabilité ${}_1\mathbb{P}(x, .)$ la suite de variables aléatoires $\{ \phi_x^*(Z_n, n)\ n \geq 0 \}$ est alors une martingale bornée positive ; cette dernière converge donc ${}_1\mathbb{P}(x, .)$-p. s. vers une variable aléatoire g_x.

D'autre part il est clair que pour $i \geq 1$:

$$(14.3.\mathrm{II}) \qquad \phi_x^*(i, q) \geq \int_{\Omega_0} \frac{h(1, x)}{m^q h(i, xm^q)} \frac{\mathrm{P}^{n-q}(i, Z_n)}{\mathrm{P}^n(1, Z_n)} \phi^*(Z_n, n)d_1\mathbb{P}(x, .).$$

Du corollaire 1.3.II et de la relation (14.3.II) et du théorème de Fatou-Lebesgue il découle que :

$$(15.2.\mathrm{II}) \qquad \phi_x^*(i, q) \geq \int_{\Omega_0} g_x d_1\mathbb{P}(x, .) \qquad \text{pour } i \geq 1.$$

Alternativement, la relation (13.3.II) étant conservée si l'on remplace ϕ_x^* par $1 - \phi_x^*$, il vient :

$$(16.2.\mathrm{II}) \quad 1 - \phi_x^*(i, q) \geq \int_{\Omega_0} (1 - g_x)d_1\mathbb{P}(x, .) \qquad \text{pour } i \geq 1.$$

Des relations (15.2.II) et (16.2.II) il découle alors que la fonction ϕ_x^* est de la forme :

$$\phi_x^*(i, q) = \int_{\Omega_0} g_x d_1\mathbb{P}(x, .).$$

De ce qui précède, l'on peut donc conclure que la fonction $m^n h(i, xm^n)$ du couple (i, n) est P-harmonique extrêmale dans le temps.

Soient $x > 0$ tel que $\bar{h}(i, x)$ soit finie, et $\phi_x(i)$ une fonction positive bornée par 1 telle que :

$$(17.2.\mathrm{II}) \qquad \phi_x(i)\bar{h}(i, x) = \sum_{j\geq 1} \mathrm{P}(i, j)\phi_x(j)\bar{h}(j, x)$$

Alors sous la probabilité ${}_1\bar{\mathbb{P}}(x, .)$ (introduite dans la partie 2.B de II) la suite de variables aléatoires $\{ \phi_x(Z_n), n \geq 0 \}$ constitue une martingale positive bornée ; cette dernière converge donc ${}_1\bar{\mathbb{P}}(x, .)$-p. s. vers une variable aléatoire g_x.

Il est clair que pour $i \geq 1$:

$$(18.2.\text{II}) \qquad \phi_x(i) \geq \int_{\Omega_0} \frac{\bar{h}(1, x)}{\bar{h}(i, x)} \frac{\mathrm{P}^{n-q}(i, \mathrm{Z}_n)}{\mathrm{P}^n(1, \mathrm{Z}_n)} \phi_x(\mathrm{Z}_n) d\, {}_1\mathbb{P}(x, .) .$$

Mais on a vu que (cf. 2.B de II) :

$$(19.2.\text{II}) \qquad {}_1\bar{\mathbb{P}}(x, .) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{m^r h(1, xm^r)}{\bar{h}(1, x)} {}_1\mathbb{P}(x, m^r, .) .$$

Par suite usant du théorème de Fatou-Lebesgue et du corollaire 1.3.II, des relations (18.2.II) et (19.2.II) il découle que pour $i \geqslant 1$:

$$(20.2.\text{II}) \qquad \phi_x(i) \geq \frac{1}{\bar{h}(i, x)} \sum_{r \in \mathbb{Z}} m^{q+r} h(i, xm^{q+r}) k(r)$$

où

$$k(r) = \int_{\Omega_0} g_x d\, {}_1\mathbb{P}(xm^r, .) .$$

Alternativement, la relation (17.2.II) étant conservée si l'on remplace ϕ_x par $1 - \phi_x$, il vient pour $i \geq 1$:

$$(21.2.\text{II}) \qquad 1 - \phi_x(i) \geq \frac{1}{\bar{h}(i, x)} \sum_{r \in \mathbb{Z}} m^{q+r} h(i, xm^{q+r})(1 - k(r)) .$$

Par suite des relations (20.2.II) et (21.2.II) il découle que pour $i \geq 1$:

$$(22.2.\text{II}) \qquad \phi_x(i) = \frac{1}{\bar{h}(i, x)} \sum_{r \in \mathbb{Z}} m^{q+r} h(i, xm^{q+r}) k(r)$$

Du corollaire 2.2.II le lecteur n'aura pas de peine à déduire qu'en fait $k(r)$ est constant de r ; par suite $\phi_x(i)$ est constant de i pour $i \geq 1$.

De ce qui précède il découle alors que la fonction $\bar{h}(i, x)$ de i est P-harmonique extrêmale.

