ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J.-P. LEPELTIER

B. MARCHAL

Sur l'existence de politiques optimales dans le contrôle intégro-différentiel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 1 (1977), p. 45-97

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_1_45_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIII, n° 1, 1977, p. 45-97.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur l'existence de politiques optimales dans le contrôle intégro-différentiel

par

J.-P. LEPELTIER
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques,
Route de Laval, 72000 Le Mans

et

B. MARCHAL (*)
Université Paris-Nord — C. S. P.,
Département de Mathématiques,
Avenue J. B.-Clément, 93430 Villetaneuse

SUMMARY. — The result presented in this paper is that an optimal non-anticipative policy exists for a system described by stochastic differential equations with jumps of K. Ito, A. V. Skorohod, if an hamiltonian function achieves its infimum pointwise.

By the equivalence martingale problem- stochastic differential equations we define the solutions on the canonic space by the Cameron-Martin technique. The technique of resolution of the control problem is similar to that used by Davis-Varaiya in the continuous case.

In addition in the markovian control with the help of Airault-Föllmer results we can obtain an optimal markovian control independent of the initial law.

INTRODUCTION

Dans cet article nous nous proposons de donner une condition suffisante à l'existence d'un contrôle optimal pour un système représenté par

(*) Membre du laboratoire n° 224 associé au C. N. R. S. « Processus stochastiques et Applications ».

une équation différentielle stochastique avec sauts de K. Ito, où le contrôle modifie le terme de translation ainsi que d'une façon raisonnable l'amplitude des sauts.

Ce travail se présente comme une généralisation de celui effectué en contrôle des diffusions par Davis-Varaiya [*6*], Davis [*5*]. La méthode de construction de solutions faibles de l'équation différentielle stochastique sera, dans le sens problème des martingales, développé dans [*14*], et le formalisme adopté pour la position du problème de contrôle proprement dit sera celui de Striebel [*20*], dont la théorie générale a été reprise et développée par Mémin [*16*]. Pour l'obtention des conditions de programmation dynamique, nous suivrons d'assez près la technique développée dans [*6*]. On peut toutefois remarquer que nous aurions pu choisir celle de Mémin [*16*] qui n'exige pas la connaissance de la faible compacité de l'espace des densités pour aboutir au même critère d'optimalité. Enfin de la même manière que dans le cas continu [*5*], nous montrerons que si une fonction hamiltonienne réalise son minimum nous savons alors construire un contrôle optimal.

On peut enfin remarquer que comme dans le cas des diffusions [*2*], sous des hypothèses plus fortes de convexité, on sait montrer la faible compacité de l'espace des densités associées aux contrôles admissibles, et que de la même manière que [*2*], en « grossissant » l'espace canonique, on peut alors directement obtenir l'existence d'un contrôle optimal, sans développer de théorie d'Hamilton-Jacobi comme dans [*6*], [*5*].

Notre travail se décompose en trois chapitres :

— Dans le premier chapitre nous définirons d'abord le problème des martingales, puis sera fait successivement l'établissement à l'aide d'une formule de Cameron-Martin d'une solution faible à notre équation différentielle stochastique dans les cas bornés et localement bornés (§ 1), et l'étude de la compacité faible de l'espace des densités relatives aux solutions définies précédemment (§ 2). On peut faire remarquer que l'intérêt de la première partie de cette étude déborde largement le cadre du contrôle.

— Le chapitre 2 sera consacré au problème de contrôle général. Après avoir défini notre système compatible de contrôle (§ II.1.A). Nous établissons alors successivement dans le problème du contrôle à horizon fini des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous forme d'équation de programmation dynamique (§ II.1.C), et l'existence d'un contrôle optimal dès qu'un hamiltonien réalise son minimum (§ II.2). Enfin, nous étudions l'existence d'un contrôle optimal en horizon infini (§ II.3).

— Enfin dans le chapitre trois nous définirons le contrôle markovien et les problèmes qu'il pose (§ III.1). Sous une hypothèse vérifiée en particulier si le processus contrôlé est fortement fellérien (§ III.3.A) nous montrons l'existence d'un contrôle optimal qui soit markovien et indépendant de la loi initiale (§ III.2) à l'aide d'un résultat d'Airault-Föllmer [*1*] et par une méthode purement probabiliste, ce qui nous permettra en particulier de montrer que les coefficients du critère d'optimalité sont markoviens et indépendants de la loi initiale. Dans le dernier paragraphe nous montrerons que sans l'hypothèse que le processus contrôlé soit fortement fellérien nous avons encore existence d'un contrôle optimal qui soit markovien, mais non plus indépendant de la loi initiale (§ III.3.B).

Seul le cas markovien lorsque les coefficients sont bornés et le processus fortement fellérien a été traité par Bismut [*4*] et de plus seule l'optimalité dans la classe des contrôles markoviens est considérée.

Madame El-Karoui nous a prodigué des encouragements constants au cours de ce travail. Qu'elle en soit sincèrement remerciée.

I. PRÉLIMINAIRES

§ 1. Problème des martingales

Nous désignons par :

— Ω^0 l'espace canonique des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$ continues à droite limitées à gauche (c. a. d. l. a. g.).

— $X_t(\omega)$ les applications coordonnées.

— $F_t^0 = \sigma(X_s, s \leqslant t)$, $F_\infty^0 = F^0$ les tribus engendrées par ces applications.

— a une fonction borélienne bornée définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ à valeurs définies positives sur $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, telle que a^{-1} existe et soit bornée.

— $S(t, x, du)$ un noyau σ-fini positif sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$ ($U = \mathbb{R}^d - \{0\}$), tel que :

$$\sup_{[0,t]} \int_U |u|^2 \Lambda 1 S(s, X_{s^-}, du)$$

soit fini pour tout t de $\mathbb{R}^+$.

A partir de a et S on définit l'opérateur :

$$L_t f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t, X_t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \int_U [f(\cdot + u) - f(\cdot) - \mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)} \langle u, \nabla f(\cdot) \rangle] S(t, X_{t^-}, du)$$

DÉFINITION I.1.1. — Une probabilité $P^{t,x}$ sur (Ω^0, F^0) sera dite solution au problème des martingales associé au couple (a, S) partant de x à l'instant t dès que :

1) $P^{t,x}(X_0 = x) = 1$
2) pour tout f de $\mathscr{C}_c^\infty$

$$f(X_s) - f(X_0) - \int_0^s L_{u+t} f(X_u) du$$

est une $P^{t,x}$ martingale locale relativement à la famille de tribus $(F_s^0)_{s \in \mathbb{R}^+}$.

Nous supposons désormais que :

$$(H_1) \begin{cases} a \text{ et S sont tels que pour tout couple } (t, x) \text{ il existe une et une seule} \\ \text{solution } P^{t,x} \text{ au problème des martingales associé au cou-} \\ \text{ple } (a, S) \text{ partant de } x \text{ à l'instant } t. \end{cases}$$

REMARQUE I.1.2. — En fait cette définition qui nous a été inspirée par Mayer [*15*] peut être remplacée par la définition suivante :

Une probabilité $\tilde{P}^{t,x}$ sur $(\Omega^0, F_{t,\infty}^0 = \sigma(X_s, s \geqslant t))$ sera solution au problème des martingales associé au couple (a, S) partant de x à l'instant t dès que :

1) $\tilde{P}^{t,x}(X_t = x) = 1$
2) $\forall f \in \mathscr{C}_c^\infty$

$$f(X_s) - f(X_t) - \int_t^s L_u f(X_u) du$$

est une $P^{t,x}$ martingale locale relativement à la famille de tribus $(F_{t,s}^0)_{s \geqslant t}$.

Il est facile de voir que si $P^{t,x}$ est solution du problème I.1.1. alors $\theta_t . P^{t,x}$ est solution du problème de la rem. I-1-2.

REMARQUE I.1.3. — Des conditions d'existence et d'unicité ont été établies par divers auteurs, notamment par Komatsu [*13*] et Stroock [*21*]. Pour notre part dans notre précédent article [*14*], en utilisant systématiquement l'équivalence problème des martingales-équations différentielles stochastiques établie dans celui-ci, nous avons également montré l'existence et l'unicité sous des hypothèses de Lipschitz locales ([*14*], théorème III.6). Nous avons également établi des conditions générales d'existence ([*14*], corollaire III.18). ■

Remarquant que si nous posons $a^t(s, x) = a(t + s, x)$,

$$S^t(s, x, du) = S(s + t, x, du),$$

$P^{t,x}$ est solution au problème des martingales associé au couple (a^t, S^t) partant de x à l'instant t ce qui suit sera établi partant à l'instant 0.

Supposant alors la condition (H_1) réalisée, et soit x un élément de $\mathbb{R}^d$

fixé, nous noterons P la probabilité $P^{0,x}$ qui sera appelée désormais probabilité de référence sur (Ω^0, F^0_∞).

Soient alors ϕ une fonction localement bornée définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega^0$ bimesurable telle que $\phi(t, \cdot)$ soit F_t-mesurable pour tout t fini, et ψ une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \Omega^0 \times U$, $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(U)$ mesurable ($\mathscr{P}$ désignant la tribu prévisible, et $\mathscr{B}(U)$ la tribu borélienne sur U) vérifiant :

Il existe deux constantes C_1, C_2 positives telles que :

$$(1) \qquad \begin{aligned} &|\psi(t, \omega, u)| \leqslant C_1 |u| \quad \text{sur} \quad |u| \leqslant 1 \\ &|\psi(t, \omega, u)| \leqslant C_2 \qquad \text{sur} \quad |u| > 1 \end{aligned}$$

P p. s. pour tout t.

A partir de a, ϕ, S et ψ on définit l'opérateur :

$$\begin{aligned} L_t f = &\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t, X_t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \tilde{\phi}(t) \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &+ \int_U [f(X_{t^-} + u) - f(X_{t^-}) - \mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)} \langle u, \nabla f(X_{t^-}) \rangle] e^{\psi(t,u)} S(t, X_{t^-}, du) \end{aligned}$$

où $$\tilde{\phi}(t) = \phi(t) + \int_{|u| \leqslant 1} u(e^{\psi(t,u)} - 1) S(t, X_{t^-}, du).$$

DÉFINITION I.1.4. — Une probabilité P^x sera solution au problème des martingales $M(a, \phi, S, \psi)$ partant de x à l'instant $t = 0$ dès que :

1) $P^x(X_0 = x) = 1$
2) $\forall f \in \mathscr{C}_c^\infty$

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t L_s f(X_s) ds$$

est une P^x martingale locale relativement à la famille de tribus $(F_t^0)_{t \geqslant 0}$.

Le problème que nous nous posons désormais est d'obtenir des conditions assez larges sur ϕ et ψ pour l'existence et l'unicité d'une solution au problème des martingales défini ci-dessus. Nous commençons par préciser certaines notions que nous utiliserons systématiquement ensuite [*11*].

THÉORÈME I.1.5. — Sur un espace (Ω, F, F_t, P) considérons un processus ponctuel (Y_t) σ-fini, à valeurs dans un espace U lusinien. Il existe un processus strictement croissant prévisible A et un noyau de transition de $\mathscr{P}$ vers $(U, \mathscr{B}(U))$, $N(t, \omega, \cdot)$, σ-fini tels que pour toute fonction f $\mathscr{B}(U)$ mesurable, positive, la mesure aléatoire $p_t(f) = \sum_{0 < s \leqslant t} f(Y_s)$ ait pour projection duale prévisible le processus croissant $\int_0^t N(s, \cdot, f) dA_s$.

Le couple (N, A) est appelé système de Lévy du processus (Y_t). De plus si $\tilde{p}$ désigne la projection duale prévisible de la mesure aléatoire de comptage

$$p(\omega, \cdot) = \sum_{0 < s \in D_\omega} \varepsilon_s \otimes \varepsilon_{Y_s(\omega)}$$

la mesure aléatoire $q = p - \tilde{p}$ est appelée mesure martingale du processus ponctuel (Y_t).

Avec ces notations nous déduisons le lemme suivant :

LEMME I.1.6. — Soient M une martingale locale localement de carré intégrable continue, (Y_t) un processus ponctuel σ-fini quasi-continu à gauche admettant (N, A) pour système de Lévy. Quelle que soit la fonction $f(t, \omega, u)$ $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(U)$ mesurable vérifiant :

. $e^{f_1} - 1 = e^{f \mathbb{1}_{(|f| > 1)}} - 1$ appartient à $L^{1,\text{loc}}(N, A)$

. $f_2 = f \mathbb{1}_{(|f| \leqslant 1)}$ appartient à $L^{2,\text{loc}}(N, A)$

où

$$L^{1,\text{loc}}(N, A) = \left\{ Z \, \mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(U) \text{ mesurable} \Big/ \int_0^t dA_s \int_U | Z(s, u) | N(s, du) < \infty \quad \forall t \right\}$$

$$L^{2,\text{loc}}(N, A) = \left\{ Z \, \mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(U) \text{ mesurable} \Big/ \int_0^t dA_s \int_U | Z(s, u) |^2 N(s, du) < \infty \quad \forall t \right\}$$

$$\begin{aligned} Z_t = \exp \Big\{ M_t &+ \int_0^t \int_U f_2(s, u) q(ds, du) - \frac{1}{2} \langle M, M \rangle_t \\ &- \int_0^t dA_s \int_U (e^{f_2(s,u)} - 1 - f_2(s, u)) N(s, du) \\ &+ \int_0^t \int_U f_1(s, u) p(ds, du) - \int_0^t dA_s \int_U (e^{f_1(s,u)} - 1) N(s, du) \Big\} \end{aligned}$$

est une martingale locale, où p représente la mesure aléatoire associée au processus ponctuel (Y_t) et q « la mesure martingale » associée.

Preuve. — Posons $Z_t = Z_t^1 \times Z_t^2$ avec

$$\begin{aligned} Z_t^1 = \exp \Big\{ M_t &+ \int_0^t \int_U f_2(s, u) q(ds, du) - \frac{1}{2} \langle M, M \rangle_t \\ &- \int_0 dA_s \int_U (e^{f_2(s,u)} - 1 - f_2(s, u)) N(s, du) \Big\} \end{aligned}$$

Le processus (Z_t^1) est une martingale locale par application directe de la formule exponentielle de [*14*] à la martingale locale

$$M_t + \int_0^t \int_U f_2(s, u)q(ds, du),$$

qui n'a que des sauts d'amplitude inférieure ou égale à 1.

