ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

E. LENGLART

Relation de domination entre deux processus

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 2 (1977), p. 171-179

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_2_171_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIII, n° 2, 1977, p. 171-179.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Relation de domination entre deux processus

par

E. LENGLART

Laboratoire de probabilités. Département de mathématiques,
Université de Rouen, 76130 Mont-Saint-Aignan

SUMMARY. — We study the implications of a relation of domination of a process by a previsible increasing process. In particular, some of the Burkhölder-Gundy inequalities are extended to positive sub-martingales. Moreover this relation introduces in a very natural way the uniform convergence on compacts in probability.

RÉSUMÉ. — On étudie les conséquences d'une relation de domination d'un processus adapté positif et continu à droite par un processus croissant prévisible. On étend ainsi, en particulier, certaines des inégalités de Burkhölder-Gundy aux sous-martingales positives. Cette relation introduit de plus, de façon très naturelle, la convergence uniforme sur tout compact en probabilité.

§ 1

Les processus sont tous définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ muni d'une filtration et vérifiant les conditions habituelles.

DÉFINITION. — Un processus croissant est un processus nul en 0, adapté, à trajectoires croissantes et continues à droite. Si A est un processus croissant on pose alors $A_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} A_t$ ce qui permet de définir A_T pour tout temps d'arrêt T.

DÉFINITION. — *Un processus* X *adapté, positif, à trajectoires continues à droites est dominé par un processus croissant prévisible* A *si : pour tout temps d'arrêt fini* T $E(X_T) \leqslant E(A_T)$.

Nous donnons ici une proposition généralisant un théorème de M. Pratelli [5], la démonstration étant analogue à celle de [5].

PROPOSITION I. — Soit c une constante positive. Si X est dominé par le processus croissant prévisible $c.\mathrm{A}$ on a : pour tout temps d'arrêt fini T et pour toute fonction croissante concave nulle en 0, F :

$$E(F(X_T)) \leqslant (c + 1)E(F(A_T))$$

Si X est un processus adapté continu à droite, nous notons X^* le processus $\sup_{s \leqslant t} |X_s|$. Pour tout processus nous posons $X_{0-} = 0$.

LEMME. — Si X est dominé par le processus croissant A, on a alors pour tout temps d'arrêt T et tout $c > 0$:

$$P(X_T^* \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c} E(A_T)$$

Démonstration. — Soit $S = \inf\{s \leqslant T \wedge n ; X_s \geqslant c\}$, $S = T \wedge n$ si $\{\dots\} = \emptyset$.

S est un temps d'arrêt $\leqslant T \wedge n$.

On a alors la suite d'inégalités :

$$E(A_T) \geqslant E(A_S) \geqslant E(X_S) \geqslant \int_{X^*_{T \wedge n} > c} X_S dP \geqslant cP(X^*_{T \wedge n} > c)$$

Donc $P(X^*_{T \wedge n} > c) \leqslant \frac{1}{c} E(A_T)$, d'où $P(X^*_T > c) \leqslant \frac{1}{c} E(A_T)$, ce qui entraîne l'inégalité cherchée.

Voici maintenant le résultat principal de ce paragraphe:

THÉORÈME I. — Si X est dominé par un processus croissant prévisible A, on a alors pour tout temps d'arrêt T, tout $c > 0$, tout $d > 0$:

$$P(X^*_T \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c} E(A_T \wedge d) + P(A_T \geqslant d).$$

Démonstration. — Nous montrerons en fait un peu plus :

a) Pour tout temps d'arrêt $T > 0$, prévisible, tout $c > 0$ et tout $d > 0$:

$$P(X^*_{T-} \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c} E(A_{T-} \wedge d) + P(A_{T-} \geqslant d)$$

$$\begin{aligned} P(X^*_{T-} \geqslant c) &= P(A_{T-} < d, X^*_{T-} \geqslant c) + P(A_{T-} \geqslant d, X^*_{T-} \geqslant c) \\ &\leqslant P(I_{(A_{T-} < d)} X^*_{T-} \geqslant c) + P(A_{T-} \geqslant d) \quad (*) \end{aligned}$$

Soit $S = \inf\{t, A_t \geqslant d\}$. S est un temps d'arrêt prévisible car c'est le début d'un fermé droit prévisible [6] et, par continuité à droite, on a $S > 0$ Pp. p. Par suite $S \wedge T$ est > 0, prévisible.