REMARQUE 1. — Sous l'hypothèse $\sum_{j \geq 1} \mu(j) j^2 < +\infty$, Dubuc dans [8] a établi que les fonctions de i, $h(i, x)$, sont P-harmoniques extrêmales ; de l'assertion (*c*) du corollaire 2.3.II, il résulte que cette dernière propriété est conservée sous l'hypothèse plus faible $\sum_{j \geq 1} \mu(j) j (\operatorname{Log} j)^2 < +\infty$, qui assure que toutes les fonctions de i, $\bar{h}(i, x)$, sont finies.

REMARQUE 2. — Les résultats de la partie 2.B sont à rapprocher d'une partie de ceux obtenus par Dubuc dans [7] et [*8*]. De manière précise, Dubuc a établi, outre les théorèmes 4.I et 3.II, que :

1) Sous l'hypothèse $\sum_{j\geq 1} \mu(j)j\,(\mathrm{Log}\, j)^2 < +\infty$

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \mathrm{G}(i, j_n)j_n = x\bar{h}(i, x)$$

pour toute suite $\{ j_n, n \geq 0 \}$ dans $\mathbb{N}$ et tout $x > 0$ tels que $\lim_{n\uparrow+\infty} j_n m^{-n} = x$.

2) Sous l'hypothèse $\sum_{j\geq 1} \mu(j)j\,(\mathrm{Log}\, j)^2 < +\infty$ toute fonction ϕ P-harmonique bornée ou non admet la représentation intégrale :

$$\phi(i) = q_0^i\phi(0) + \int_1^m \bar{h}(i, x)\eta(dx)$$

pour une mesure positive unique η sur $[1, m[$.

Pour aborder la partie III qui suit nous aurons besoin du corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.3.II. — *Sous l'hypothèse que la chaîne* $\{ \mathrm{Z}_n, n \geq 0 \}$ *est apériodique et que* $\sum_{j\geq 1} \mu(j)j\,\mathrm{Log}\, j < +\infty$, *les probabilités* ${}_i\mathbb{P}$, $(i \geq 1)$, *sont mutuellement équivalentes sur la* σ*-algèbre asymptotique* $\mathscr{F}_\infty$ *; de manière précise,*

$$\frac{d\,{}_i\mathbb{P}(.)}{d\,{}_k\mathbb{P}(.)} = \frac{h(i, \mathrm{W})}{h(k, \mathrm{W})} \cdot 1_{\{\mathrm{W}>0\}} + q_0^{i-k}1_{\{\mathrm{W}=0\}}$$

sur $\mathscr{F}_\infty$ *et pour tout couple* (i, k) *d'entiers* ≥ 1.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 3.3.II. — Soit θ l'opérateur de translation sur l'espace mesurable $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$:

$$\theta(\{ \omega_n, n \geq 0 \}) = \{ \omega_{n+1}, n \geq 0 \}.$$

Il est clair que

$$\theta^{-1}(\mathscr{F}_\infty) = \mathscr{F}_\infty .$$

Soit D_0 une partie de Ω_0 dans $\mathscr{F}_\infty$. L'axiome du choix et un simple raisonnement par récurrence assure l'existence d'une suite $\{ \mathrm{D}_n, n \geq 1 \}$ de parties de Ω_0 dans $\mathscr{F}_\infty$ telle que

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_0 &= \theta^{-1}(\mathrm{D}_1) \\ \mathrm{D}_1 &= \theta^{-1}(\mathrm{D}_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{D}_n &= \theta^{-1}(\mathrm{D}_{n+1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Considérons alors la famille des probabilités ${}_i\mathbb{P}$, $i \geq 0$; la propriété de Markov assure alors que :

$$ {}_i\mathbb{P}(D_n) = \sum_{j \geq 0} P(i, j)\, {}_j\mathbb{P}(D_{n+1}) \qquad \text{pour tout } i \geq 0 . $$

Par suite la fonction du couple (i, n), ${}_i\mathbb{P}(D_n)$, est une ionction harmonique dans le temps bornée ; le corollaire 2.3.II implique alors l'existence d'une fonction positive bornée $p(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'une constante $c \geq 0$ telles que

$$ (1.3.\text{II}) \qquad {}_i\mathbb{P}(D_n) = q_0^i \cdot c + \int_0^{+\infty} m^n h(i, tm^n) p(t) dt , $$

pour tout couple (i, n) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Par suite si ${}_{i_0}\mathbb{P}(D_0) = 0$ pour un $i_0 \geq 1$, du fait que $h(i_0, t)$ est continue et strictement positive, il va de soi que la représentation intégrale précédente de ${}_i\mathbb{P}(D_n)$ entraîne que ${}_k\mathbb{P}(D_0) = 0$ pour tout entier $k \geq 0$; dès lors il est clair que les probabilités ${}_i\mathbb{P}(.)$, $i \geq 1$, sont mutuellement équivalentes.