Soit donc :

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= \exp\left\{ \int_0^t \int_U f_1(s, u)p(ds, du) - \int_0^t dA_s \int_U (e^{f_1(s,u)} - 1)N(s, du) \right\} \\ &= \exp\left\{ \int_0^t \int_U (e^{f_1(s,u)} - 1)q(ds, du) - \int_0^t \int_U (e^{f_1(s,u)} - 1 - f_1(s, u))p(ds, du) \right\} \\ &= \exp\left\{ \int_0^t \int_U (e^{f_1(s,u)} - 1)q(ds, du) \right\} \exp\left\{ - \sum_{s \leqslant t} (e^{f_1(s,Y_s)} - 1 - f_1(s, Y_s)) \right\} \\ &= \exp(N_t) \prod_{s \leqslant t} (1 + \Delta N_s) \exp(-\Delta N_s) \end{aligned}$$

où

$$N_t = \int_0^t \int_U (e^{f_1(s,u)} - 1)q(ds, du).$$

Par conséquent d'après la formule de Doléans-Dade [7], Z_t^2 est l'unique solution de l'équation :

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_{s^-} dN_s ;$$

c'est donc bien une martingale locale.

D'autre part Z^2 étant une somme compensée de sauts, et les sauts de Z^1 et Z^2 étant disjoints, les martingales locales Z^1 et Z^2 sont orthogonales entre elles ([*17*]). Par conséquent Z_t produit de deux martingales locales orthogonales est encore une martingale locale. ■

Soit alors P la probabilité de référence unique solution au problème des martingales $M(a, 0, S, 0)$ partant de x. Le processus

$$\bar{M}_t = X_t - x - \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} - \int_0^t \int_{\{|u| \leqslant 1\}} uq(ds, du),$$

où q désigne la mesure martingale associée au processus ponctuel

$$Y_t = \begin{cases} \Delta X_t \text{ si } \Delta X_t \text{ est non nul} \\ \text{le point à l'infini sinon,} \end{cases}$$

est alors une P-martingale locale continue ([*14*] théorème 23). En utilisant le lemme précédent on en déduit immédiatement que le processus :

$$\mathrm{R}_t = \exp\left\{ \int_0^t \langle \phi(s) \mid a^{-1}(s, \mathrm{X}_s) \mid d\bar{\mathrm{M}}_s \rangle + \int_0^t \int_{\mathrm{U}} \psi(s, u) q(ds, du) \right.$$
$$- \frac{1}{2} \int_0^t \langle \phi(s) \mid a^{-1}(s, \mathrm{X}_s) \mid \phi(s) \rangle \, ds$$
$$\left. - \int_0^t ds \int_{\mathrm{U}} (e^{\psi(s,u)} - 1 - \psi(s, u)) \mathrm{S}(s, \mathrm{X}_{s^-}, du) \right\}$$

est une P-martingale locale.

Avant d'établir le résultat essentiel de ce paragraphe, nous rappelons une formulation du problème des martingales sous forme exponentielle démontrée dans [*14*]. C'est cette définition du problème des martingales que nous utiliserons désormais.

THÉORÈME I.1.7. ([*14*] théorème 12). — Soit Q une probabilité sur $(\Omega^0, (\mathrm{X}_t)_{t \geqslant 0}, (\mathrm{F}_t^0)_{t \geqslant 0})$ telle que $\mathrm{Q}(\mathrm{X}_0 = x) = 1$. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1) Q est une solution au problème des martingales $\mathrm{M}(a, \phi, \mathrm{S}, \psi)$ partant de x.

2)

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\left[\sum_{s \leqslant \mathrm{S}} h(s, \Delta \mathrm{X}_s) \mathbb{1}_{(|\Delta \mathrm{X}_s| \neq 0)} \right] = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\left[\int_0^{\mathrm{S}} ds \int_{\mathrm{U}} e^{\psi(s,u)} h(s, u) \mathrm{S}(s, \mathrm{X}_{s^-}, du) \right]$$

pour tout h borélienne positive, pour tout S temps d'arrêt, et de plus pour tout θ de $\mathbb{R}^d$

$$\exp\left\{ \left\langle \theta, \mathrm{X}_t - x - \int_0^t \tilde{\phi}(s) ds - \sum_{s \leqslant t} \Delta \mathrm{X}_s \mathbb{1}_{(|\Delta \mathrm{X}_s| > 1)} \right\rangle \right.$$
$$- \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, a(s, \mathrm{X}_s) \theta \rangle \, ds$$
$$\left. - \int_0^t ds \int_{|u| \leqslant 1} (e^{\langle \theta, u \rangle} - 1 - \langle \theta, u \rangle) e^{\psi(s,u)} \mathrm{S}(s, \mathrm{X}_{s^-}, du) \right\}$$

est une Q-martingale locale.

Nous en déduisons le théorème d'existence et d'unicité suivant :

THÉORÈME I.1.8. — Soit P la probabilité de référence. Avec les notations précédentes, si R_t est une vraie martingale, et si l'on considère $P_{\phi,\psi}$ la probabilité sur Ω^0 définie par :

$$\left.\frac{dP_{\phi,\psi}}{dP}\right|_{F_t^0} = R_t \tag{2}$$

$P_{\phi,\psi}$ est alors l'unique solution au problème des martingales $M(a, \phi, S, \psi)$ partant de x ; $P_{\phi,\psi}$ ne peut être définie sur (Ω^o, F^o) que si R_∞ existe.

Preuve. — D'une part on peut écrire :

$$E_{P_{\phi,\psi}}\left[\sum_{s\leqslant S} h(s, \Delta X_s)\mathbb{1}_{(\Delta X_s \neq 0)}\right] = E_P\left[R_S \sum_{s\leqslant S} h(s, \Delta X_s)\mathbb{1}_{(\Delta X_s\neq 0)}\right]$$
$$= E_P\left[\int_0^S R_s d\left(\sum_{s\leqslant S} h(s, \Delta X_s)\mathbb{1}_{(\Delta X_s\neq 0)}\right)\right]$$

avec $R_s = R_{s^-} \exp \psi(s, \Delta X_s)$

d'où :

$$E_{P_{\phi,\psi}}\left[\sum_{s\leqslant S} h(s, \Delta X_s)\mathbb{1}_{(\Delta X_s\neq 0)}\right]$$
$$= E_P\left[\int_0^S R_{s^-} d\left[\sum_{v\leqslant s} h(v, \Delta X_v) \exp \psi(v, \Delta X_v)\mathbb{1}_{(\Delta X_v\neq 0)}\right]\right]$$
$$= E_P\left[\int_0^S ds R_{s^-} \int_U h(s, u) \exp \psi(s, u) S(s, X_{s^-}, du)\right]$$
$$= E_{P_{\phi,\psi}}\left[\int_0^S ds \int_U h(s, u) \exp \psi(s, u) S(s, X_{s^-}, du)\right],$$

en utilisant successivement le fait que P soit solution du problème des martingales $M(a, 0, S, 0)$ partant de x, et la définition de la probabilité $P_{\phi,\psi}$.

D'autre part on cherche à montrer que :

$$S_t = \left\{\exp\left\{\left\langle \theta, X_t - x - \int_0^t \tilde{\phi}_s ds - \sum_{s\leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|>1)}\right\rangle\right.\right.$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(s, X_s)\theta \rangle ds$$
$$\left.- \int_0^t ds \int_{|u|\leqslant 1} (e^{\langle\theta,u\rangle} - 1 - \langle \theta, u \rangle) e^{\psi(s,u)} S(s, X_{s^-}, du)\right\}$$

est une $P_{\phi,\psi}$ martingale locale, ou ce qui revient au même, que R_tS_t est une P-martingale locale.

Or en effectuant les calculs on obtient :

$$R_tS_t = \exp\left\{ \int_0^t \langle \phi(s)+\theta, a^{-1}(s, X_s)d\bar{M}_s \rangle \right.$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \langle \phi(s)+\theta, a^{-1}(s, X_s)(\phi(s)+\theta) \rangle ds$$
$$+ \int_0^t \int_U (\langle \theta, u\mathbb{1}_{(|u|\leq 1)} \rangle + \psi(s, u))q(ds, du)$$
$$\left. - \int_0^t ds \int_U [e^{\langle \theta, u\mathbb{1}_{(|u|\leq 1)}\rangle + \psi(s,u)} - 1 - \langle \theta, u\mathbb{1}_{(|u|\leq 1)} \rangle - \psi(s, u)]S(s, X_{s^-}, du) \right\}$$

qui est bien une P-martingale locale par application directe du Lemme I.1.6.

D'après le théorème I.1.7. la probabilité $P_{\phi,\psi}$ est solution au problème des martingales $M(a, \phi, S, \psi)$ partant de x.

L'unicité s'établit de la même manière que dans [*14*] théorème 26. ■

Il nous reste alors à étudier sous quelles conditions assez larges la martingale locale R_t se révèle être une vraie martingale, cette étude constituera la fin du premier paragraphe. Nous allons rappeler auparavant deux résultats établis dans [*14*] (Proposition 11, théorème 15) que nous utiliserons par la suite.

PROPOSITION I.1.9. — Soit M_t une martingale locale c. a. d. l. a. g., quasi continue à gauche, dont tous les sauts sont bornés en valeur absolue par un nombre k, et tel que le processus ponctuel associé à M_t ait pour système de Lévy le couple (N, A), et soit enfin $f_\lambda(x) = e^{\lambda x} - 1 - \lambda x$. Alors la martingale locale

$$X_t^\lambda = \exp\left\{ \lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M^c, M^c \rangle_t - \int_0^t dA_s N(s, f_\lambda) \right\}$$

(voir lemme I.1.6.) est une martingale de carré intégrable dès que

$$E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s)d\langle M^c, M^c \rangle_s \right] \quad \text{et} \quad E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s)N(s, (e^\lambda - 1)^2)dA_s \right]$$

sont finis pour tout λ, pour tout t.

PROPOSITION I.1.10. — Soit M_t une martingale locale réelle, nulle en 0, quasi continue à gauche telle que $\langle M, M \rangle_t \leq Kt$ pour tout t fini, et dont tous les sauts sont bornés en valeur absolue par un nombre k. Alors : $E[e^{\lambda \sup_{s\leq t} |M_s|}]$ est finie pour tout λ et pour tout t et

$$P[\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| \geq c] \leq 2 \exp\left\{ -\frac{c}{2}\operatorname{Log}(\operatorname{Log} c)\right\}$$

dès que $c > e$, et $(\operatorname{Log} c)^2 \leq \dfrac{c}{2kt}$

Nous en déduisons :

Proposition I.1.11. — Si ϕ est bornée $P_{p.s.}$ pour tout t par un nombre K_1, alors R_t est une vraie martingale.

Preuve. — La martingale

$$M_t = \int_0^t \langle \phi(s) \,|\, a^{-1}(s, X_s) \,|\, d\bar{M}_s \rangle + \int_0^t \int_U \psi(s, u) q(ds, du)$$

admet pour processus croissant :

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t \langle \phi(s) \,|\, a^{-1}(s, X_s) \,|\, \phi(s) \rangle ds + \int_0^t ds \int_U \psi^2(s, u) S(s, X_{s^-}, du)$$

et le système de Lévy associé au processus ponctuel

$$\begin{cases} \Delta M_t \text{ si } \Delta M_t \text{ est non nul} \\ \text{le point à l'infini sinon} \end{cases} \quad \text{est de la forme } (N, t) \text{ avec}$$

$N(s, f) = \displaystyle\int_U f(\psi(s, u)) S(s, X_{s^-}, du)$. Par conséquent $\langle M, M \rangle_t$ est majoré par $K_1^2 M_1 t + Lt$, où M_1 est un majorant de a^{-1}, et L de

$$\sup_{s\leq t}\left[C_1 \int_{|u|\leq 1} |u|^2 S(s, X_{s^-}, du) + C_2 \int_{|u|>1} S(s, X_{s^-}, du)\right];$$

donc d'après la proposition I.1.10. $E[e^{\lambda \sup_{s\leq t} |M_s|}]$ est finie pour tout λ et tout t. Alors

$$E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s) d\langle M^c, M^c\rangle_s\right] \leq K_1^2 M_1 t E[\exp(2\lambda \sup_{s\leq t} |M_s|)] < \infty$$

pour tout λ et tout t; de même :

$$E\left[\int_0^t ds \int_U \exp(2\lambda M_s)(e^{\lambda\psi(s,u)} - 1)^2 S(s, X_{s^-}, du)\right]$$
$$\leq M_2 t E[\exp(2\lambda \sup_{s\leq t} |M_s|)] < \infty$$

pour tout λ, tout t où M_2 est un majorant de

$$\sup_{s \leqslant t} \int_U (e^{\lambda \psi(s,u)} - 1)^2 S(s, X_{s^-}, du)$$

qui existe d'après les hypothèses faites sur S.

Il suffit alors d'appliquer à M_t la proposition I.1.9. pour obtenir immédiatement le résultat. ■

Il est possible d'obtenir un résultat identique en affaiblissant les hypothèses sur ϕ sous forme de conditions locales de bornitude.

PROPOSITION I.1.12. — Si ϕ vérifie : il existe une constante K positive telle que :

$$|\phi_t| \leqslant K(1 + \sup_{s \leqslant t} |X_s|) \qquad P_{\text{p.s.}} \text{ pour tout } t, \tag{3}$$

alors R_t est une vraie martingale.

Preuve. — Cette démonstration ne présente en fait que des difficultés techniques, bien qu'étant fort longue. Aussi afin de ne pas égarer le lecteur nous en donnons le fil conducteur.

Nous pouvons en arrêtant ϕ la borner par une suite de temps d'arrêt tendant vers l'infini. Le résultat est alors vrai pour les ϕ^n obtenus. Il suffit alors de remarquer que les martingales R_t^n obtenues à partir des couples (ϕ^n, ψ) sont telles que R_t^n converge dans L^1 vers R_t pour tout t fini, d'où le résultat.

Posons $\phi^n(t) = \phi(t)\mathbb{1}_{(\sup_{s \leqslant t} |X_s| \leqslant n)}$. La fonction ϕ^n étant alors bornée, le processus R_t^n construit à partir du couple (ϕ^n, ψ) est une martingale. Par conséquent la probabilité $P_{\phi^n,\psi}$ définie par (2) est l'unique solution au problème $M(a, \phi^n, S, \psi)$ partant de x.

Soit $\tau_n = \inf (t/|X_t| \geqslant n)$; on peut alors écrire :

$$P(\tau_n \leqslant t) = P(\sup_{s \leqslant t} |X_s| > n)$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini à l'aide de la majoration exponentielle de la proposition I.1.10. appliquée à la P-martingale :

$$M_t = X_t - x - \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)}.$$

On en déduit donc que $P_{\text{p.s.}} \sup_{s \leqslant t} |X_s|$ est fini.

D'autre part sur l'ensemble $\sup_{s \leqslant t} |X_s| \leqslant n_0$, pour tout $n \geqslant n_0$, $R_t^n = R_t P._{\text{p.s.}}$, on en déduit par suite la convergence presque sûre de R_t^n vers R_t.

Il suffit alors de démontrer l'équi-intégrabilité de la famille R_t^n pour tout t fini.