On a l'inégalité : $I_{(A_{T-} < d)} X^*_{T-} \leqslant X^*_{(T \wedge S)-}$.

En effet si $A_{T-}(\omega) < d$ alors $T(\omega) \leqslant S(\omega)$ et on a l'égalité, et si $A_{T-}(\omega) \geqslant d$, alors le premier membre est nul.

Par conséquent : $(*) \leqslant P(X^*_{(T \wedge S)-} \geqslant c) + P(A_{T-} \geqslant d)$ $(**)$.

Soit $(S_n)_n$ une suite croissante de temps d'arrêts, convergente vers $S \wedge T$ et telle que Pp. p. pour tout n, $S_n < S \wedge T$. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < c$. On a alors :

$$(X^*_{(T \wedge S)-} \geqslant c) \subset \underline{\lim}\, (X^*_{S_n} \geqslant c - \varepsilon)$$

D'après le lemme de Fatou et le lemme précédent on a alors :

$$P(X^*_{(T \wedge S)-} \geqslant c) \leqslant \underline{\lim}\, P(X^*_{S_n} \geqslant c - \varepsilon) \leqslant \frac{1}{c - \varepsilon} \lim E(A_{S_n}) = \frac{1}{c - \varepsilon} E(A_{(S \wedge T)-})$$

Par suite, ε étant arbitraire,

$$P(X^*_{(T \wedge S)-} \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c} E(A_{(T \wedge S)-})$$

Or $A_{(S \wedge T)-} \leqslant A_{T-} \wedge d$, ce qui, en reportant dans $(**)$, entraîne bien l'inégalité cherchée.

b) Pour démontrer le théorème I, il suffit d'appliquer *a*) aux processus arrêtés X^T et A^T, avec le temps d'arrêt prévisible $T' = +\infty$.

COROLLAIRE I. — Soit $(X^n)_n$ une suite de processus positifs continus à droite, chacun dominé par un processus croissant prévisible A^n, et T un temps d'arrêt.

On a alors :

$$A^n_T \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow (X^n)^*_T \xrightarrow{P} 0.$$

Démonstration. — On a en effet, pour tout $c > 0$ et tout $d > 0$:

$$P(X^{n*}_T \geqslant c) \leqslant \frac{d}{c} + P(A^n_T \geqslant d),$$

ce qui implique immédiatement le résultat.

COROLLAIRE II. — Soit X un processus positif, continu à droite, dominé par un processus croissant prévisible A.

Pour tout $p \in]0, 1[$ et tout temps d'arrêt T on a :

$$E(X^{*p}_T) \leqslant \frac{2 - p}{1 - p} E(A^p_T)$$

Démonstration. — D'après le théorème de Fubini, pour toute variable aléatoire positive Z, $E(Z) = \int_0^\infty P(Z \geqslant c)dc$.

D'après le théorème I on a donc :

$$E(X_T^{*p}) \leqslant \int_0^\infty c^{-\frac{1}{p}} E(A_T \wedge c^{\frac{1}{p}})dc + \int_0^\infty P(A_T^p \geqslant c)dc$$

$$= E\int_0^{A_T^p} dc + E\int_{A_T^p}^\infty A_T c^{-\frac{1}{p}}dc + E(A_T^p) = \frac{2-p}{1-p}E(A_T^p).$$

REMARQUE. — La proposition I permet de renforcer cette dernière inégalité.

En anticipant sur la suite de ce travail, remarquons que l'on ne peut remplacer l'hypothèse : « X est dominé par un processus croissant prévisible » par : « X est dominé par un processus croissant localement intégrable, ou même intégrable ».

Ce contre-exemple est dû à M. M. Pratelli (communication personnelle). Soit M une martingale de carré intégrable, on a :

Pour tout temps d'arrêt T $\quad E([M, M]_T) = E(\langle M, M \rangle_T)$.

Donc, si $p < 1$, $E([M, M]_\infty^p) \leqslant \frac{2-p}{1-p} E(\langle M, M \rangle_\infty^p)$ d'après l'inégalité précédente.

Si l'on pouvait énoncer l'inégalité précédente avec intégrable à la place de prévisible, on aurait : $E(\langle M, M \rangle_\infty^p) \leqslant KE([M, M]_\infty^p)$ si $p < 1$, K ne dépendant pas de M ; ce qui n'est pas.