Le théorème de Radon-Nykodim assure alors que pour tout couple (i, k) d'entiers ≥ 1 il existe une fonction $X_{i,k}(\omega)$ positive $\mathscr{F}_\infty$-mesurable unique à une équivalence ${}_k\mathbb{P}$-p. s. telle que :

$$ (2.3.\text{II}) \qquad {}_i\mathbb{P}(D) = \int_D X_{i,k}(\omega) d\, {}_k\mathbb{P}(\omega) \qquad \text{quelque soit } D \in \mathscr{F}_\infty . $$

La relation (2.3.II) entraîne que l'espérance mathématique ${}_i E(\exp - W)$ de la variable aléatoire positive bornée $\exp - \lambda W$, $(\lambda \geq 0)$, $\mathscr{F}_\infty$-mesurable, a pour forme :

$$ (3.3.\text{II}) \qquad {}_i E(\exp - \lambda W) = \int_{\Omega_0} X_{i,k}(\omega) \exp - \lambda W(\omega) d\, {}_k\mathbb{P}(\omega) . $$

De la relation (3.3.II) il n'est pas difficile de déduire que l'espérance conditionnelle ${}_k E(X_{i,k} \mid W)$ a pour forme :

$$ (4.3.\text{II}) \qquad {}_k E(X_{i,k} \mid W) = \frac{h(i, W)}{h(k, W)} 1_{\{W > 0\}} + q_0^{i-k} 1_{\{W = 0\}} , $$

mais nous avons vu (cf. corollaire 2.3.II) que toute partie de Ω_0 dans $\mathscr{F}_\infty$ est ${}_k\mathbb{P}(.)$-p. s. $\sigma(W)$-mesurable ; si bien que les relations (2.3.II) et (4.3.II) impliquent en fait :

$$ (5.3.\text{II}) \qquad X_{i,k}(\omega) = \frac{h(i, W)}{h(k, W)} 1_{\{W > 0\}} + q_0^{i-k} \cdot 1_{\{W = 0\}} $$

${}_k\mathbb{P}$-p. s.

La démonstration du corollaire 3.3.II est donc achevée.

Dans [8] Dubuc pose les questions suivantes :

1) Sous l'hypothèse que la chaîne $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ est apériodique a-t-on

$$\bigcap_{1}^{\infty} f_n(\bar{\mathrm{U}}) = g(\bar{\Pi}_+) \cup \{ q \} ?$$

[$\bar{\mathrm{U}}$ désigne le disque unité complexe fermé, $\bar{\Pi}_+$ le demi plan des complexes z tels que la partie réelle de z, soit Re. z, soit ≥ 0].

2) Sous quelles hypothèses $g(z)$ est-elle injective sur $\bar{\Pi}_+$?

La partie III qui suit répond à la première question ; la partie IV donne une réponse partielle à la deuxième question, mais son objet s'inscrit essentiellement dans l'étude des sous-algèbres à un générateur denses dans l'algèbre de Banach complexe $L^1(\mathbb{R}_+)$.

III. ANALYSE SPECTRALE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f(g(z)) = g(zm)$

U désigne le disque unité ouvert complexe. $\bar{\mathrm{U}}$ le disque unité fermé complexe, Π_+ le demi plan ouvert des complexes z tels que Re. $z \geq 0$, $\bar{\Pi}_+$ le demi plan fermé des complexes z tels que Re. $z \geq 0$:

$$\mathrm{U} = \{ z/z \in \mathbb{C} \text{ et } |z| < 1 \}, \qquad \bar{\mathrm{U}} = \{ z/z \in \mathbb{C} \text{ et } |z| \leq 1 \},$$
$$\Pi_+ = \{ z/z \in \mathbb{C} \text{ et Re. } z > 0 \}, \qquad \Pi_+ = \{ z/z \in \mathbb{C} \text{ et Re. } z \geq 0 \}.$$

Sp. g désigne le spectre de la transformée holomorphe de Fourier de la loi de W sous la probabilité ${}_1\mathbb{P}$:

$$g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} h(1, x) dx + q_0 \qquad (\text{Re. } z \geq 0),$$
$$\text{Sp}. g = \{ g(z) \mid z \in \bar{\Pi}_+ \}.$$

$\text{Sp}_\infty . f$ désigne l'intersection des images $f_n(\bar{\mathrm{U}})$, $n \geq 1$, du disque unité fermé $\bar{\mathrm{U}}$ par les itérées f_n de f :

$$\text{Sp}_\infty . f = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(\bar{\mathrm{U}}).$$