Pour cela, donnons nous ε, C positifs ; on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_{(R_t^n > c)} R_t^n dP &= \int_{(R_t^n > c)(\tau_m \leqslant t)} R_t^n dP + \int_{(R_t^n > c)(\tau_m > t)} R_{t\wedge\tau_m}^n dP \\ &\leqslant \int_{(\tau_m \leqslant t)} R_t^n dP + \int_{(R_{t\wedge\tau_m}^n > c)} R_{t\wedge\tau_m}^n dP \\ &\leqslant \int_{(\tau_m \leqslant t)} dP_{\phi^n,\psi} + \int_{(R_{t\wedge\tau_m}^n > c)} R_{t\wedge\tau_m}^n dP\end{aligned}$$

où $P_{\phi^n,\psi}(\tau_m \leqslant t) = P_{\phi^n,\psi}(\sup\limits_{s\leqslant t} |X_s| > m)$. La probabilité $P_{\phi^n,\psi}$ étant solution au problème des martingales $M(a, \phi^n, S, \psi)$ partant de x, il vient que :

$$M_t = X_t - x - \sum_{s\leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|>1)} - \int_0^t \tilde{\phi}^n(s)ds$$

est une $P_{\phi^n,\psi}$ martingale locale de processus croissant associé à

$$\langle \theta, M_t \rangle : \int_0^t \langle \theta | a(s, X_s) | \theta \rangle ds + \int_0^t ds \int_{|u|\leqslant 1} |u|^2 e^{\psi(s,u)} S(s, X_{s^-}, du)$$

borné par une expression de la forme Kt d'après les hypothèses faites sur a, ψ et S.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\sup_{s\leqslant t} |X_s| &\leqslant \sup_{s\leqslant t} |M_s| + \sum_{s\leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|>1)} + |x| + \int_0^t |\tilde{\phi}^n(s)| ds \\ &\leqslant \sup_{s\leqslant t} |M_s| + \sum_{s\leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|>1)} + |x| \\ &\quad + \int_0^t ds \int_{|u|\leqslant 1} |u| |e^{\psi(s,u)} - 1| S(s, X_{s^-}, du) \\ &\quad + K_1 \int_0^t [1 + \sup_{v\leqslant s} |X_v|] ds \\ &\leqslant \sup_{s\leqslant t} |M_s| + \sum_{s\leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|>1)} + |x| \\ &\quad + K_2 t + K_1 \int_0^t \sup_{v\leqslant s} |X_v| ds\end{aligned}$$

où K_2 est un majorant de

$$K_1 + \sup_{s \leqslant t} \int_{|u| \leqslant 1} |u| \, | e^{\psi(s,u)} - 1 | \, S(s, X_{s^-}, du).$$

En utilisant l'inégalité de Bellman-Gronwall on obtient une inégalité de la forme :

$$\sup_{s \leqslant t} |X_s| \leqslant e^{K_3 t} \Big[\sup_{s \leqslant t} |M_s| + \sum_{s \leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} + |x| + K_2 t \Big]$$

d'où :

$$P_{\phi^n,\psi}(\tau_m \leqslant t) \leqslant P_{\phi^n,\psi}\Big[\sup_{s \leqslant t} |M_s| + \sum_{s \leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} > me^{-K_3 t} - K_2 t - |x| \Big]$$

$$\leqslant P_{\phi^n,\psi}\Big[\sup_{s \leqslant t} |M_s| > \frac{me^{-K_3 t} - K_2 t + |x|}{2} \Big] + P_{\phi^n,\psi}\Big[\sum_{s \leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} > \frac{me^{-K_3 t} - K_2 t - |x|}{2} \Big]$$

et si m est assez grand ($m \geqslant n_0$) ces deux termes peuvent alors être rendus aussi petits que l'on veut par une majoration ne dépendant pas de n (le premier par la majoration exponentielle, le second parce que S intègre $|u| \mathbb{1}_{(|u| > 1)}$ uniformément sur $[0, t]$).

Fixons alors $m \geqslant n_0$. Pour tout $n \geqslant m$, $R^n_{t \wedge \tau_m} = R^m_{t \wedge \tau_m}$ et par conséquent :

$$\sup_n \int_{(R^n_{t \wedge \tau_m} > c)} R^n_{t \wedge \tau_m} dP = \sup_{n \leqslant m} \int_{(R^n_{t \wedge \tau_m} > c)} R^n_{t \wedge \tau_m} dP$$

Par suite puisque le sup porte sur un ensemble fini, il existe C_0 indépendant de n tel que pour tout $c \geqslant C_0$

$$\int_{(R^n_{t \wedge \tau_m} > c)} R^n_{t \wedge \tau_m} dP \leqslant \varepsilon$$

d'où l'équi-intégrabilité de la famille R^n_t et le résultat annoncé. ■

REMARQUE I.1.13. — Si ϕ vérifie :

(4) $$|\phi_t| \leqslant K(1 + \sup_{s \leqslant t} |X^1_s|) \qquad P._{\text{p.s.}} \text{ pour tout } t$$

où

$$X^1_t = X_t - \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)}$$

par le même type de raisonnement, nous pouvons montrer que R_t est encore une vraie martingale. ■

Cette remarque sera essentielle au cours du paragraphe suivant, car c'est après une condition de ce type que nous pourrons atteindre la faible compacité de l'espace des densités.

§ 2. Compacité faible de l'espace des densités

A. CAS BORNÉ

T désigne un nombre réel positif. On considère alors l'ensemble Φ_K des applications ϕ vérifiant les conditions du premier paragraphe, de plus bornées $P._{p.s.}$ pour tout t par un nombre K fixé. Soit encore Ψ l'ensemble des applications ψ vérifiant toujours les conditions du paragraphe précédent.

Pour tout couple (ϕ, ψ) appartenant à $\Phi_K \times \Psi$ on note :

$$\xi_t(\phi, \psi) = \int_0^t \langle \phi(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid d\bar{M}_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \phi(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid \phi(s) \rangle \, ds$$
$$+ \int_0^t \int_U \psi(s, u) q(ds, du) - \int_0^t ds \int_U [e^{\psi(s,u)} - 1 - \psi(s, u)] S(s, X_{s^-}, du)$$

et

$$\mathscr{D}(\Phi_K, \Psi) = \{ \exp \xi_T(\phi, \psi) \mid \phi \in \Phi_K, \psi \in \Psi \}$$

On montre alors successivement :

LEMME I.2.1. — $\mathscr{D}(\Phi_K, \Psi)$ est borné dans $L^2(\Omega^0, F^0_\infty, P)$.

Preuve. — Soit $\exp \xi_T(\phi, \psi)$ un élément de $\mathscr{D}(\Phi_K, \Psi)$. On peut écrire :

$$E_P[\exp(2\xi_T(\phi, \psi)]$$
$$= E_P\left[\exp \xi_T(2\phi, 2\psi) \exp \left\{ \int_0^T \langle \phi(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid \phi(s) \rangle \, ds \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^T ds \int_U (e^{\psi(s,u)} - 1)^2 S(s, X_{s^-}, du) \right\} \right]$$
$$= E_{P_{2\phi, 2\psi}}\left[\exp \int_0^T \langle \phi(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid \phi(s) \rangle \, ds \right.$$
$$\left. \times \exp \int_0^T ds \int_U (e^{\psi(s,u)} - 1)^2 S(s, X_{s^-}, du) \right]$$
$$\leqslant e^{K^2 M T} E_{P_{2\phi, 2\psi}}\left[\exp \int_0^T ds \int_U (e^{\psi(s,u)} - 1)^2 S(s, X_{s^-}, du) \right]$$

(où M est un majorant de a^{-1}).

En utilisant la formule de Taylor, ainsi que les majorations sur ψ, on montre aisément :

$$\int_0^T ds \int_{|u|\leqslant 1} (e^{\psi(s,u)} - 1)^2 S(s, X_{s^-}, du)$$
$$\leqslant \int_0^T ds \int_{|u|\leqslant 1} \psi^2(s, u) e^{2C_1} S(s, X_{s^-}, du) \leqslant C_1^2 e^{2C_1} M_1 T$$

où M_1 est un majorant de $\sup_{s\leqslant T} \int_{|u|\leqslant 1} |u|^2 S(s, X_{s^-}, du)$; et :

$$\int_0^T ds \int_{|u|>1} (e^{\psi(s,u)} - 1)^2 S(s, X_{s^-}, du) \leqslant e^{2C_2} C_2^2 M_2 T$$

où M_2 est un majorant de $\sup_{s\leqslant T} \int_{|u|>1} S(s, X_{s^-}, du)$

par conséquent :

$$E_P[\exp(2\xi_T(\phi, \psi)] \leqslant e^{K^2MT} \times e^{(C_1^2 e^{2C_1} M_1 + C_2^2 e^{2C_2})T}$$

d'où le résultat. ■

LEMME I.2.2. — $\mathscr{D}(\Phi_K, \Psi)$ est convexe.

Preuve. — Soient ϕ_1, $\phi_2(\psi_1, \psi_2)$ éléments de $\Phi_K(\Psi)$ et λ_1, λ_2 positifs tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. On pose :

$$\rho(t) = \lambda_1 \exp \xi_t(\phi_1, \psi_1) + \lambda_2 \exp \xi_t(\phi_2, \psi_2).$$

D'après la formule d'Ito appliquée à la semi-martingale $\xi_t(\phi_1, \psi_1)$ et à la fonction $f(x) = e^x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\exp \xi_t(\phi_1, \psi_1) &= 1 \\
&+ \int_0^t \exp(\xi_s(\phi_1, \psi_1)) \langle \phi_1(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid d\bar{M}_s \rangle \\
&\pm \int_0^t \int_U \exp\{\xi_{s^-}(\phi_1, \psi_1)\} \psi_1(s, u) q(ds, du) \\
&- \frac{1}{2} \int_0^t ds \exp(\xi_s(\phi_1, \psi_1)) \langle \phi_1(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid \phi_1(s) \rangle ds \\
&- \int_0^t ds \exp(\xi_s(\phi_1, \psi_1)) \int_U (e^{\psi_1(s,u)} - 1 - \psi_1(s, u)) S(s, X_{s^-}, du) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t ds \exp(\xi_s(\phi_1, \psi_1) \langle \phi_1(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid \phi_1(s) \rangle ds \\
&\pm \sum_{s\leqslant t} e^{\xi_{s^-}} [e^{\Delta\xi_s} - 1 - \Delta\xi_s]
\end{aligned}$$

où $\Delta\xi_s = \psi(s, \Delta X_s)$.

D'où :

$$\exp \xi_t(\phi_1, \psi_1) = 1 + \int_0^t \exp (\xi_s(\phi_1, \psi_1)) \langle \phi_1(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid d\bar{M}_s \rangle + \int_0^t \int_U \exp (\xi_{s^-}(\phi_1, \psi_1))(e^{\psi_1(s,u)} - 1)q(ds, du)$$

En effectuant le même calcul pour $\exp \xi_t(\phi_2, \psi_2)$ et la combinaison linéaire par λ_1 et λ_2 respectivement on obtient :

$$\rho(t) = 1 + \int_0^t \rho(s) \langle \phi(s) \mid a^{-1}(s, X_s) \mid d\bar{M}_s \rangle + \int_0^t \int_U \rho(s_-)(e^{\psi(s,u)} - 1)q(ds, du)$$

avec :

$$\phi(t) = \frac{\lambda_1 \exp \xi_t(\phi_1, \psi_1)}{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \exp \xi_t(\phi_i, \psi_i)} \phi_1(t) + \frac{\lambda_2 \exp \xi_t(\phi_2, \psi_2)}{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \exp \xi_t(\phi_i, \psi_i)} \phi_2(t)$$

où ϕ est un élément de Φ_K (combinaison linéaire convexe de ϕ_1 et ϕ_2) et $\psi(t, u)$ tel que :

$$e^{\psi(t,u)} = \frac{\lambda_1 \exp \xi_t(\phi_1, \psi_1)}{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \exp \xi_t(\phi_i, \psi_i)} e^{\psi_1(t,u)} + \frac{\lambda_2 \exp \xi_t(\phi_2, \psi_2)}{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \exp \xi_t(\phi_i, \psi_i)} e^{\psi_2(t,u)},$$

$e^{\psi(t,u)}$ étant une combinaison linéaire convexe de $e^{\psi_1(t,u)}$ et $e^{\psi_2(t,u)}$, on a encore bien ψ appartenant à Ψ.

Il suffit de réutiliser la formule d'Ito avec $f(x) = \text{Log}\, x$ pour obtenir :

$$\text{Log}\, \rho(t) = \xi_t(\phi, \psi), \quad \text{soit} \quad \rho(t) = \exp \xi_t(\phi, \psi),$$

d'où le résultat pour $t = T$. ■

LEMME I.2.3. — $\mathscr{D}(\Phi_K, \Psi)$ est fermé dans L^2.

Preuve. — Soient ϕ_n une suite d'éléments de Φ_K, ψ_n de Ψ, et ρ appartenant à L^2 telle que la suite :

$$E[\exp \xi_T(\phi_n, \psi_n) - \rho]^2$$

converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Alors quitte à extraire une sous-suite ρ est la limite P-presque sûre de $\exp \xi_T(\phi_n, \psi_n)$.

Montrons tout d'abord un résultat intermédiaire, à savoir que ρ est strictement positive P-presque sûrement.

Soit A l'ensemble $\{ \omega \mid \rho(\omega) = 0 \}$ et supposons P(A) non nulle, alors la limite de $\xi_T(\phi_n, \psi_n)(\omega)$ est $-\infty$ sur A où

$$\begin{aligned}\xi_T(\phi_n, \psi_n) = & \int_0^T \langle \phi_n(t) \mid a^{-1}(t, X_t) \mid d\bar{M}_t \rangle \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \langle \phi_n(t) \mid a^{-1}(t, X_t) \mid \phi_n(t) \rangle \, dt + \int_0^T \int_U \psi(t, u) q(dt, du) \\ & - \int_0^T dt \int_U (e^{\psi(t,u)} - 1 - \psi(t, u)) S(t, X_{t^-}, du) .\end{aligned}$$

D'après les hypothèses faites sur a, ϕ_n, ψ_n, S

$$\frac{1}{2} \int_0^T \langle \phi_n(t) \mid a^{-1}(t, X_t) \mid \phi_n(t) \rangle \, dt + \int_0^T dt \int_U [e^{\psi_n(t,u)} - 1 - \psi_n(t, u)] S(t, X_{t^-}, du)$$

est borné uniformément en n. Par conséquent sur A

$$\int_0^T \langle \phi_n(t) \mid a^{-1}(t, X_t) \mid d\bar{M}_t \rangle + \int_0^T \int_U \psi_n(t, u) q(dt, du)$$

converge vers $-\infty$; Mais d'autre part,

$$\begin{aligned} & E\left[\left(\int_0^T \langle \phi_n(t) \mid a^{-1}(t, X_t) \mid d\bar{M}_t \rangle + \int_0^T \int_U \psi_n(t, u) q(dt, du) \right)^2\right] \\ & \quad = E\left[\int_0^T \langle \phi_n(t) \mid a^{-1}(t, X_t) \mid \phi_n(t) \rangle \, dt + \int_0 dt \int_U^T \psi^2(t, u) S(t, X_{t^-}, du) \right]\end{aligned}$$

qui toujours d'après les hypothèses faites sur a, ϕ_n, ψ_n, S est borné uniformément en n. On a bien la contradiction avec P(A) non nulle.