Prenons $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{F}_t = \{\phi, \Omega\}$ si $t < 1$, les boréliens de [0, 1] si $t \geqslant 1$ et P la mesure de Lebesgue sur 0.

Pour tout n, soit M_t^n la martingale :

$$M_t^n = 0 \quad \text{si} \quad t < 1, \quad M_t^n(\omega) = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{n} \\ -\sqrt{n} & \frac{1}{n} < \omega \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \omega > \frac{2}{n} \end{cases} \quad t \geqslant 1$$

On a :

$$\langle M^n, M^n \rangle_t = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geqslant 1 \end{cases}$$

et

$$[M^n, M^n]_t = 0 \quad \text{si} \quad t < 1, \quad = \begin{cases} n & 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \omega > \frac{2}{n} \end{cases} \quad t \geqslant 1$$

$$E(\langle M^n, M^n \rangle_\infty^p) = 2^p, \; E([M^n, M^n]_\infty^p) = 2n^{p-1} \to 0 \text{ quand } n \to \infty \text{ et } p<1.$$

§ 2. APPLICATIONS

DÉFINITION. — Soit X un processus à trajectoires continues à droite, on dit que c'est une sous-martingale locale (resp. martingale locale) s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_n$ telle que T_n converge p. s. vers $+\infty$ et que les processus arrêtés X^{T_n} soient des sous-martingales (resp. martingales).

On notera $\underline{\underline{S}}^+_{loc}$, (resp. $\underline{\underline{M}}_{loc}$, $\underline{\underline{M}}^2_{loc}$) l'ensemble des sous-martingales positives (resp. martingales locales, martingales locales localement de carré intégrable) nulles en 0.

PROPOSITION I. — (Décomposition de Doob-Meyer).

Soit X appartenant à $\underline{\underline{S}}^+_{loc}$, il existe un et un seul processus croissant prévisible que l'on note $\tilde{X}$ tel que $X - \tilde{X}$ soit une martingale locale.

Démonstration. — $\tilde{X}$ est défini localement, puis par recollement, d'après l'existence et l'unicité de la décomposition de Doob-Meyer pour X^{T_n}, pour tout n [*4*].

PROPOSITION II. — Soit X appartenant à $\underline{\underline{S}}^+_{loc}$, on a alors, pour tout temps d'arrêt fini T :

$$E(X_T) \leqslant E(\tilde{X}_T) \leqslant E(X^*_T)$$

Démonstration. — Soit $(T_n)_n$ une suite de temps d'arrêt qui converge en croissant vers $+\infty$ et telle que pour tout n $(X - \tilde{X})^{T_n}$ soit une martingale uniformément intégrable.

On a donc pour tout n :

$$E(X_{T_n \wedge T}) = E(\tilde{X}_{T_n \wedge T}) \leqslant E(X^*_T)$$

La conclusion est alors immédiate en appliquant le lemme de Fatou.

Par conséquent X* *domine* $\tilde{X}$ *qui domine* X. On peut appliquer les résultats du chapitre précédent au couple $(X, \tilde{X})$ mais pas en général au couple $(\tilde{X}, X^*)$ car X* n'est pas prévisible en général, *sauf si* X *est elle-même prévisible.*

Voici des cas particuliers intéressants où l'on peut appliquer ce qui précède.

— Si X est un processus croissant localement intégrable, $\tilde{X}$ est son compensateur prévisible.

— Si M appartient à $\underline{\underline{M}}_{loc}$, alors $X = |M|$ est dans $\underline{\underline{S}}^{+}_{loc}$. Le processus $\tilde{X}$ ne semble pas avoir été très étudié, sauf dans le cas où M est continue, auquel cas $\tilde{X}$ est le temps local de M [7] noté L^0_t.

— Si M appartient à M^2_{loc}, alors $X = M^2$ est dans S^{+}_{loc}. Le processus $\tilde{X}$ est alors le processus $\langle M, M \rangle$; de plus, si $B = [M, M]$, alors $\tilde{B}$ est aussi $\langle M, M \rangle$.

§ 3. MARTINGALES LOCALES ET CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que l'inégalité fondamentale et ses conséquences permettent de munir certains espaces de martingales locales de topologies intéressantes.

On retrouve ainsi très naturellement la construction des intégrales stochastiques par rapport à une martingale locale continue présentée par K. Ito [2] et Ph. Courrège [1].