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1.III. — *Sous l'hypothèse que la chaîne* $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ *est apériodique et que* $\sum_{j \geq 1} \mu(j) j \operatorname{Log} j < +\infty$ *on a :*

$$\text{Sp}_\infty . f = \text{Sp}. g \ \mathrm{U} \{ q_0 \}.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.III. — Il est clair que la suite $\{ f_n(\bar{U}), n \geq 1 \}$ est une suite décroissante de compacts de $\bar{U}$; $f(x)$ étant continue sur $\bar{U}$, on peut donc affirmer que :

$$f(\mathrm{Sp}_\infty . f) = \mathrm{Sp}_\infty . f. \tag{1.1.III}$$

D'autre part, l'équation fonctionnelle $f(g(z)) = g(zm)$ et l'égalité $f(q_0) = q_0$ entraînent visiblement que :

$$\mathrm{Sp}_\infty . f \supset \mathrm{Sp} . g \cup \{ q_0 \} . \tag{2.1.III}$$

Soit u_0 un point fixé de $\mathrm{Sp}_\infty . f$; l'axiome du choix, la relation (1.1.III) et un simple raisonnement par récurrence entraînent l'existence d'une suite $\{ u_n, n \geq 1 \}$ de points de $\mathrm{Sp}_\infty . f$ telle que :

$$\begin{aligned} u_0 &= f(u_1) \\ u_1 &= f(u_2) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u_n &= f(u_{n+1}) \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3.1.III}$$

Par suite les relations (3.1.III) entraînent manifestement que la suite $\{ u_n^{Z_n}, n \geq 0 \}$ constitue une martingale complexe, bornée par 1 en module, sur l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_1\mathbb{P})$.

La suite $\{ u_n^{Z_n}, n \geq 0 \}$ converge donc ${}_1\mathbb{P}$-p. s. et sa limite, d'après le corollaire (2.3.II), est ${}_1\mathbb{P}$-p. s. de la forme $\phi(W)$ où ϕ est une fonction mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\bar{U}$:

$$\lim_{n \uparrow +\infty} u_n^{Z_n} = \phi(W) \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.} \tag{4.1.III}$$

du corollaire (3.3.II) résulte alors que

$$\lim_{n \uparrow +\infty} u_n^{Z_n} = \phi(W) \qquad {}_2\mathbb{P}\text{-p. s.} \tag{5.1.III}$$

Cependant la probabilité ${}_2\mathbb{P}$ est visiblement l'image de la probabilité produit ${}_1\mathbb{P} \otimes {}_1\mathbb{P}$ par l'application :

$$(\omega, \tilde{\omega}) \rightarrow \omega + \tilde{\omega} : \Omega_0 \times \Omega_0 \rightarrow \Omega_0 .$$

Par suite, comme

$$\lim_{\uparrow +\infty} \frac{Z_n}{c(n)} = W \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

et

$$Z_n(\omega + \tilde{\omega}) = Z_n(\omega) + Z_n(\tilde{\omega}) \qquad {}_1\mathbb{P} \otimes {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.},$$

pour tout $n \geq 0$, il s'ensuit que

$$W(\omega + \tilde{\omega}) = W(\omega) + W(\tilde{\omega}) \qquad {}_1\mathbb{P} \otimes {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

Dès lors des relations (4.1.III) et (5.1.III) découlent manifestement que

$$(6.1.\text{III}) \quad \phi(W(\omega) + W(\tilde{\omega})) = \phi(W(\omega))\phi(W(\tilde{\omega})) \qquad {}_1\mathbb{P} \otimes {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

Comme la loi de W sous la probabilité ${}_1\mathbb{P}$ admet une densité continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la relation (6.1.III) implique

$$(7.1.\text{III}) \quad \phi(x + y) = \phi(x).\phi(y) \qquad \text{pour presque tout couple } (x, y)$$

de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ (muni de la mesure de Lebesgue).

Comme ϕ est mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\bar{U}$, la relation (7.1.III) entraîne que :

$$(8.1.\text{III}) \quad \begin{cases} \text{ou bien } \phi(x) = 0 \qquad \text{pour presque tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+, \\ \text{ou bien } \phi(x) = \exp - z_0 x \qquad \text{pour presque tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+, \\ \text{pour un } z_0 \text{ fixé de } \bar{\Pi}_+ \end{cases}$$

($\mathbb{R}_+$ étant muni de la mesure de Lebesgue).

Enfin si la probabilité d'extinction q_0 est strictement positive, la relation (4.1.III) entraîne que $\phi(0) = 1$.

Dès lors les relations (3.1.III), (4.1.III) et (8.1.III) impliquent successivement :

$$u_0 = {}_1E(u_n^{Z_n}) \qquad \text{quelque soit } n \geq 1\,,$$

$$u_0 = {}_1E(\lim_{n\uparrow+\infty} u_n^{Z_n}),$$

ou bien

$$u_0 = q_0 + \int_0^{+\infty} h(1, x) \exp\{-z_0 x\}\, dx\,,$$

ou bien

$$u_0 = q_0\,.$$

En conclusion $u_0 \in \mathrm{Sp}.\,g \cup \{q_0\}$.

La démonstration du théorème 1.III est donc achevée.