Reprenons désormais la démonstration du lemme proprement dite, et soit $\rho(t)$ une version de l'espérance conditionnelle $E[\rho/F_t^0]$, alors le reste de la démonstration va reposer essentiellement sur le théorème de représentation des martingales de Jacod ([*12*]). En effet, ayant l'existence et l'unicité de la probabilité P de référence (hypothèse H_1), on peut représenter la martingale $\rho(t)$ sous la forme :

$$\rho(t) = 1 + \int_0^t \langle \beta_1(s), d\bar{M}_s \rangle + \int_0^t \int_U \beta_2(s, u) q(ds, du) . \tag{5}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Jensen [*19*] la suite

$$\int_0^T dt [E(\rho(t) - \exp \xi_t(\phi_n, \psi_n))]^2$$

majorée par la suite

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt \mathrm{E}(\rho - \exp \xi_{\mathrm{T}}(\phi_n, \psi_n))^2$$

converge vers 0, de sorte qu'en prenant des sous-suites on peut assurer que la limite de $\exp \xi_t(\phi_n, \psi_n)$ est $\rho(t)$ $\mathrm{P}_{\text{p.s.}}$ pour tout $t \leqslant \mathrm{T}$.

Appliquons alors la formule d'Ito à la semi-martingale $\xi_t(\phi_n, \psi_n)$, il vient que :

$$(6) \quad \exp \xi_t(\phi_n, \psi_n) = 1 + \int_0^t \exp (\xi_s(\phi_n, \psi_n)) \langle \phi_n(s) \mid a^{-1}(s, \mathrm{X}_s) \mid d\bar{\mathrm{M}}_s \rangle + \int_0^t \int_{\mathrm{U}} \exp (\xi_{s^-}(\phi_n, \psi_n))(e^{\psi_n(s,u)} - 1) q(ds, du)$$

et en comparant (5) et (6)

$$\exp \xi_t(\phi_n, \psi_n) - \rho(t) = \int_0^t \langle \exp (\xi_s(\phi_n, \psi_n)) a^{-1}(s, \mathrm{X}_s) \phi_n(s) - \beta_1(s), d\bar{\mathrm{M}}_s \rangle + \int_0^t \int_{\mathrm{U}} [\exp (\xi_{s^-}(\phi_n, \psi_n))(e^{\psi_n(s,u)} - 1) - \beta_2(s, u)] q(ds, du)$$

La martingale $\exp \xi_t(\phi_n, \psi_n) - \rho(t)$ admet donc pour processus croissant :

$$\mathrm{A}_t^n = \int_0^t | \exp (\xi_s(\phi_n, \psi_n)) \phi_n(s) - a(s, \mathrm{X}_s) \beta_1(s) |^2 \, ds + \int_0^t \int_{\mathrm{U}} | \exp (\xi_{s^-}(\phi_n, \psi_n))(e^{\psi_n(s,u)} - 1) - \beta_2(s, u) |^2 \mathrm{S}(s, \mathrm{X}_{s^-}, du),$$

par conséquent $\mathrm{E}[\mathrm{A}_{\mathrm{T}}^n] = \mathrm{E}[\exp \xi_{\mathrm{T}}(\phi_n, \psi_n) - \rho]^2$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. D'où $\mathrm{P}_{\text{p.s.}}$ lorsque n tend vers l'infini $\exp (\xi_t(\phi_n, \psi_n)) \phi_n(t)$ converge vers $a(t, \mathrm{X}_t) \beta_1(t)$, puis $\phi_n(t)$ vers $\dfrac{a(t, \mathrm{X}_t) \beta_1(t)}{\rho(t)}$ puisque $\rho(t)$ est non nulle $\mathrm{P}_{\text{p.s.}}$, de même $\exp (\xi_{t^-}(\phi_n, \psi_n))(e^{\psi_n(t,u)} - 1)$ converge vers $\beta_2(t, u)$, puis $e^{\psi_n(t,u)} - 1$ vers $\dfrac{\beta_2(t, u)}{\rho(t^-)}$.

Si l'on pose $\phi(t) = \dfrac{a(t, \mathrm{X}_t) \beta_1(t)}{\rho(t)}$, $e^{\psi(t,u)} = 1 + \dfrac{\beta_2(t, u)}{\rho(t^-)}$, en reportant dans (5) on obtient :

$$\rho(t) = 1 + \int_0^t \rho(s) \langle \phi(s) \mid a^{-1}(s, \mathrm{X}_s) \mid d\bar{\mathrm{M}}_s \rangle + \int_0^t \int_{\mathrm{U}} \rho(s^-)(e^{\psi(s,u)} - 1) q(ds, du)$$

et en utilisant la formule d'Ito $\operatorname{Log} \rho(t) = \xi_t(\phi, \psi)$, soit $\rho(t) = \exp \xi_t(\phi, \psi)$.

Par conséquent, puisque ϕ et ψ sont des limites presque sûres d'éléments respectivement de Φ_K et Ψ, ils appartiennent bien respectivement à Φ_K et Ψ, d'où le résultat. ■

En utilisant alors un résultat de Dunford-Schwartz [*10*], à savoir que dans tout espace réflexif la boule unitaire est faiblement compacte, on obtient le résultat final.

THÉORÈME I.2.4. — $\mathscr{D}(\Phi_K, \Psi)$ est un sous-espace de L^2 faiblement compact.

B. CAS LOCALEMENT BORNÉ

Nous désignerons par Φ l'ensemble des fonctions ϕ vérifiant l'hypothèse du premier paragraphe et de plus telles que, K étant fixé :

$$(7) \qquad |\phi_t| \leqslant K\left[1 + \sup_{s \leqslant t} \min\left(|X_s^1|, \sqrt{|X_s^1|}\right)\right] \quad P_{\text{p.s.}},$$

pour tout t, et par Ψ le même espace que dans la partie A du paragraphe. De la même manière on désigne par $\mathscr{D}(\Phi, \Psi)$ l'ensemble des $\exp \xi_T(\phi, \psi)$ où (ϕ, ψ) est un élément de $\Phi \times \Psi$.

D'après la remarque I.1.13, le processus $\exp \xi_t(\phi, \psi)$ est une P-martingale pour tout couple (ϕ, ψ) appartenant à $\Phi \times \Psi$. Par conséquent $\mathscr{D}(\Phi, \Psi)$ est un sous-ensemble de $L^1(\Omega^0, F_T^0, P)$.

On montrera successivement que $\mathscr{D}(\Phi, \Psi)$ est équintégrable et par conséquent $\sigma(L^1, L^\infty)$ relativement compact ([*19*]), puis que ce même espace est convexe et fermé dans L^1, donc faiblement fermé, d'où le :

THÉORÈME I.2.5. — $\mathscr{D}(\Phi, \Psi)$ est un sous-espace de L^1 faiblement compact.

Ce résultat se déduit donc des trois propositions suivantes :

PROPOSITION I.2.6. — $\mathscr{D}(\Phi, \Psi)$ est uniformément intégrable.

Preuve. — Il suffit de montrer qu'il existe un $\alpha > 1$ tel que $\sup\limits_{\mathscr{D}(\phi,\psi)} E[e^{\alpha\xi_T(\phi,\psi)}]$ soit fini.

$$E[e^{\alpha\xi_T(\phi,\psi)}] = E\left[e^{\xi_T(\alpha\phi,\alpha\psi)} \times e^{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\int_0^T \langle \phi(t) | a^{-1}(t, X_t) | \phi(t) \rangle dt} \times e^{-\int_0^T dt \int_U (\alpha e^{\psi(t,u)} - e^{\alpha\psi(t,u)} + 1 - \alpha) S(t, X_t -, du)}\right]$$

$$= E_{P_{(\alpha\phi,\alpha\psi)}}\left[e^{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\int_0^T \langle \phi(t) | a^{-1}(t, X_t) | \phi(t) \rangle dt} \times e^{-\int_0^T dt \int_U (\alpha e^{\psi(t,u)} - e^{\alpha\psi(t,u)} + 1 - \alpha) S(t, X_t -, du)}\right]$$

D'après les hypothèses faites sur ψ et S, il est clair que

$$\int_0^T dt \int_U (\alpha e^{\psi(t,u)} - e^{\alpha\psi(t,u)} + 1 - \alpha) S(t, X_{t^-}, du)$$

est borné. Par conséquent pour montrer que $\sup_{\phi,\psi} E[e^{\alpha\xi_T(\phi,\psi)}]$ est fini, il suffit d'obtenir que : $\sup_{\phi,\psi} E_{P_{\alpha\phi,\alpha\psi}}\left[e^{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\int_0^T \langle \phi(t) | a^{-1}(t, X_t) | \phi(t) \rangle dt}\right]$ soit fini.

Or

$$\int_0^T | \langle \phi(t) | a^{-1}(t, X_t) | \phi(t) \rangle | dt \leqslant K^2 MT(1 + \sup_{s \leqslant T} \sqrt{| X_s^1 |})^2$$
$$\leqslant 2K^2 MT(1 + \sup_{s \leqslant T} | X_s^1 |)$$

Soit $M_t = X_t^1 - \alpha \int_0^t \tilde{\phi}(s) ds$. C'est une $P_{(\alpha\phi,\alpha\psi)}$-martingale de processus croissant associé à $\langle \theta, M_t \rangle$

$$\int_0^t \langle \theta | a(s, X_s) | \theta \rangle ds + \int_0^t ds \int_{|u| \leqslant 1} | u |^2 e^{\alpha\psi(s,u)} S(s, X_{s^-} du)$$

qui d'après les hypothèses faites sur a, ψ et S peut être majoré par un certain multiple de t, soit $K_1 t$ où K_1 ne dépend ni de ϕ, ni de ψ. On sait alors (proposition I.1.10) que :

$$\sup_{\phi,\psi} E_{P_{\phi,\psi}}[e^{\sup_{t \leqslant T} | M_t |}] < \infty . \tag{8}$$

Reprenons l'expression de M_t, on peut écrire :

$$| X_t^1 | \leqslant | M_t | + \alpha \int_0^t | \tilde{\phi}(s) | ds$$
$$\leqslant | M_t | + \alpha K_2 t + \alpha K \int_0^t | X_s^1 | ds$$

d'après les hypothèses sur ϕ, ψ, S, et donc :

$$\sup_{t \leqslant T} | X_t^1 | \leqslant \sup_{t \leqslant T} | M_t | + K_2 T + \alpha K \int_0^T \sup_{s \leqslant t} | X_s^1 | dt,$$

et en utilisant l'inégalité de Bellman-Gronwall

$$\sup_{t \leqslant T} | X_t^1 | \leqslant (\sup_{t \leqslant T} | M_t | + K_2 T) e^{\alpha K} .$$

Par conséquent :

$$\int_0^T | \langle \phi(t) | a^{-1}(t, X_t) | \phi(t) \rangle | dt \leqslant 2K^2 MT(1 + \sup_{t \leqslant T} | M_t | + K_2 T) e^{\alpha K})$$

et

$$E_{P_{(\alpha\phi,\alpha\psi)}}\left[e^{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\int_0^T \langle \phi(t)|a^{-1}(t, X_t)|\phi(t)\rangle dt}\right] \leqslant E_{P_{(\alpha\phi,\alpha\psi)}}\left[e^{\frac{\alpha^2-\alpha}{2} e^{\alpha K} \sup_{t\leqslant T}|M_t|}\right] \times h(\alpha).$$

Soit $\alpha > 1$ tel que $\dfrac{\alpha^2 - \alpha}{2} e^{\alpha K} < 1$; en utilisant (8) on obtient le résultat annoncé, condition suffisante d'équi-intégrabilité ([*19*]). ■

PROPOSITION I.2.7. — $\mathscr{D}(\Phi, \Psi)$ est convexe.

La démonstration est en tous points identique à celle effectuée dans le cas borné.

PROPOSITION I.2.8. — $\mathscr{D}(\Phi, \Psi)$ est fermé dans L^1.

Preuve. — Considérons une suite $(\exp \xi_T(\phi_n, \psi_n))_{n\in N}$ qui tend $P_{p.s.}$ et dans L^1 vers une variable ρ. Il suffit alors de montrer que ρ est de la forme $\exp \xi_T(\phi, \psi)$ où le couple (ϕ, ψ) appartient à $\Phi \times \Psi$.

Pour tout n entier positif posons :

$$\phi_n^N(t) = \phi_n(t)\mathbb{1}_{(\sup_{s\leqslant t}|X_s^1|\leqslant N)}.$$

Alors pour tout n, ϕ_n^N appartient à $\Phi_{K(1+\sqrt{N})}$; par conséquent, $\exp \xi_T(\phi_n^N, \psi_n)$ appartient à $\mathscr{D}(\Phi_{K(1+\sqrt{N})}, \Psi)$ et en utilisant le fait établi en A que $\mathscr{D}(\Phi_{K(1+\sqrt{N})}, \Psi)$ est $\sigma(L^2, L^2)$ compact, on obtient que la suite $\exp \xi_T(\phi_k^N, \psi_k)_{k\in K_N}$ converge vers $\exp \xi_T(\phi^N, \psi^N)$ dans L^2, où K_N est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. En effectuant ceci pour $N = 1, 2, \ldots$ et en choisissant les suites K_N emboîtées, nous établissons pour tout N que :

$$\phi^N = \phi^{N+1} \quad \text{sur} \quad [0, T] \times \{ \sup_{s\in T} |X_s^1| \leqslant N \} = [0, T] \times C_N^T$$

$$\psi^N = \psi^{N+1} \quad \text{sur} \quad [0, T] \times C_N^T \times U.$$

En effet, en conditionnant par F_t^0, il est immédiat que $(\exp \xi_t(\phi_k^N, \psi_k))_{k\in K_n}$ converge dans L^2 vers $\exp \xi_t(\phi^N, \psi^N)$.