Une application immédiate du corollaire I du § 1 entraîne :

PROPOSITION I. — Soit $(M^n)_n$ une suite de $\underline{\underline{M}}^2_{loc}$ et $M \in \underline{\underline{M}}^2_{loc}$. Pour tout temps d'arrêt T on a :

$$\langle M - M^n, M - M^n \rangle_T \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \sup_{s \leq T} |M^n_s - M_s| \xrightarrow{P} 0$$

Si M^n et M appartiennent à $\underline{\underline{M}}^c_{loc}$ (martingales locales continues) on a :

$$\langle M - M^n, M - M^n \rangle_T \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow \sup_{s \leq T} |M^n_s - M_s| \xrightarrow{P} 0$$

Dans toute la suite, on note $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction $x \to \dfrac{x}{1+x}$.

Soit $\mathscr{X}$ l'ensemble des processus p. s. à trajectoires continues à droite et adaptés à $\mathscr{F}_t$ (on confond deux processus indistinguables). *Munissons $\mathscr{X}$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact en probabilité.*

Cette topologie est métrisable, une distance compatible avec elle étant donnée par :

$$d(X, Y) = \sum_n 2^{-n} E(g(\sup_{s \leq n} |X_s - Y_s|))$$

Remarquons que d est invariante par translation.

Enfin une application du lemme de Borel-Cantelli entraîne que $(\mathscr{X}, d)$ *est un espace vectoriel métrique complet.* Il en est de même de $(\mathscr{X}^c, d)$ où $\mathscr{X}^c$ désigne le sous-espace de $\mathscr{X}$ formé des processus continus.

Étudions maintenant la topologie induite par d sur $\underline{\underline{M}}^c_{loc}$:

PROPOSITION II. — $(\underline{\underline{M}}^c_{loc}, d)$ est un espace vectoriel métrique complet

Démonstration. — Soit $(M^n)_n$ une suite de $\underline{\underline{M}}^c_{loc}$ qui converge vers M dans $(\mathscr{X}, d)$ d'après ce qui précède, on sait que M appartient à $\mathscr{X}^c$. Il reste donc à montrer que M est une martingale locale. Soit $T_n = \inf \{ t \mid M_t \mid \geqslant n \}$. La suite T_n converge vers $+ \infty$, et pour tout $n \mid M_{T_n \wedge t} \mid \leqslant n$ car M est continu.

Fixons t et $s \leqslant t$. Il existe une sous-suite (n_j) telle que :

$$\sup_{u \leqslant t} | M_u^{n_j} - M_u | \overset{\text{P.S.}}{\rightarrow} 0 .$$

Soit $T_n^j = \inf \{ u \, | M_u^{n_j} | \geqslant n + 1 \}$.

Pour presque tout ω il existe $j_0(\omega)$ tel que pour tout $j \geqslant j_0(\omega)$ et pour tout $u \leqslant t$ on ait $| M_u^{n_j}(\omega) - M_u(\omega) | \leqslant \frac{1}{2}$.

Si $u \leqslant T_n(\omega) \wedge t$ alors $| M_u(\omega) | \leqslant n$ et donc $| M_u^{n_j}(\omega) | \leqslant n + \frac{1}{2} < n + 1$.

Par conséquent si $j \geqslant j_0(\omega)$, $T_n(\omega) \wedge t \leqslant T_n^j(\omega) \wedge t$.

Par suite si $j \geqslant j_0(\omega)$, $T_n(\omega) \wedge t = T_n(\omega) \wedge T_n^j(\omega) \wedge t$.

On a donc :

$$T_n \wedge T_n^j \wedge t \overset{\text{P.S.}}{\rightarrow} T_n \wedge t \qquad \text{et donc} \qquad T_n \wedge T_n^j \wedge s \overset{\text{P.S.}}{\rightarrow} T_n \wedge s .$$

Puisque $T_n \wedge T_n^j \wedge t \leqslant T_n^j \wedge t$ on a donc $| M^{n_j}_{T_n \wedge T_n^j \wedge t} | \leqslant n + 1$ pour tout j.