Remarque. — Le théorème 1.III donne, grossièrement parlant, une traduction « spectrale » de l'équation fonctionnelle

$$f(g(z)) = g(zm)$$

et amène à se poser la question suivante :

« Si $\tilde{g}(z)$ est la transformée de Laplace sur $\bar{\Pi}_+$ d'une probabilité sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathrm{Sp}_\infty.\,f = \mathrm{Sp}.\,\mathring{g} \cup \{q_0\}$$

a-t-on

$$f(\mathring{g}(z)) = \mathring{g}(zm)\,?\text{ »}.$$

IV. CHAÎNES DE GALTON-WATSON SUR-CRITIQUES ET SOUS-ALGÈBRES A UN GÉNÉRATEUR DENSES DANS $L^1(R_+)$

Introduisons l'algèbre de Banach complexe $l^1(\mathbb{N}_1)$ des suites complexes $\{ a_n, n \geq 1 \}$ sommables et l'espace H^1 des fonctions analytiques complexes $d(z)$ dans U telles que

$$\lim_{r\uparrow 1} \uparrow \int_{-\pi}^{\pi} | d(re^{i\theta}) | \, d\theta < + \infty .$$

Dans [*14*], Newman, Schwartz et Shapiro ont étudié les conditions sous lesquelles l'algèbre $[a]$ engendrée par un élément $a \in l^1(\mathbb{N}_1)$ (resp. l'algèbre $[k]$ engendrée par un élément $k \in L^1(\mathbb{R}_+)$ est dense $l^1(\mathbb{N}_1)$ (resp. dans $L^1(\mathbb{R}_+)$).

En particulier les auteurs précités ont obtenu le théorème suivant que nous énonçons sans démonstration :

THÉORÈME 1.IV. — *Soit $a = \{ a_n, n \geq 1 \}$ un élément de $l^1(\mathbb{N}_1)$, $\hat{a}(z)$ la fonction analytique dans* U *définie par :*

$$\hat{a}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n ,$$

$\hat{a}^{(1)}(z)$ la dérivée de $\hat{a}(z)$ dans U, $I(\hat{a}^{(1)}(z))$ *le facteur interne de $\hat{a}^{(1)}(z)$. Alors l'assertion* (i) *implique l'assertion* (ii) :

i) *$\hat{a}(z)$ est injective sur $\bar{U}$ et $I(\hat{a}^{(1)}(z)) = 1$.*

ii) *La sous-algèbre $[a]$ est dense dans $l^1(\mathbb{N}_1)$.*

Pour la définition du facteur interne d'une fonction analytique complexe dans U, nous renvoyons le lecteur à Rudin [*15*] (H^p-Spaces Chapter 17).

L'assertion (*i*) est réalisée par exemple si $\hat{a}^{(1)}(z) \in H^1$ et si Re $\hat{a}^{(1)}(z) > 0$ sur U (cf. Rudin [*15*] : p. 285, exercice 11, p. 349, exercice 21) ou bien si $\hat{a}(z)$ est injective sur $\bar{U}$, $\hat{a}^{(1)}(z) \in H^1$ et $1/\hat{a}^{(1)}(z) \in H^1$ (cf. Rudin [*15*] : p. 349, exercice 19).

DÉFINITION 1.IV. — *Nous dirons que loi génératrice $\mu = \{ \mu(j), j \geqslant 0 \}$ d'une chaîne de Galton-Watson surcritique satisfait l'hypothèse $(\mathscr{D})$ si : $\mu(0) = 0$ et la sous-algèbre $[\mu]$ est dense dans $l^1(\mathbb{N}_1)$.*

Exemples de lois génératrices μ satisfaisant l'hypothèse $(\mathscr{D})$:

1) Partons d'une probabilité quelconque $\nu \{ \nu(j), j \geq 1 \}$ sur $\mathbb{N}_1$ seulement assujettie à la condition

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu(j)j < +\infty,$$

et posons :

$$\hat{\nu}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(j)z^j,$$

puis :

$$c = \inf \{ \text{Re. } \hat{\nu}^{(1)}(z) \mid z \in \mathrm{U} \}.$$

Alors il est clair, d'après le théorème 1.IV et les remarques précédentes, que si $b > \sup(-c, o)$ la fonction

$$f(z) = \frac{bz + \hat{\nu}(z)}{b+1}$$

est la fonction génératrice d'une probabilité μ satisfaisant l'hypothèse $(\mathscr{D})$.

2) Les probabilités μ dont les fonctions génératrices $f(z)$ sont de la forme $\dfrac{pz}{1-(1-p)z}$, $(0 < p < 1)$, et $\dfrac{e^{\theta z}-1}{e^{\theta}-1}$, $(1 < \theta < \pi)$, satisfont l'hypothèse $(\mathscr{D})$.