D'autre part par définition :

$$\phi_k^N(\tau, \omega) = \phi_k^{N+1}(\tau, \omega)$$

pour tout $\tau \leqslant t$ et ω de C_N^T, et de même pour ψ_k^N, de sorte que :

$$\exp \xi_t(\phi^{N+1}, \psi^{N+1}) = \exp \xi_t(\phi^N, \psi^N)$$

sur C_N^t pour tout $t \leqslant T$. En remarquant que :

$$\int_{C_N^T} |\exp \xi_T(\phi^{N+1}, \psi^{N+1}) - \exp \xi_T(\phi^N, \psi^N)|^2 dP$$

est d'une part nulle et d'autre part égale à :

$$\int_{C_N^T}\Bigg[\int_0^T \exp(\xi_t(\phi^N,\psi^N))\langle \phi^N(t)-\phi^{N+1}(t)\,|\,a^{-1}(t,X_t)\,|\,d\bar{M}_t\rangle + \int_0^T\int_U \exp(\xi_{t-}(\phi^N,\psi^N))[e^{\psi^{N}(t,u)}-e^{\psi^{N+1}(t,u)}]q(dt,du)\Bigg]^2 dP$$

$$= \int_{C_N^T}\Bigg[\int_0^T \exp(2\xi_t(\phi^N,\psi^N))\langle \phi^N(t) - \phi^{N+1}(t)\,|\,a^{-1}(t,X_t)\,|\,\phi^N(t)-\phi^{N+1}(t)\rangle\,dt + \int_0^T \exp(2\xi_{t-}(\phi^N,\psi^N)\int_U[e^{\psi^{N}(t,u)}-e^{\psi^{N+1}(t,u)}]S(t,X_{t-},du)\Bigg]dP$$

il vient que :

$$\phi^N = \phi^{N+1} \quad \text{sur} \quad [0,T]\times C_N^T,$$

et

$$\psi^N = \psi^{N+1} \quad \text{sur} \quad [0,T]\times C_N^T\times U$$

Nous pouvons donc poser :

$$\phi = \phi^N \quad \text{sur} \quad [0,T]\times C_N^T$$

$$\psi = \psi^N \quad \text{sur} \quad [0,T]\times C_N^T\times U$$

et on obtient de façon immédiate :

$$\phi\in\Phi \text{ et } \psi\in\Psi, \qquad \rho = \exp\xi_T(\phi^N,\psi^N) = \exp\xi_T(\phi,\psi)$$

sur C_N^T et comme C_N^T tend en croissant vers Ω^0, le résultat suit $P_{\text{p.s.}}$ sur Ω^0. ■

II. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE

§ 1. Une condition nécessaire et suffisante d'optimalité : horizon fini

A. Définition du problème de contrôle

Nous désignerons toujours par P la probabilité de référence unique solution au problème des martingales relatif aux coefficients a et S, partant de x fixé à l'instant initial $t = 0$.

Nous noterons par D l'espace des contrôles, espace de la forme $D_1 \times D_2$ où D_1 et D_2 sont deux espaces métriques séparables, et $\mathscr{B}(D)$ la tribu borélienne associée.

Soient également :

— ϕ une fonction de $[0, T] \times \Omega^0 \times D_1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, mesurable, F_t^0 adaptée pour tout d_1 élément de D_1 et telle qu'il existe K pour laquelle :

$$(9) \qquad |\phi(t, d_1)| \leqslant K(1 + \sup_{s \leqslant t} \min(|X_s^1|, \sqrt{|X_s^1|})) \ P_{\text{p.s.}}$$

pour tout t et d_1.

— ψ une application de $[0, T] \times \Omega^0 \times D_2 \times U$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(D_2) \otimes \mathscr{B}(U)$ mesurable et telle qu'il existe des constantes C_1 et C_2 pour lesquelles :

$$(10) \quad \begin{cases} |\psi(t, d_2, u)| \leqslant C_1 |u| & \text{si} \quad |u| \leqslant 1 \ P_{\text{p.s.}} \quad \text{pour tout } (t, d_2) \\ |\psi(t, d_2, u)| \leqslant C_2 & \text{si} \quad |u| > 1 \ P_{\text{p.s.}} \quad \text{pour tout } (t, d_2) \end{cases}$$

Nous noterons enfin par :

— $\mathscr{D}_1$ l'ensemble des applications $\delta_t^1(\omega)$ de $[0, T] \times \Omega^0$ dans D_1, optionnelles ;

— $\mathscr{D}_2$ l'ensemble des applications $\delta_t^2(\omega)$ de $[0, T] \times \Omega^0$ dans D_2, prévisibles ;

— $\mathscr{D}$ l'ensemble des couples $\delta_t = (\delta_t^1, \delta_t^2)$ appartenant à $\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$, cet ensemble sera appelé ensemble des contrôles admissibles ;

— $\mathscr{D}_t^s (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$ l'ensemble des fonctions définies sur $[s, t] \times \Omega^0$ de la même manière que l'est $\mathscr{D}$ sur $[0, T] \times \Omega^0$; $\mathscr{D}_s = \mathscr{D}_s^0$ et un élément de $\mathscr{D}_s$ sera noté $\delta^s = (\delta^{s,1}, \delta^{s,2})$;

— $\Pi_{t,s}$ les applications restrictions de $\mathscr{D}_t$ dans $\mathscr{D}_s$ $(s \leqslant t)$. On notera enfin $\Pi_{t,t}$ par Π_t pour tout $0 \leqslant t \leqslant T$.

REMARQUE II.1.1. — Il est bien précisé que toutes les notions de prévisible, optionnel sont entendues sous les sous-espaces considérés (par exemple pour $\mathscr{D}_1$ sur $[0, T] \times \Omega^0$). La même chose sera sous-entendue implicitement dans toute la suite. ■

Le lemme suivant nous fournit un résultat de recollement important pour la suite de l'exposé.

LEMME II.1.2. — Soient $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant T$ et $\delta(t, \omega)$ appartenant à $\mathscr{D}_{t_2}^{t_1}$, $\bar{\delta}(t, \omega)$ à $\mathscr{D}_{t_3}^{t_2}$, alors la fonction $\bar{\bar{\delta}}(t, \omega)$ définie sur $[t_1, t_3] \times \Omega^0$ par δ_t sur $[t_1, t_2]$ et $\bar{\delta}_t$ sur $]t_2, t_3]$ appartient à $\mathscr{D}_{t_3}^{t_1}$.

Preuve. — En fait il suffit de remarquer que si $f_1(t, \omega)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ est prévisible (resp. optionnelle) et $f_2(t, \omega)$, $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$ prévisible (resp. optionnelle), alors :

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ f_2(t) t_2 < t \leqslant t_3 \end{cases}$$

est prévisible (resp. optionnelle) ce qui est immédiat car :

$$\{ (t, \omega) \mid f(t, \omega) \in \Gamma \} = ([\![t_1, t_2]\!] \cap \{ (t, \omega) \mid f_1(t, \omega) \in \Gamma \}) \cup (]\!] t_2, t_3]\!] \cap \{ (t, \omega) \mid f_2(t, \omega) \in \Gamma \})$$

réunion de deux ensembles prévisibles (resp. optionnels) est prévisible (resp. optionnel). ■

Donnons-nous enfin deux applications réelles positives :

(11)
- — c définie sur $[0, T] \times \Omega^0 \times D_1$ bornée, mesurable, F_t^0 adaptée
- — h définie sur $[0, T] \times \Omega^0 \times D_2 \times U$ mesurable, F_t^0 adaptée, prévisible pour tout (u, d_2) vérifiant :

$$\exists\, p > 0 \quad \text{tel que} \quad h(t, \omega, d_2, u) \leqslant p(|u|^2 \wedge 1)$$

pour tout (t, ω, d_2).

Alors d'après les hypothèses faites sur ϕ et ψ et si l'on note pour tout $\delta = (\delta^1, \delta^2)$ de $\mathscr{D}$

$$(12) \qquad \begin{cases} \phi^\delta(t, \omega) = \phi(t, \omega, \delta^1(t, \omega)) \\ \psi^\delta(t, \omega, u) = \psi(t, \omega, \delta^2(t, \omega), u) \end{cases}$$

les fonctions ϕ^δ et ψ^δ vérifient les hypothèses de la remarque I.1.13. Nous noterons alors P_δ l'unique solution au problème des martingales $M(a, \phi^\delta, S, \psi^\delta)$ partant de x à l'instant initial $t = 0$.

La fonction de perte sera $L^\delta = L_T^\delta$ où

$$(13) \qquad L_t^\delta = \int_0^t c(s, \delta^1(s))ds + \sum_{s \leqslant t} h(s, \delta^2(s), Y_s)$$

pour tout t de $[0, T]$, Y_t étant le processus ponctuel

$$Y_t = \begin{cases} \Delta X_t \text{ si } \Delta X_t \text{ est non nul} \\ \text{le point à l'infini } \mu \text{ sinon,} \end{cases}$$

et la fonction h étant prolongée à $\hat{U} = U \cup \{ \mu \}$ par $h(t, \omega, d_1, \mu) = 0$ pour tout (t, ω, d_1).

Le coût total associé à un contrôle δ sera alors :

$$(14) \quad J^\delta = E_\delta(L^\delta) = E_\delta\left[\int_0^T ds\left[c(s, \delta^1(s)) + \int_U h(s, \delta^2(s), u)e^{\psi^\delta(s,u)}S(s, X_{s^-}, du)\right]\right]$$
$$= E_\delta\left[\int_0^T ds\, \mathscr{C}_s^\delta\right]$$

Le coût total sachant F_t^0 sera :

(15) $$J_t^\delta = E_\delta[L^\delta/F_t^0]$$

Le coût conditionnel après t :

(16) $$K_t^\delta = E_\delta[L^\delta - L_t^\delta/F_t^0]$$

Enfin pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ on posera :

$$\rho_t^s(\delta) = \exp\{\xi_t(\phi^\delta, \psi^\delta) - \xi_s(\phi^\delta, \psi^\delta)\}.$$

DÉFINITION II.1.3. — Le système admissible de contrôle consiste en la donnée de :

$$(\Omega^0, F_t^0, \mathscr{D}_t^s, \Pi_{t,s}, P_\delta, L_t^\delta)$$

REMARQUES II.1.4. — La probabilité P_δ est liée à P par la relation :

$$\left.\frac{dP_\delta}{dP}\right|_{F_t^0} = \rho_t^0(\delta),$$

d'après (2).

Si pour tout $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $\delta^{s,t}$ appartenant à $\mathscr{D}_t^s$ on définit une probabilité $P_{\delta^{s,t}}$ sur (Ω^0, F_t^0) par :

$$\left.\frac{dP_{\delta^{s,t}}}{dP}\right|_{F_u^0} = \rho_u^s(\delta^{s,t})$$

pour tout $0 \leqslant s < u \leqslant t \leqslant T$, on remarque aisément que pour tout contrôle admissible δ, la probabilité $P_{\Pi_t\delta}$ est la restriction de P_δ à F_t^0.

— Le coût conditionnel après t ne dépend pas des valeurs du contrôle jusqu'à t; en effet :

$$E_\delta[L^\delta - L_t^\delta \mid F_t^0] = E[\rho_T^t(\delta)(L^\delta - L_t^\delta) \mid F_t^0]$$

qui ne dépend des valeurs de δ que pour tout $t < s \leqslant T$. ■

L'objet du contrôle optimal consiste alors à trouver un contrôle admissible $\hat{\delta}$ vérifiant $J^{\hat{\delta}} \leqslant J^\delta$ pour tout δ de $\mathscr{D}$.

Nous pouvons également considérer le problème d'optimalité conditionnelle suivant :
t étant fixé dans $[0, T]$, δ^t étant fixé dans $\mathscr{D}_t$ trouver $\hat{\delta}$ appartenant à $\mathscr{D}$ vérifiant $\pi_t\hat{\delta} = \delta^t$ et tel que :

$$J_t^{\hat{\delta}} \leqslant J_t^\delta P_{\delta^t} \text{ p. s.}$$

pour tout δ vérifiant $\pi_t\delta = \delta^t$.

B. PERTE CONDITIONNELLE. CRITÈRE MARTINGALE

Les notations suivantes sont empruntées à Striebel [*20*].

DÉFINITION II.1.5. — Une famille f_{δ^t}, $\delta^t \in \mathscr{D}_t$, de fonctions définies sur Ω^0 sera dite t-compatible si, pour tout δ^t de $\mathscr{D}_t$, f_{δ^t} est F_t^0-mesurable ; positive si $f_{\delta^t} \geqslant 0$ P_{δ^t}. p. s. pour tout δ^t de $\mathscr{D}_t$; intégrable si f_{δ^t} est P_{δ^t}-intégrable pour tout δ^t de $\mathscr{D}_t$.

Une famille $(f_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ de fonctions t-compatibles sera dite compatible, de plus elle sera dite positive (intégrable) si chaque f_t est positive (intégrable).

Une fonction compatible positive intégrable $F(t, \delta^t)$ sera une $F_t^0\delta$-(sous)-martingale si et seulement si le processus $F(t, \pi_t\delta)$ est une P_δ-(sous)-martingale.

DÉFINITION II.1.6. — Nous appellerons perte conditionnelle la fonction compatible F_t^* définie pour tout t de $[0, T]$ et δ^t de $\mathscr{D}_t$ par :

$$F_t^*(\delta^t) = P_{\delta^t} - \underset{\substack{\delta \in \mathscr{D} \\ \pi_t\delta = \delta^t}}{\text{ess inf}}\, J_t^\delta$$

Nous remarquons immédiatement que F_t^* est positive intégrable. Nous cherchons alors à obtenir un critère d'optimalité, relatif à $F_t^*(\delta^t)$. Pour établir ce résultat nous aurons besoin en fait d'une propriété supplémentaire d'ε-treillis sur le système de contrôle permettant d'inverser ess-inf et espérance conditionnelle ([*20*]), dont le besoin se fera sentir au cours du théorème II.1.10.

En fait ce n'est pas cette propriété que nous prouverons pour notre système de contrôle, mais une propriété plus forte de relative complétion. Cette implication se vérifie de façon élémentaire et est un résultat général d'ε-treillis.

DÉFINITION II.1.7. — Nous dirons qu'un système de contrôle a la propriété d'ε-treillis dès que pour tout t, δ^t de $\mathscr{D}_t$, $\delta^{(1)}$ et $\delta^{(2)}$ de $\mathscr{D}$ vérifiant $\pi_t\delta^{(1)} = \pi_t\delta^{(2)} = \delta^t$. il existe un contrôle $\delta^{(0)}$ vérifiant $\pi_t\delta^{(0)} = \delta^t$, pour lequel :

$$J_t^{\delta(0)} \leqslant J_t^{\delta(i)} + \varepsilon \qquad P_{\delta^t}\text{.p. s.}, \qquad i = 1, 2 .$$

DÉFINITION II.1.8. — Nous dirons qu'un système de contrôle est relativement complet si pour tout t, δ^t de $\mathscr{D}_t$, tout $\varepsilon > 0$, il existe δ de $\mathscr{D}$ vérifiant $\pi_t\delta = \delta^t$ tel que :

$$J_t^\delta < F_t^*(\delta^t) + \varepsilon \quad P_{\delta^t}\text{.p. s.}$$

PROPOSITION II.1.9. — Le système de contrôle admissible décrit en A est relativement complet.

Preuve. — Soient ε, t, δ^t de $\mathcal{D}_t$ fixés et posons pour tout δ de $\mathcal{D}$ vérifiant $\pi_t\delta = \delta^t$: $M_\delta = \{ \omega : J^t_\delta < F^*_t(\delta^t) + \varepsilon \}$. Il est clair que, pour tout δ, M_δ est F^0_t mesurable (J^t_δ et $F^*_t(\delta^t)$ l'étant).