De plus, d'après les propriétés de la convergence uniforme :

$$M^{n_j}_{T_n \wedge T_n \wedge t} \overset{\text{P.S.}}{\rightarrow} M_{T_n \wedge t} \qquad \text{et} \qquad M^{n_j}_{T_n \wedge T_n^j \wedge s} \overset{\text{P.S.}}{\rightarrow} M_{T_n \wedge s} .$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M_{T_n \wedge s} &= \lim_j \text{ p. s. } M^{n_j}_{T_n \wedge T_n^j \wedge s} = \lim_j \text{ p. s. } E(M^{n_j}_{T_n \wedge T_n^j \wedge t} \mid \mathscr{F}_s) \\ &= E \, (\lim_j \text{ p. s. } M^{n_j}_{T_n \wedge T_n^j \wedge t} \mid \mathscr{F}_s) = E(M_{T_n \wedge t} \mid \mathscr{F}_s) . \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout n M^{T_n} est une martingale et donc M est une martingale locale continue.

Remarquons que cette démonstration convient également pour le cas où les M^n auraient leurs sauts uniformément bornés.

On introduit sur $\underline{\underline{M}}^2_{\mathrm{loc}}$ *une seconde distance d' définie par :*

$$d'(M, N) = \sum_n 2^{-n} E(g(\langle M - N, M - N \rangle_n),$$

également invariante par translation.

PROPOSITION III. — 1) La topologie définie par d sur $\underline{\underline{M}}^2_{\mathrm{loc}}$ est moins fine que celle définie par d'.

2) Sur $\underline{\underline{M}}^c_{\mathrm{loc}}$ les structures uniformes définies par d et d' coïncident.

3) Et donc $(\underline{\underline{M}}^c_{\mathrm{loc}}, d')$ est complet.

Démonstration. 1) et 2) découlent de la proposition I et de l'invariance par translation des distances considérées. 3) Découle alors de la proposition II.

Donnons enfin une application immédiate de la proposition I de ce paragraphe.

Soit $M \in \underline{\underline{M}}^2_{\mathrm{loc}}$ et

$$\Lambda(M) = \left\{ f \text{ prévisible, p. s. pour tout } t \int_0^t f_s^2 d\langle M, M \rangle_s < +\infty \right\}$$

PROPOSITION IV. — Soit $(f_n)_n$ et f appartenant à $\Lambda(M)$ et T un temps d'arrêt.

Si

$$\int_0^T (f_s^n - f_s)^2 d\langle M, M \rangle_s \xrightarrow{P} 0,$$

alors :

$$\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t (f_s^n - f_s) dM_s \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Démonstration. — C'est évident car le processus croissant prévisible associé à $(f^n - f).M$ est $(f^n - f)^2.\langle M, M \rangle$.

COROLLAIRE. — Soit M appartenant à $\underline{\underline{M}}^2_{\mathrm{loc}}$, T un temps d'arrêt fini et $\mathscr{C}_n$ une suite de subdivisions aléatoires de $[\![0, T]\!]$, composées de temps d'arrêt, et dont le pas tend p. s. vers zéro. On a alors :

$$\sup_{t \leq T} \left| \sum_{\tau_n} (M_{t_{i+1}^n \wedge t} - M_{t_i^n \wedge t})^2 - [M, M]_t \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Démonstration. — Nous utilisons l'identité évidente suivante :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)^2 = a_n^2 - a_0^2 - 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i(a_{i+1} - a_i).$$

Pour tout n, soit

$$f^n = \sum_{\tau_n} \mathrm{M}_{t_i^n} \mathrm{I}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}.$$

Un calcul simple montre immédiatement que l'expression du corollaire est égale à (en utilisant la formule d'intégration par partie)

$$2 \sup_{t \leq \mathrm{T}} \left| \int_0^t (f_s^n - \mathrm{M}_{s-}) d\mathrm{M}_s \right|,$$

expression qui tend en probabilité vers 0, d'après la proposition précédente et le théorème de Lebesgue.

RÉFÉRENCES

[1] Ph. COURRÈGE, *Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable.* Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 62-63, n° 7.

[2] K. ITO, *Lectures on stochastic process.* Tata institute.

[3] GETOOR-SHARPE, Conformal martingales. *Inv. Math.*, 72 16, 271-3.

[4] P. A. MEYER, *Probabilité et potentiel.* Hermann.

[5] M. PRATELLI, *Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable.* Lecture note, n° 511, Séminaire de probabilité X, p. 401.

[6] C. DELLACHERIE, Capacités et processus stochastiques. *Ergeb. der math.*, Springer-Verlag.

[7] P. A. MEYER, *Un cours sur les intégrales stochastiques.* Lecture note, n° 511, Séminaire de probabilité X.

(Manuscrit reçu le 21 mars 1977)