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2.IV. — *Si la loi génératrice* $\mu = \{ \mu(j), j \geq 0 \}$ *d'une chaîne de Galton-Watson surcritique satisfait l'hypothèse* $(\mathscr{D})$, *alors la sous-algèbre* $[h]$ *engendrée par la densité* $h(1, x)$ *de la loi de la variable aléatoire limite* W *sous la probabilité* ${}_1\mathbb{P}$ *est dense dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.IV. — D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit donc de démontrer que pour la suite $\{ h(j, x), j \geq 1 \}$ des convoluées de la densité $h(1, x)$ l'égalité

$$\text{(1.2.IV)} \qquad \int_0^{\infty} h(j, x)l(x)dx = 0 \qquad \text{quelque soit } j \geq 1$$

pour une fonction $l(x) \in \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ entraîne $l = 0$.

$\mathrm{P}(i, j)$ désignant toujours la matrice de transition de la chaîne de Galton-Watson surcritique $\{ \mathrm{Z}_n, n \geq 0 \}$, l'égalité (1.2.IV) implique :

$$\sum_{j \geq 1} \mathrm{P}(i, j) \int_0^{+\infty} mh(j, xm)l(x)dx = 0 \qquad \text{quelque soit } i \geq 1.$$

L'hypothèse ($\mathscr{D}$), compte tenu du fait que

$$\left| \int_0^{+\infty} mh(j, xm)l(x)dx \right| \leq \| l \|_\infty < +\infty ,$$

entraîne alors que (théorème de Hahn-Banach)

$$\text{(2.2.IV)} \qquad \int_0^{+\infty} mh(j, xm)l(x)dx = 0 \qquad \text{quelque soit } j \geq 1 .$$

Réitérant le même procédé, un simple raisonnement par récurrence assure que :

$$\text{(3.2.IV)} \qquad \int_0^{+\infty} m^n h(j, xm^n)l(x)dx = 0 \qquad \text{quelque soit } j \geq 1 \text{ et } n \geq 0 .$$

Dès lors, l'assertion (a) du corollaire 2.2.II implique $l = 0$. La démonstration du théorème 2.IV est donc achevée.

REMARQUE 1. — Dans le cas où la loi génératrice μ a pour fonction génératrice $f(z) = \dfrac{pz}{1 - (1 - p)z}$, $(0 < p < 1)$, (seul cas à peu près où l'on peut expliciter la solution $g(z)$ de l'équation fonctionnelle $f(g(z)) = g(zm)$) on a :

$$g(z) = \frac{1}{z + 1} (z \in \bar{\Pi}_+) .$$

En d'autres termes la densité $h(1, x)$ de la loi de la variable aléatoire limite est la loi exponentielle :

$$h(1, x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} ,$$

et il est bien connu que la sous-algèbre engendrée par la fonction $e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ (cf. Rudin [*16*]) et que nous avons là l'un des rares cas explicitement simples qui jouissent d'une telle propriété (cf. [*14*]).

REMARQUE 2. — Si la loi génératrice μ charge le point 0 (ce qui équivaut à $q_0 > 0$) et si la probabilité μ sur $\mathbb{N}_1$ de fonction génératrice

$$\tilde{f}(z) = \frac{f((1 - q_0)z + q_0) - q_0}{1 - q_0}$$

satisfait l'hypothèse ($\mathscr{D}$), alors le théorème 2.IV assure que la sous-algèbre [h]

engendrée par la densité $h(1, x)$ de la loi de W sur $\mathbb{R}_+^*$ sous la probabilité ${}_1\mathbb{P}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Enfin, nous terminerons avec le théorème 3.IV qui suit, auparavant nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 1.IV. — La suite $\left\{ g^{Z_n}\left(\frac{z}{m^n}\right), n \geqslant 0 \right\}$ converge ${}_1\mathbb{P}$-p. s. sur $\bar{\Pi}_+$ vers $\exp - z\mathrm{W}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.IV. — Rappelons (Théorème 3.I) que

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \frac{Z_n}{c(n)} = \mathrm{W} \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.,} \tag{1.3.IV}$$

la suite $\{ c(n), n \geqslant 0 \}$ ayant été définie par

$$c(n) = -1 \mid \mathrm{Log}\, f_{-n}(s_0)$$

où s_0 désigne un point fixé de l'intervalle $]-q_0, 1[$, et la variable aléatoire W ayant été définie par

$$\mathrm{W} = \begin{cases} \lim\limits_{n\uparrow+\infty} \dfrac{Z_n}{c(n)} & \text{si} \quad \lim\limits_{n\uparrow+\infty} \dfrac{Z_n}{c(n)} \text{ existe dans } \mathbb{R}_+ , \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme f est injective sur $[0, 1]$ et que $g(\lambda)$ prend ses valeurs dans $[q_0, 1]$ pour $0 \leq \lambda < +\infty$, le lecteur n'aura pas de peine à s'assurer que :

$$g\left(\frac{1}{m^n}\right) = f_{-n}(s_0) \qquad \text{quelque soit } n \geq 0 .$$

La relation (1.3.IV) assure visiblement que

$$\lim_{n\uparrow+\infty} g^{Z_n}\left(\frac{1}{m^n}\right) = e^{-\mathrm{W}} \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}$$