Sur l'ensemble $\mathcal{D}$, définissons la relation d'ordre partiel : $\delta > \bar{\delta}$ dès que :

— M_δ contient $M_{\bar{\delta}}$

— $P_{\delta^t}(M_\delta) > P_{\delta^t}(M_{\bar{\delta}})$

— δ et $\bar{\delta}$ sont égaux sur $[0, T] \times M_{\bar{\delta}}$

Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{D}$ totalement ordonné et posons $m = \sup\limits_{A} P_{\delta^t}(M_\delta)$. On sait construire une suite croissante (δ_n) d'éléments de A telle que pour tout n $P_{\delta^t}(M_{\delta_n}) > m - \dfrac{1}{n}$. Par conséquent

$$M = \bigcup_{A} M_\delta = \bigcup_{n} M_{\delta_n}$$

est F^0_t-mesurable.

Soit alors la fonction δ de $]t, T] \times \Omega^0$ dans D définie par $\delta(u, \omega) = \delta_1(u, \omega)$ sur $M_{\delta_1} \cup M^c$; $\delta_2(u, \omega)$ sur $M_{\delta_2}, \ldots, \delta_n(u, \omega)$ sur $M_{\delta_n}, \ldots$, et $\tilde{\delta}(t, \omega)$ la fonction de $[0, T] \times \Omega^0$ dans D définie par δ^t sur $[0, t]$ et δ sur $]t, T]$. Il est alors facile de voir que :

— $\pi_t\tilde{\delta} = \delta^t$ (évident)

— $\tilde{\delta} \in \mathcal{D}$; en effet :

$$\begin{aligned} \{ (\omega, u) \mid \tilde{\delta}^i(u, \omega) \in \Gamma \} = {} & ([\![0, t]\!] \cap \{ (\omega, u) \mid \delta^{t,i}(u, \omega) \in \Gamma) \\ & \cup (( ]\!]t, T]\!] \times (M_{\delta_1} \cup M^c)) \cap \{ (\omega, u) \mid \delta^i_1(u, \omega) \in \Gamma \}) \\ & \bigcup_{n \geqslant 2} ( ]\!]t, T]\!] \times M_{\delta_n}) \cap \{ (\omega, u) \mid \delta^i_n(u, \omega) \in \Gamma \}) \end{aligned}$$

qui pour $i = 1$ (resp. $i = 2$) est une réunion d'ensembles optionnels (resp. prévisibles) donc optionnel (resp. prévisible).

— $M = M_\delta$; en effet par construction sur M $J^\delta_t < F^*_t(\delta^t) + \varepsilon$ et sur M^c $J^\delta_t \geqslant F^*_t(\delta^t) + \varepsilon$ car alors $\delta = \delta_1$ et $M \supset M_{\delta_1}$. On en déduit alors de façon immédiate que δ est la limite supérieure de A, et en appliquant le théorème de Zorn qu'un élément maximal dans $\mathcal{D}$, soit δ^*, existe.

Supposons alors que $P_{\delta^t}(M_\delta^*) < 1$, il existe alors δ' admissible pour lequel $J^{\delta'}_t < F^*_t(\delta^t) + \varepsilon$ sur un sous-ensemble de $(M_{\delta^*})^c$ non négligeable. Par suite nous pouvons construire comme précédemment un contrôle $\tilde{\delta}$ (égal à δ^* sur M^*, δ' sur $(M^*)^c$) tel que $\tilde{\delta}$ soit supérieur à δ^* ce qui contredit le fait que δ^* est maximal. Par conséquent $P_{\delta^t}(M_{\delta^*}) = 1$ ce qui prouve le théorème. ■

Le théorème suivant est dû à Striebel [20] ; nous en redonnons les grandes lignes. C'est le premier critère d'optimalité.

THÉORÈME II.1.10 (critère martingale). — $\hat{\delta}$ élément de $\mathscr{D}$ est optimal si et seulement s'il existe une fonction compatible positive $\tilde{F}_t(\delta^t)$ telle que :

— $\tilde{F}_T(\delta) = J_T^\delta$ P_δ.p. s. pour tout δ de $\mathscr{D}$

— $\tilde{F}_t(\pi_t\delta)$ est une $F_t^0\delta$-sous-martingale pour tout δ appartenant à $\mathscr{D}$, et $\tilde{F}_t(\pi_t\hat{\delta})$ est une F_t^0 $\hat{\delta}$-martingale.

Le coût minimum est donné par $J^{\hat{\delta}} = \tilde{F}_0 P_{\text{p.s.}}$.

Preuve. — Si $\hat{\delta}$ est optimal, soit $\tilde{F}_t = F_t^*$. On a alors bien :

— $\tilde{F}_T(\delta) = J^\delta$ immédiat d'après la définition même de F_t^*

— $F_t^*(\pi_t\delta)$ est une δ-sous-martingale pour tout δ, ceci s'établit en inversant ess-inf et espérance conditionnelle dans $F_s^*(\pi_s\delta)$

— $F_t^*(\pi_t\hat{\delta})$ est une martingale ; ceci provient du fait que $J_t^{\hat{\delta}} = F_t^*(\pi_t\hat{\delta})$, et il est aisé d'obtenir la propriété de martingale sur $J_t^{\hat{\delta}}$.

Réciproquement il suffit de remarquer que toute fonction $\tilde{F}_t$ vérifiant les hypothèses du théorème est égale p. s. à F_t^* pour avoir le résultat.

L'expression du coût minimum s'obtient en faisant $t = 0$ et en remarquant que $\mathscr{D}_0$ est réduit à un seul élément δ^0. ■

C. PERTE CONDITIONNELLE APRÈS t. DEUXIÈME CRITÈRE D'OPTIMALITÉ

DÉFINITION II.1.11. — Nous appellerons perte conditionnelle après t la fonction

$$W_t(\delta^t) = \underset{\substack{\delta\in\mathscr{D} \\ \pi_t\delta=\delta^t}}{\text{ess-inf}}\, K_t^\delta \quad P_{\delta^t}.\text{p. s.},$$

où nous rappelons que K_t^δ est le coût conditionnel après t (16).

LEMME II.1.12. — La fonction $W_t(\delta^t)$ ne dépend pas en fait de δ^t et sera notée W_t.

Preuve. — Le résultat est immédiat à partir de la remarque II.1.4. : K_t^δ ne dépend pas des valeurs de δ avant t. ■

Nous allons déduire à partir du théorème II.1.10. un principe d'optimalité portant sur W_t.

THÉORÈME II.1.13. (principe d'optimalité). — Pour tout t, W_t satisfait au principe d'optimalité suivant :

$$W_t \leqslant E_\delta\left[\int_t^{t+h}\left[c(s, \delta^1(s)) + \int_U h(s, \delta^2(s), u)e^{\psi(s,u)}S(s, X_{s^-}, du)\right]ds \mid F_t^0\right] + E_\delta[W_{t+h} \mid F_t^0]$$

P. p. s., pour tout h positif tel que $t + h$ soit inférieur ou égal à T, pour tout δ de $\mathcal{D}$.

De plus δ est optimal si et seulement si l'égalité a lieu P. p. s. pour δ, pour tout h positif tel que $t + h$ soit inférieur ou égal à T.

On peut remarquer que l'optimalité entraîne ainsi l'optimalité conditionnelle.

Preuve. — Il suffit d'utiliser le critère obtenu au théorème II.1.10 et la relation :

$$F_t^*(\pi_t\delta) = W_t + E_\delta\left[\int_0^t ds\left[c(s, \delta^1(s)) + \int_U h(s, \delta^2(s), u)e^{\psi(s,u)}S(s, X_{s^-}, du)\right]\Big/ F_t^0\right]$$

pour obtenir une condition nécessaire et suffisante d'optimalité sous la forme souhaitée. ■

L'objet de la fin du paragraphe consistera en l'étude de la décomposition de W_t, qui nous permettra d'obtenir un second critère d'optimalité s'avérant « performant » au cours du paragraphe suivant.

PROPOSITION II.1.14. — Il existe une probabilité P* sur (Ω^0, F_T^0) pour laquelle $(W_t)_{t \leqslant T}$ est une F_t^0 sur-martingale.

Preuve. — Soit $(\delta^{(n)})$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que $J^{\delta(n)}$ tende en décroissant vers W_0 coût minimal. A chaque $\delta^{(n)}$ nous faisons correspondre $\rho_t^0(\phi^{\delta(n)}, \psi^{\delta(n)})$ que nous noterons $\rho_t^0(n)$. D'après les résultats de compacité faible établis au chapitre I paragraphe 2, on sait alors trouver $\rho_t^0(\phi^*, \psi^*)$, que nous noterons $\rho_t^{0,*}$, limite faible pour tout t d'une sous-suite de $\rho_t^0(n)$. Soit alors P* définie par :

$$\left.\frac{dP^*}{dP}\right|_{F_t^0} = \rho_t^{0,*} \qquad \text{pour tout } t \leqslant T$$

(W_t, F_t^0, P^*) est une sur-martingale pour $0 \leqslant t \leqslant T$; en effet :

$$\begin{aligned} E^*[\mathbb{1}_A(W_{t+h} - W_t)] = E[\mathbb{1}_A\rho_t^{0,*}(W_{t+h} - W_t)] \\ = E[\mathbb{1}_A(\rho_{t+h}^{0,*} - \rho_{t+h}^0(n))(W_{t+h} - W_t)] \\ + E[\mathbb{1}_A(\rho_{t+h}^0(n))(J_t^{\delta(n)} - W_t)] \\ + E[\mathbb{1}_A\rho_{t+h}^0(n)(W_{t+h} - J_{t+h}^{\delta(n)})] \\ + E[\mathbb{1}_A\rho_{t+h}^0(n)(J_t^{\delta(n)} - J_{t+h}^{\delta(n)})] \end{aligned}$$

Par hypothèse les deux derniers termes sont négatifs. Par la convergence faible de $\rho^0_{t+h}(n)$ vers $\rho^{0;*}_{t+h}$, le premier terme peut êtr e rendu aussi petit que l'on veut, et du principe d'optimalité :

$$W_0 \leqslant E_\delta\left[\int_0^T ds\left[c(s, \delta^1(s)) + \int_U h(s, \delta^2(s), u)e^{\psi^\delta(s,u)}S(s, X_{s^-}, du)\right]\right. \\ \left. + E_\delta[W_t - J^\delta_t]\right.,$$

par conséquent $E_\delta[J^\delta_t - W_t]$ est inférieur à $J^\delta - W_0$ qui peut être rendu aussi petit que l'on veut. Donc :

$$E^*[1_A(W_{t+h} - W_t)] \leqslant 0$$

pour tout A de F^0_T, d'où le résultat annoncé. ■

LEMME II.1.15. — Il existe une version continue à droite de W_t qui soit un potentiel de la classe (D) (Meyer [*19*]).

Preuve. — Pour l'existence d'une version continue à droite, il suffit d'après Meyer [*19*] de montrer la continuité à droite de l'application qui a t donne $E^*[W_t]$.

Or

$$E_\delta^{(n)}[W_{t+h} - W_t] = E[\rho^0_{t+h}(n)(W_{t+h} - J^{\delta(n)}_{t+h})] \\ + E[\rho^0_{t+h}(n)(J^{\delta(n)}_{t+h} - J^{\delta(n)}_t] + E[\rho^0_{t+h}(n)(J^{\delta(n)}_t - W_t)]$$

où les premier et troisième termes tendent vers 0 avec n, et le deuxième terme,

$$E_{\delta^{(n)}}[J^{\delta(n)}_{t+h} - J^{\delta(n)}_t] = E_{\delta^{(n)}}\left[\int_t^{t+h} ds\left[c(s, \delta^{1(n)}(s))\right.\right. \\ \left.\left. + \int_U h(s, \delta^{2,(n)}(s), u)e^{\psi^{\delta(n)}}(s, u)S(s, X_{s^-}, du)\right]\right] \\ \leqslant hk_T$$

où k_T est un majorant des coefficients c et h.

D'où

$$E^*(W_{t+h} - W_t) = \lim_{n\to\infty} E_{\delta^{(n)}}[W_{t+h} - W_t] \\ \leqslant hk_T$$

donc le résultat.

D'autre part il est clair que W_t tend vers 0 en décroissant, quand t tend vers T, dans L^1 et P.p.s. d'après le principe d'optimalité. W_t est donc un potentiel de la classe (D). ■

Nous appellerons désormais W_t cette version continue à droite.

En utilisant la décomposition de Meyer ([*19*]) des sur-martingales on peut écrire W_t de façon unique sous la forme :

$W_t = E^*[A_T/F^0_t] - A_t$ où A_t est un processus croissant prévisible intégrable (les prévisibles étant pris sur [0, T]).

LEMME II.1.16. — Il existe un unique processus prévisible α_t tel que A_t soit égal à $\int_0^t \alpha_s ds$.

Preuve. — $E^*[A_{t+h} - A_t/F_t^0] = E^*[W_{t+h} - W_t/F_t^0] \leqslant kh$. Par conséquent si F est un élément de F_s^0

$$E^*\left[\int_0^T]\!]s_F, t_F]\!] dA_v\right] \leqslant KE^*\left[\int_0^T]\!]s_F, t_F]\!] dv\right]$$

et sur la tribu prévisible sur [0, T] A_t est absolument continu par rapport au processus t ; nous en déduisons [7] l'existence de α_t. ■

Le processus $E^*[A_T/F_t^0]$ est une P*-martingale localement de carré intégrable. La probabilité P* étant l'unique solution sur (Ω^0, F_T^0) au problème des martingales $M(a, \phi^*, S, \psi^*)$ partant de x (chapitre 1 paragraphe 1), nous en déduisons d'après [12], qu'il existe des processus ξ_t mesurable, $\beta(t, u)$ prévisible, F_t^0 adaptés pour t sur [0, T] tels que :

$$\int_0^t |\xi_s|^2 ds < \infty \ \text{P*.p. s.}; \qquad \int_0^t ds \int_U \beta^2(s, u) S(s, X_{s^-}, du) < \infty \ \text{P*.p. s.}$$

vérifiant :

$$E^*[A_T/F_t^0] = E^*[A_T] + \int_0^t \xi_s dM_s^* + \int_0^t \int_U \beta(s, u) q^*(ds, du)$$

où :

$$M^* = X_t - x - \int_0^t \tilde{\phi}_s^* ds - \int_0^t \int_{|u| \leqslant 1} u q^*(ds, du) - \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)}$$

et q^* est la P*-mesure martingale associée au processus ponctuel Y_t. Par suite :

$$W_t = W_0 + \int_0^t \xi_s dM_s^* + \int_0^t \int_U \beta(s, u) q^*(ds, du) - \int_0^t \alpha_s ds \ \text{P.p. s.}$$

D'une part le processus $\int_0^t \int_U \beta(s, u) q^*(ds, du)$ est une (F_t^0, P) semi-martingale égale P.p. s. à

$$\int_0^t \int_U \beta(s, u) q(ds, du) - \int_0^t ds \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^*(s,u)} - 1) S(s, X_{s^-}, du).$$

D'autre part :

$$\bar{M}_t = X_t - x - \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} - \int_0^t \int_{|u| \leqslant 1} uq(ds, du)$$

$$= M_t^* + \int_0^t \tilde{\phi}_s^* ds - \int_0^t ds \int_{|u| \leqslant 1} u(e^{\psi^*(s,u)} - 1) S(s, X_{s^-}, du)$$

et par conséquent :

$$\int_0^t \xi_s dM_s^* = \int_0^t \xi_s d\bar{M}_s - \int_0^t \xi_s \phi_s^* ds + \int_0^t ds \xi_s \int_{|u| \leqslant 1} u(e^{\psi^*(s,u)} - 1) S(s, X_{s^-}, du)$$

En effectuant les calculs, et d'après la forme explicite de $\tilde{\phi}_s^*$ en fonction de ϕ_s^* et $\psi^*(s, u)$ (chapitre 1, paragraphe 1) on obtient :

$$W_t = W_0 + \int_0^t \xi_s d\bar{M}_s + \int_0^t \int_U \beta(s, u) q(ds, du)$$
$$- \int_0^t ds \left[\xi_s \phi_s^* + \alpha_s + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^*(s,u)} - 1) S(s, X_{s^-}, du) \right]$$

Posons alors

$$\gamma_s = - \left(\xi_s \phi_s^* + \alpha_s + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^*(s,u)} - 1) S(s, X_{s^-}, du) \right)$$

et passons de P à P_δ en effectuant le même calcul que précédemment ; nous obtenons :

$$W_t = W_0 + \int_0^t \xi_s dM_s^\delta + \int_0^t \int_U \beta(s, u) q^\delta(ds, du)$$
$$+ \int_0^t ds \left[\gamma_s + \xi_s \phi^\delta(s) + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^\delta(s,u)} - 1) S(s, X_{s^-}, du) \right] \text{ P. p. s.}$$
$$= W_0 + N_t^\delta + \int_0^t ds \left[\gamma_s + \xi_s \phi^\delta(s) \right.$$
$$\left. + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^\delta(s,u)} - 1) S(s, X_{s^-}, du) \right] \text{ P. p. s.}$$

pour tout contrôle admissible δ, où N_t^δ est une (F_t^0, P_δ) martingale.

Nous en déduisons alors aisément un second critère d'optimalité :

THÉORÈME II.1.17. — Il existe des processus γ_t, ξ_t, $\beta(t, u)$ prévisible, F_t^0 adaptés vérifiant :

$$- \int_0^T |\gamma_s| ds < \infty \text{ P. p. s.} ; \qquad \int_0^T |\xi_s|^2 ds < \infty \text{ P. p. s.}$$

$$\int_0^T ds \int_U |\beta(s, u)|^2 S(s, X_{s^-}, du) < \infty \text{ P. p. s.}$$

tels que :

i) $W_t = W_0 + \int_0^t \xi_s d\bar{M}_s + \int_0^t \int_U \beta(s, u) q(ds, du) + \int_0^t \gamma_s ds$ P. p. s. pour tout t de $[0, T]$

ii) Pour tout contrôle $\delta = (\delta^1, \delta^2)$ admissible

$$\gamma_t + \xi_t \phi^\delta(t) + \int_U \beta(t, u)(e^{\psi^\delta(t,u)} - 1) S(t, X_{s^-}, du) + \mathscr{C}^\delta(t) \geqslant 0$$

P. p. s. pour tout t de $[0, T]$ où

$$\mathscr{C}^\delta(t) = c(t, \delta^1(t)) + \int_U h(t, \delta^2(t), u) e^{\psi^\delta(t,u)} S(t, X_{t^-}, du)$$

et $\delta^* = (\delta^{1,*}, \delta^{2,*})$ est optimal si et seulement si l'on a l'égalité vraie P. p. s. pour $\delta = \delta^*$.

Preuve. — Seul le *ii)* reste à établir. Il suffit d'appliquer le principe d'optimalité du théorème II.1.13. pour obtenir :

$$E_\delta\left[\int_t^{t+h} ds\left[\gamma_s + \xi_s \phi_s^\delta + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^\delta(s,u)} - 1) S(s, X_{s^-}, du) + \mathscr{C}^\delta(s)\right] / F_t^0\right] \geqslant 0$$

avec l'égalité pour δ^* si et seulement si il est optimal.

Le résultat annoncé est alors immédiat. ■

§ 2. **Conditions suffisantes à l'existence d'un contrôle optimal**

Le principe de cette étude est d'établir que sous la condition qu'un hamiltonien réalise son minimum, on obtient un résultat d'existence d'un contrôle optimal. La donnée de cet hamiltonien reposera sur le résultat fondamental précédent (théorème II.1.17).

Nous serons amenés à faire sur ϕ, ψ, c et h des hypothèses supplémentaires de continuité :

(H_2)
- — $\phi(t, \omega, d_1)$ et $c(t, \omega, d_1)$ sont continues en d_1 pour tout couple (t, ω)
- — $\psi(t, \omega, u, d_2)$ et $h(t, \omega, u, d_2)$ sont continues en d_2, pour tout triplet (t, ω, u);

et comme nous en verrons plus tard l'utilité l'hypothèse supplémentaire pour S :

(H_3) Pour tout (t, x), $S(t, x, du)$ est absolument continu par rapport à une mesure $m(du)$ positive, σ-finie, plus précisément :

$$S(t, x, du) = n(t, x, u)m(du).$$

Soit $L^2(m)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrables relativement à m ; cet ensemble peut être muni du produit scalaire

$$\langle q, q' \rangle = \int_U q(u)q'(u)m(du)$$

qui en fait un espace métrique. $\mathscr{B}(L^2(m))$ sera la tribu borélienne sur $L^2(m)$ pour cette métrique.

Posons :

$$\mathscr{H}'_1(t, \omega, p, d_1) = p\phi(t, \omega, d_1) + c(t, \omega, d_1) \qquad (p \in R^d) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{H}'_2(t, \omega, q, d_2) = & \int_U q(u)(e^{\psi(t,\omega,u,d_2)} - 1)\sqrt{n(t, X_{t^-}^{(\omega)}, u)}m(du) \\ & + \int_U h(t, \omega, u, d_2)e^{\psi(t,\omega,u,d_2)}S(t, X_{t^-}^{(\omega)}, du) \qquad (q \in L^2(m)) \end{aligned} \tag{18}$$

et supposons encore l'hypothèse (H_4) :

(H_4) $\quad \forall(t, \omega, p)\mathscr{H}'_1(t, \omega, p, .)$ réalise son minimum sur D_1,
$\quad \forall(t, \omega, q)\mathscr{H}'_2(t, \omega, q, .)$ réalise son minimum sur D_2,

soit réalisée.

Il est à noter que d'après (H_2) $\mathscr{H}'_1$ est continue. De même puisqu'il existe une constante K telle que pour tout (t, ω, d_2, u) :

$$| e^{\psi(t,\omega,d_2,u)} - 1 | \leqslant K | u | \wedge 1 \qquad \text{grâce à (10)}$$

$$| h(t, \omega, d_2, u)e^{\psi(t,\omega,d_2,u)} | \leqslant K | u |^2 \wedge 1 \qquad \text{grâce à (10) et (11)}$$

d'après (H_2) et par application du théorème de Lebesgue $\mathscr{H}'_2$ est continue. Par conséquent l'hypothèse (H_4) est toujours réalisée dès que D_1 et D_2 sont compacts.

La proposition à établir maintenant repose sur un théorème de Bénes [*2*].

THÉORÈME II.2.1. — Soient (M, $\mathscr{M}$) un espace mesurable, A un espace métrique séparable, V métrique séparable, k de $M \times V$ dans A vérifiant :

k continue en V pour toute valeur de M

k $\mathscr{M}$-mesurable pour toute valeur de V

et enfin y de M dans A $\mathscr{M}$-mesurable vérifiant.

$y(x)$ appartient à $k(x, V)$ pour tout x de M ; alors il existe z $\mathscr{M}$-mesurable tel que :

$$y(x) = k(x, z(x))$$

PROPOSITION II.2.2. — Soient $\mathscr{B}$ la tribu optionnelle sur $[0, T] \times \Omega^0$, $\mathscr{P}$ la tribu prévisible sur le même espace. En supposant que (H_3) et (H_4) soient vérifiées posons :

$$\mathscr{H}_1(t, \omega, p) = \min_{d_1 \in D_1} \mathscr{H}'_1(t, \omega, p, d_1)$$

$$\mathscr{H}_2(t, \omega, q) = \min_{d_2 \in D_2} \mathscr{H}'_2(t, \omega, q, d_2)$$

et soient $y_1^*(t, \omega, p)$, $y_2^*(t, \omega, q)$ tels que :

$$\mathscr{H}'_1(t, \omega, p, y_1^*(t, \omega, p)) = \mathscr{H}_1(t, \omega, p)$$

$$\mathscr{H}'_2(t, \omega, q, y_2^*(t, \omega, q)) = \mathscr{H}_2(t, \omega, q),$$

alors on peut choisir y_1^* et y_2^* de telle sorte que y_1^* soit $\mathscr{B} \times \mathscr{B}(\mathrm{R}^d)$ mesurable, et y_2^* soit $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathrm{L}^2(m))$ mesurable.

Preuve. — Le résultat sur y_1^* se démontre de la même manière que dans le cas continu $(S \equiv 0)$ (Davis [5]).

L'application à d_2 fixé $((e^{\psi(t,\omega,.,d_2)} - 1)\sqrt{n(t, X_{t^-}, .)}, q)$ est $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathrm{L}^2(m))$ mesurable (ψ et n étant elles-mêmes $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathrm{U})$ mesurables) ; le produit scalaire étant continu on en déduit que $\mathscr{H}'_2(t, \omega, q, d_2)$ est $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathrm{L}^2(m))$ mesurable pour tout d_2 comme somme d'une application $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathrm{L}^2(m))$ mesurable et d'une application $\mathscr{P}$ mesurable ne dépendant pas de q.

Soit alors Δ_2 un sous-ensemble dénombrable dense de D_2 ; $\mathscr{H}'_2$ étant continue en d_2 il vient que :

$$\mathscr{H}_2(t, \omega, q) = \inf_{d_2 \in \Delta_2} \mathscr{H}'_2(t, \omega, q, d_2)$$

de sorte que :

$$\{ (t, \omega, q) \mid \mathscr{H}_2(t, \omega, q) < a \} = \bigcup_{d_2 \in \Delta_2} \{ (t, \omega, q) \mid \mathscr{H}'_2(t, \omega, q, d_2) < a \}$$

et $\mathscr{H}_2$ est aussi $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathrm{L}^2(m))$ mesurable. De plus d'après l'hypothèse (H_4) $\mathscr{H}_2(t, \omega, q)$ appartient à $\mathscr{H}'_2(t, \omega, q, D_2)$ pour tout (t, ω, q). Le résultat est alors une application directe du théorème précédent. ■

Le résultat fondamental en découle, à savoir :

THÉORÈME II.2.3. — Sous les hypothèses (H_1), (9), (10), (11), (12), (H_2), (H_3) et (H_4) il existe un contrôle optimal $\delta^* = (\delta^{1,*}, \delta^{2,*})$.

Preuve. — Posons

$$\begin{aligned}\delta^*(t, \omega) &= (\delta^{1,*}(t, \omega), \delta^{2,*}(t, \omega)) \\ &= \left(y_1^*(t, \omega, \xi(t, \omega)), y_2^*(t, \omega, \beta(t, \omega, .)\sqrt{n(t, X_{t^-}(\omega), .)}\right)\end{aligned}$$

et montrons successivement :

1. δ^* est un contrôle admissible :

Posons $\chi_1(t, \omega) = (t, \omega, \xi(t, \omega))$; χ_1 est $\mathscr{B}$-mesurable et puisque $\delta^{1,*} = y_1^* \circ \chi_1$ le résultat est immédiat en vertu de la proposition précédente.

De même posons $\chi_2(t, \omega) = (t, \omega, \beta(t, \omega, .)\sqrt{n(t, X_{t^-}(\omega), .)})$; χ_2 est prévisible et y_2^* étant choisie prévisible en vertu de la proposition précédente, $\delta^{2,*}$ égal à $y_2^* \circ \chi_2$ est prévisible.

2. δ^* réalise le coût minimal :

D'après le théorème II.1.17, on peut écrire W_t sous la forme :

$$W_t = J^* + N_t^\delta + \int_0^t ds\Big[\gamma_s + \xi_s\phi_s^\delta + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^\delta(s,u)} - 1)S(s, X_{s^-}, du)\Big] \quad \text{P. p. s.}$$

où N_t^δ est une (F_t^0, P_δ) martingale et J^* le coût minimal égal à W_0.

En faisant $t = T$ et en prenant l'espérance par rapport à P_δ, on obtient :

$$J^* + E_\delta\left[\int_0^T ds\left(\gamma_s + \xi_s\phi_s^\delta + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^\delta(s,u)} - 1)S(s, X_{s^-}, du)\right)\right] = 0$$

Posons

$$b_s = \xi_s\phi_s^{\delta^*} + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^{\delta^*}(s,u)} - 1)S(s, X_{s^-}, du) + \mathscr{C}_s^{\delta^*},$$

alors d'après la construction même de δ^* on a :

$$\xi_s\phi_s^\delta + \int_U \beta(s, u)(e^{\psi^\delta(s,u)} - 1)S(s, X_{s^-}, du) + \mathscr{C}_s^\delta \geqslant b_s \quad \text{P. p. s.}$$

pour tout δ admissible, d'où l'on en déduit :

$$(i) \qquad J^* \leqslant E_\delta\left[\int_0^T \mathscr{C}_s^\delta ds\right] - E_\delta\left[\int_0^T (b_s + \gamma_s)ds\right]$$

avec égalité pour δ^*.

Soit $X = \int_0^T (b_s + \gamma_s)ds$; d'après le théorème II.1.17. $b_s + \gamma_s$ est une variable aléatoire positive, par conséquent X est P. p. s. positive.