D'autre part nous avons les inégalités de convexité :

$$\begin{cases} g\left(\dfrac{\lambda}{m^n}\right) \geq g^{\lambda}\left(\dfrac{1}{m^n}\right) & \text{pour} \quad 1 \leq \lambda < +\infty , \\ g\left(\dfrac{\lambda}{m^n}\right) \leq g^{\lambda}\left(\dfrac{1}{m^n}\right) & \text{pour} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 . \end{cases} \tag{2.3.IV}$$

Cependant la suite $\left\{ g^{Z_n}\left(\frac{\lambda}{m^n}\right), n \geq 0 \right\}$ constitue une martingale sur l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, {}_1\mathbb{P})$ bornée, qui converge donc ${}_1\mathbb{P}$-p. s.; les inégalités (2.3.IV) impliquent alors que :

$$(3.3.\text{IV}) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\uparrow+\infty} g^{Z_n}\left(\dfrac{\lambda}{m^n}\right) \geqslant e^{-\lambda W} & \text{pour} \quad 1 \leq \lambda < +\infty, \\ \lim\limits_{n\uparrow+\infty} g^{Z_n}\left(\dfrac{\lambda}{m^n}\right) \leqslant e^{-\lambda W} & \text{pour} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

${}_1\mathbb{P}$-p. s.

Mais visiblement :

$${}_1\mathrm{E}\left(\lim g^{Z_n}\left(\frac{\lambda}{m^n}\right)\right) = g(\lambda) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \lambda < +\infty,$$

si bien qu'en fait les inégalités (3.3.IV) impliquent :

$$(4.3.\text{IV}) \qquad \lim_{n\uparrow+\infty} g^{Z_n}\left(\frac{\lambda}{m^n}\right) = e^{-\lambda W} \quad \text{pour} \quad 0 \leq \lambda < +\infty$$

${}_1\mathbb{P}$-p. s.

En jouant sur la monotonie de $g(\lambda)$, il est alors clair que la relation (4.3.IV) implique l'existence d'une partie $\mathscr{C}$ de Ω_0 dans $\mathscr{A}_0$ telle que ${}_1\mathbb{P}(\mathscr{C}) = 1$ et :

$$\omega \in \mathscr{C} \Rightarrow \lim_{n\uparrow+\infty} g^{Z_n(\omega)}\left(\frac{\lambda}{m^n}\right) = e^{-\lambda W(\omega)}$$

Dès lors un théorème classique de la théorie des probabilités assure que (les fonctions de x, e^{-zx}, $(\operatorname{Re} z \geq 0)$, étant continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$ par 1) :

$$\omega \in \mathscr{C} \Rightarrow \lim_{n\uparrow+\infty} g^{Z_n(\omega)}\left(\frac{z}{m^n}\right) = e^{-zW(\omega)} \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s. sur } \bar{\Pi}_+ .$$

La démonstration du lemme I.IV est donc achevée.

THÉORÈME 3.IV. — *La première des assertions suivantes* (i) *implique la seconde* (ii) :

(i) *La restriction de f a $\mathrm{Sp}_\infty . f$ est injective.*

(ii) *La transformée de Laplace $g(z)$ est injective sur $\bar{\Pi}_+$ et ne prend pas la valeur q_0.*

Si de plus la chaîne $\{ Z_n, n \geq 0 \}$ est apériodique et que

$$\sum_{j\geq 1} \mu(j) j \operatorname{Log} j < +\infty,$$

l'assertion (ii) implique l'assertion (i).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.IV. — Soient z_1 et z_2 deux points de $\bar{\Pi}_+$ tels que

$$g(z_1) = g(z_2).$$

Comme $\mathrm{Sp}.g \subset \mathrm{Sp}_\infty.f$, l'égalité précédente implique, compte tenu de l'hypothèse (i) et de l'égalité $f(g(z)) = g(zm)$, que :

$$g\left(\frac{z_1}{m^n}\right) = g\left(\frac{z_2}{m^n}\right) \qquad \text{pour } 0 \leq n < +\infty .$$

Du lemme 1.IV résulte visiblement que

$$e^{-z_1.\mathrm{W}} = e^{-z_2.\mathrm{W}} \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.}.$$

W admettant une densité non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, l'égalité précédente assure que $z_1 = z_2$.

Si $g(z_1) = q_0$, l'hypothèse (i) impliquerait, compte tenu du fait que q_0 est le seul point fixe de f sur U, que $|g(z)| < 1$ sur $\bar{\Pi}_+ - \{0\}$ et que $g(0) = 1$:

$$g\left(\frac{z_1}{m^n}\right) = q_0 \qquad \text{pour tout } n \geq 0 .$$

Par suite le lemme 1.IV impliquerait

$$e^{-z_1\mathrm{W}} = 1_{\{\mathrm{W}=0\}} \qquad {}_1\mathbb{P}\text{-p. s.},$$

ce qui, compte tenu de la loi de W, est impossible. Donc (i) implique (ii).

. Si la chaîne $\{ \mathrm{Z}_n, n \geq 0 \}$ est apériodique et $\sum_{j \geq 1} \mu(j) j \operatorname{Log} j < +\infty$, le théorème 1.III dit que :

$$\mathrm{Sp}_\infty.f = \mathrm{Sp}.g \cup \{ q_0 \} .$$

En ce cas il est quasi immédiat que (ii) implique (i).

Remarque. — L'assertion (i) du théorème 1.IV est visiblement vérifiée si f est injective sur $\bar{\mathrm{U}}$. Néanmoins la fonction génératrice

$$f(z) = \frac{1}{2}(z + z^2)$$

qui n'est pas injective sur U est injective sur $f_2(\bar{\mathrm{U}})$, si bien que pour ce cas particulier l'assertion (i) du théorème 1.IV est vérifiée.

CONCLUSION

Dans cet exposé, nous avons tenté de mettre en lumière les propriétés fonctionnelles de la densité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la loi de la variable aléatoire limite W

(Corollaire 2.2.II, Théorème 2.IV). D'autre part nous avons précisé, en nous appuyant sur le théorème (3.II) de Dubuc [7] les propriétés probabilistes des chaînes de Galton-Watson surcritiques ayant trait à la description de leurs σ-algèbres asymptotiques (Corollaire 2.3.II et 3.3.II).

Visiblement de nombreux auteurs se sont préoccupés des propriétés de la loi de la variable aléatoire limite W : Seneta [19] qui voit une corrélation étroite entre les propriétés de la loi de W et la théorie des fonctions à variation lente, Dubuc qui a établi (moyennant certaines hypothèses) des propriétés fines du comportement asymptotique des convoluées de la densité de la loi de W sur R_+^* [8], Athreya [4] qui sous certaines hypothèses établit des propriétés lipschitziennes de la densité de la loi de W sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais les théorèmes 1.III et 2.IV, les corollaires (2.2.II) et (2.3.II) amènent à se demander si l'équation fonctionnelle fondamentale $f(g(z)) = g(zm)$ des chaînes de Galton-Watson surcritiques ne s'inscrit pas dans le cadre de l'analyse fonctionnelle (cf. Guelfand [9]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ABRAHAMSE, The tail field of a Markov Chain. *Ann. Statistic*, t. **40**, 1969, p. 127-136.

[2] K. B. ATHREYA, A note on a functional equation arising in Galton-Watson branching processes. *Journal Applied Probability*, t. **8**, 1971, p. 589-598.

[3] K. B. ATHREYA, On the absoluty continuity of the limit random variable in the supercritical Galton-Watson process. *Proceedings of American Math. Society*, t. **30**, 1971, p. 563-565.

[4] K. B. ATHREYA, P. NEY, *Branching processes*. Berlin, Springer, 1972.

[5] H. COHN, On the tail events of a Markov Chain. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. gebiete*, t. **29**, 1974, p. 65-72.

[6] S. DUBUC, Positive harmonic functions of branching processes. *Proceedings of the American Math. Society*, t. **21**, 1969, p. 324-326.

[7] S. DUBUC, La fonction de Green d'un processus de Galton-Watson. *Studia Math.*, t. **34**, 1970, p. 69-87.

[8] S. DUBUC, Problèmes relatifs à l'itération des fonctions suggérés par les processus en cascade. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. **21**, 1971, p. 171-251.

[9] I. GUELFAND, D. RAIKOV, Q. SHILOV, *Commutative normed rings*, Chelsea, 1964.

[10] T. E. HARRIS, *The theory of branching processes*. Berlin, Springer.

[11] C. C. HEYDE, Extension of a result of Seneta for the supercritical Galton-Watson process. *Ann. Math. Statistics*, t. **41**, 1970, p. 739-742.

[12] J. C. LOOTGIETER, Processus de Galton-Watson de moyenne 1. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, avril 1969, t. **268**, Série A, p. 817-818.

[13] J. NEVEU, Chaînes de Markov et théorie du potentiel. *Annales Fac. Sci.*, Clermont-Ferrand, t. **24**, 1964, p. 37-89.

[14] D. J. NEWMANN, J. T. SCHWARTZ, H. S. SHAPIRO, On generators of the Banach algebras l^1 et $L^1(0, +\infty)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **107**, 1963, p. 466-484.

[15] W. RUDIN, *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1966.

[16] W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*. Interscience publishers, 1967.

[17] E. SENETA, On recents theorems concerning the supercritical Galton-Watson process. *Ann. Math. Statistics*, t. **39**, 1968, p. 2098-2102.

[18] E. SENETA, Functionals equations and the Galton-Watson process. *Adv. Appl. Prob.*, t. **1**, 1969, p. 1-42.

[19] E. SENETA, *Regularly varying functions in the theory of simple branching processes.* Vol. 6, nº 3, septembre 1974.

(Manuscrit reçu le 4 avril 1976)