Posons $X^N = \min(N, X)$. J^* étant le coût minimal on peut écrire : pour tout ε positif, il existe un contrôle δ tel que $E_\delta\left[\int_0^T \mathscr{C}_s^\delta ds\right] \leqslant J^* + \varepsilon$, d'où, d'après (*i*) $E_\delta[X] \leqslant \varepsilon$. Par conséquent il existe une suite δ_n de contrôles admissibles pour lesquels $E_{\delta_n}[X]$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et *a fortiori* puisque $0 \leqslant X^N \leqslant X$, $E_{\delta_n}[X^N]$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

L'espace $\mathscr{D}(\Phi, \Psi)$ étant faiblement compact (1.2), il existe une sous-suite δ_{n_p} pour laquelle $\exp \xi_T(\phi^{\delta_{n_p}}, \psi^{\delta_{n_p}})$ converge faiblement vers $\exp \xi_T(\phi^*, \psi^*)$ et puisque X^N est bornée, $E_{\delta_{n_p}}[X^N]$ égal à $E[\exp(\xi_T(\phi^{\delta_{n_p}}, \psi^{\delta_{n_p}}))X^N]$ converge quand p tend vers l'infini vers $E[\exp(\xi_T(\phi^*, \psi^*))X^N]$. Par conséquent, $E[\exp(\xi_T(\phi^*, \psi^*))X^N] = 0$, d'où X_N est nulle P. p. s.; ceci étant vrai pour tout N, nous en déduisons que X est nulle P. p. s. Par conséquent,

$$J^* = E_{\delta^*}\left[\int_0^T \mathscr{C}(s, \delta^*(s))ds\right]$$

et δ^* réalise le coût minimal. ■

§ 3. Existence d'un contrôle optimal : horizon infini

Nous allons utiliser les résultats précédents en contrôle à horizon fini pour déduire un résultat d'existence en horizon infini.

Nous supposerons les hypothèses suivantes :

1) a est une fonction borélienne bornée définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ à valeurs définies positives sur $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, telle que a^{-1} existe et soit borné, $S(t, x, du)$ est un noyau σ-fini positif sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{B}(U)$, pour tout (t, x) absolument continu par rapport à une mesure $m(du)$ positive σ-finie vérifiant

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \int_U |u|^2 \wedge 1 S(s, X_{s^-}, du)$$

fini pour tout t, et tels que pour tout couple (t, x) il existe une et une seule solution $P^{t,x}$ au problème des martingales $M(a, 0, S, 0)$ partant de x à l'instant t.

2) ϕ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \Omega^0 \times D_1$ à valeurs dans R^d mesurable, F_t^0 adaptée pour tout d_1 et bornée P. p. s.

3) ψ est une application de $\mathbb{R}^+ \times \Omega^0 \times D_2 \times U$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\mathscr{P} \times \mathscr{B}(D_2) \times \mathscr{B}(U)$ mesurable et telle qu'il existe des constantes C_1 et C_2 pour lesquelles :

$$|\psi(t, d_2, u)| \leqslant C_1 |u| \quad \text{si} \quad |u| \leqslant 1 \ \text{P. p. s. pour tout } (t, d_2)$$
$$|\psi(t, d_2, u)| \leqslant C_2 \quad \text{si} \quad |u| > 1 \ \text{P. p. s. pour tout } (t, d_2)$$

4) c est une application borélienne positive définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega^0 \times D_1 \times U$ mesurable, F_t^0 adaptée, et h définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega^0 \times D_2 \times U$ mesurable, F_t^0 adaptée, prévisible pour tout (u, d_2) et vérifiant :

il existe p positif tel que $h(t, \omega, d_2, u) \leqslant p(|u|^2 \wedge 1)$ pour tout (t, ω, d_2)

5) $\phi(t, \omega, d_1)$ et $c(t, \omega, d_1)$ sont continues en d_1 pour tout couple (t, ω); $\psi(t, \omega, u, d_2)$ et $h(t, \omega, u, d_2)$ sont continues en d_2 pour tout triplet (t, ω, u).

6) $\forall(t, \omega, p)\mathscr{H}'_1(t, \omega, p, \cdot)$ réalise son minimum sur D_1, $\forall(t, \omega, q)\mathscr{H}'_2(t, \omega, q, \cdot)$ réalise son minimum sur D_2, (voir (17) et (18)).

Nous noterons encore par :

— $\mathscr{D}_1$ l'ensemble des applications $\delta_t^1(\omega)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Omega^0$ dans D_1, optionnelles ;

— $\mathscr{D}_2$ l'ensemble des applications $\delta_t^2(\omega)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Omega^0$ dans D_2, prévisibles ;

— $\mathscr{D}$ l'espace produit $\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$.

$\mathscr{D}_t$ et $\Pi_{t,s}$ seront définis comme au paragraphe 1. Un élément de $\mathscr{D}_t$ sera appelé t-contrôle admissible. La fonction de perte sera dans ce cas $L^\delta = L^\delta_\infty$ où

$$L_t^\delta = \int_0^t e^{-\alpha s} c(s, \delta^1(s))ds + \sum_{s \leqslant t} e^{-\alpha s} h(s, \delta^2(s), Y_s)$$

où α est une constante positive donnée. A partir de L_t^δ les autres définitions seront identiques à (14), (15), (16), (17).

Il est à remarquer que dans ce cas aussi le coût conditionnel après t ne dépend pas des valeurs du contrôle jusqu'à t, en effet :

$$E_\delta[L^\delta - L_t^\delta/F_t^0] \leqslant E_\delta[L_T^\delta - L_t^\delta/F_t^0] + M\frac{e^{-\alpha T}}{\alpha}$$

où M est indépendante de δ, et le résultat suit comme dans le cas à horizon fini (Remarques II.1.4.).

L'objet du contrôle optimal $\mathscr{C}$ consiste alors à trouver un contrôle admissible $\hat{\delta}$ vérifiant $J^{\hat{\delta}} \leqslant J^\delta$ pour tout δ de $\mathscr{D}$. Dans la suite nous noterons par $\mathscr{C}_T$ le contrôle à horizon fini T, soit trouver un contrôle admissible $\hat{\delta}^T$ de $\mathscr{D}_T$ vérifiant $J_T^{\hat{\delta}^T} \leqslant J_T^\delta$ pour tout δ^T de $\mathscr{D}_T$, où $J_T^{\delta^T} = E_{\delta^T}[L_T^\delta]$.

Les conditions 1) à 7) nous permettent d'obtenir l'existence d'un T-contrôle optimal $\hat{\delta}^{\mathrm{T}}$ pour le problème de contrôle $\mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ pour tout T fini.

Le lemme important suivant nous permettra d'établir l'existence d'un contrôle optimal pour l'horizon infini.

LEMME II.3.1. — Soient donnés s et t finis avec s inférieur à t, alors nous pouvons trouver un t-contrôle optimal $\tilde{\delta}^t$ au problème $\mathscr{C}_t$ tel que le contrôle $\Pi_{t,s}\tilde{\delta}^t$ soit un s-contrôle optimal pour le problème de contrôle $\mathscr{C}_s$.

Preuve. — Soit $\hat{\delta}^s$ (resp. $\hat{\delta}^t$) le contrôle optimal construit au théorème II.2.3. relativement au problème de contrôle $\mathscr{C}_s$ (resp. $\mathscr{C}_t$), et soit $\bar{\delta}$ l'application définie sur $[0, t] \times \Omega^0$ égale à $\hat{\delta}^s(v, \omega)$ sur $[0, s] \times \Omega^0$ et à $\hat{\delta}^t(v, \omega)$ sur $]s, t] \times \Omega^0$ alors $\bar{\delta}$ répond au problème. En effet :

— grâce à sa construction et aux propriétés de $\hat{\delta}^s$ et $\hat{\delta}^t$, $\bar{\delta}$ est un t-contrôle admissible, c'est-à-dire appartient à $\mathscr{D}_t$;

— par construction $\Pi_{t,s}\bar{\delta} = \delta^s$ est bien un s-contrôle optimal, donc il reste à montrer que $\bar{\delta}$ est un t-contrôle optimal

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_t^{\bar{\delta}} &= \mathrm{E}_{\bar{\delta}}[\mathrm{L}_s^{\bar{\delta}} + (\mathrm{L}_t^{\bar{\delta}} - \mathrm{L}_s^{\bar{\delta}})] \\ &= \mathrm{E}_{\Pi_{t,s}\bar{\delta}}[\mathrm{L}_s^{\bar{\delta}}] + \mathrm{E}\left[\rho_t^s(\bar{\delta}) \int_s^t e^{-\alpha v} \mathscr{C}_v^{\bar{\delta}} dv \right] \end{aligned}$$

où $\mathrm{L}_s^{\bar{\delta}}$ ne dépend que des valeurs de $\bar{\delta}$ sur $[0, s] \times \Omega^0$, $\rho_t^s(\bar{\delta})$ et $\mathscr{C}_v^{\bar{\delta}}$, $s < v \leqslant t$, que des valeurs de $\bar{\delta}$ sur $]s, t] \times \Omega^0$ d'où :

$$\mathrm{J}_t^{\bar{\delta}} = \mathrm{E}_{\hat{\delta}^s}[\mathrm{L}_s^{\hat{\delta}s}] + \mathrm{E}_{\hat{\delta}^t}\left[\int_s^t e^{-\alpha v} \mathscr{C}_v^{\hat{\delta}t} dv \right]$$

Donnons-nous un t-contrôle admissible δ^t, alors par hypothèse

$$\mathrm{E}_{\hat{\delta}^s}[\mathrm{L}_s^{\hat{\delta}s}] = \mathrm{J}_s^{\hat{\delta}s} \leqslant \mathrm{J}_s^{\Pi_{t,s}\delta^t}$$

et d'autre part :

$$\mathrm{E}_{\hat{\delta}^t}\left[\int_s^t e^{-\alpha v} \mathscr{C}_v^{\hat{\delta}t} dv \right] \leqslant \mathrm{E}_{\delta t}\left[\int_s^t e^{-\alpha v} \mathscr{C}_v^{\delta} dv \right]$$

à l'aide du principe d'optimalité et de l'indépendance des deux expressions par rapport à la valeur des contrôles avant s. Nous en déduisons que pour tout contrôle t-admissible δ^t $\mathrm{J}_t^{\bar{\delta}}$ est majoré par $\mathrm{J}_t^{\delta^t}$, d'où le résultat. ∎

Nous pouvons maintenant établir l'existence d'un contrôle optimal :

THÉORÈME II.3.2. — Sous les conditions 1) à 6) il existe un contrôle optimal au problème de contrôle $\mathscr{C}$.

Preuve. — D'après le théorème II.2.3. pour chaque entier n, il existe un n-contrôle optimal $\hat{\delta}^n$. Posons :

$$\delta^*(0) = \hat{\delta}^1(0) \quad \text{et} \quad \delta^*(t) = \sum_{n \geqslant 1} \hat{\delta}^n(t) \mathbb{1}_{]n-1,n]}(t)$$

pour tout t non nul, alors par un raisonnement identique à celui du lemme précédent nous pouvons voir que δ^* est un contrôle admissible.

Il est optimal ; en effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\delta^*}[\mathrm{L}^{\delta^*}] &= \mathrm{E}_{\pi_n\delta^*}[\mathrm{L}_n^{\pi_n\delta^*}] + \mathrm{E}_{\delta^*}\left[\int_n^\infty e^{-\alpha t}\mathscr{C}^{\delta^*}(t)dt\right] \\ &\leqslant \mathrm{E}_{\pi_n\delta^*}[\mathrm{L}_{\mathrm{N}}^{\pi_n\delta^*}] + \mathrm{M}\frac{e^{-\alpha n}}{\alpha} \end{aligned}$$

où M est une constante indépendante de n. D'après le lemme précédent $\pi_n\delta^*$ est un n-contrôle optimal, d'où pour tout contrôle admissible δ, ε étant donné, nous pouvons choisir n tel que :

$$\mathrm{E}_{\delta^*}[\mathrm{L}^{\delta^*}] \leqslant \mathrm{E}_{\pi_n\delta}[\mathrm{L}_n^{\pi_n\delta}] + \mathrm{M}\frac{e^{-\alpha n}}{\alpha} \leqslant \mathrm{E}_\delta[\mathrm{L}^\delta] + \varepsilon$$

$\mathrm{E}_{\delta^*}[\mathrm{L}^{\delta^*}] \leqslant \mathrm{E}_\delta[\mathrm{L}^\delta] + \varepsilon$ étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, et tout contrôle admissible δ nous obtenons l'optimalité de δ^*. ■

III. CAS MARKOVIEN

Dans ce chapitre nous supposerons que les éléments ϕ_t, c_t (resp. $\psi(t, u)$, $h(t, u)$) sont $\sigma(\mathrm{X}_t)$ (resp. $\sigma(\mathrm{X}_{t^-})$) mesurable pour tout t (resp. pour tout t et tout u). Nous nous donnons par suite :

— ϕ application mesurable de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{D}_1$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que la condition 2) du paragraphe II.3. soit vérifiée.

— ψ application mesurable de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{U} \times \mathrm{D}_2$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout (t, x, d_2) :

$$|\psi(t, x, d_2, u)| \leqslant \mathrm{K}_1 |u| \text{ si } |u| \leqslant 1, \quad |\psi(t, x, d_2, u)| \leqslant \mathrm{K}_2 \text{ si } |u| > 1$$

où K_1 et K_2 sont des constantes positives,

— c application mesurable de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{D}_1$ dans $\mathbb{R}^+$ bornée

— h application mesurable de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{U} \times \mathrm{D}_2$ dans $\mathbb{R}^+$ telle qu'il existe une constante positive p pour laquelle :

$$|h(t, x, d_2, u)| \leqslant p(|u|^2 \wedge 1) \qquad \text{pour tout } (t, x, d_2, u)$$

Nous supposerons de plus que :

(H_2') — $\phi(t, x, d_1)$, $c(t, x, d_1)$(resp. $\psi(t, x, u, d_2)$, $h(t, x, u, d_2)$) sont continues en d_1 pour tout (t, x) (resp. en d_2 pour tout (t, x, u)).

(H_4') — pour tout (t, x, p) $\mathcal{H}_1'(t, x, p, .) = p\phi(t, x, .) + c(t, x, .)$ réalise son minimum sur D_1, ainsi que

$$\mathcal{H}_2'(t, x, q, .) = \int_{\mathrm{U}} q(u)(e^{\psi(t,x,u,.)} - 1)\sqrt{n(t, x, u)}m(du) + \int_{\mathrm{U}} h(t, x, u, .)e^{\psi(t,x,u,.)}\mathrm{S}(t, x, du)$$

pour tout (t, x, q), où q appartient à $\mathrm{L}^2(m)$, la propriété (H_3) étant supposée vérifiée. Enfin le processus $(\Omega_t^0, \mathrm{F}_t^0, \theta_t, \mathrm{X}_t, \mathrm{P}^{t,x})$ est supposé être un Markov fort.

Les propriétés précédentes entraînent en particulier les hypothèses (H_2), (H_4) et donc la réalisation du théorème II. 3. 2. ; c'est-à-dire l'existence d'un contrôle optimal δ^* dans $\mathcal{D}$.

§ 1.

Nous désignerons par :

$\mathfrak{M}_1^t$ (resp. $\mathfrak{M}_2^t$) l'ensemble des applications $\delta^1(s, x)$(resp. $\delta^2(s, x)$) de $[0, t] \times \mathbb{R}^d$ dans D_1 (resp. D_2) mesurables.

$\mathfrak{M}_t$ l'ensemble des couples $\delta(s) = (\delta^1(s), \delta^2(s))$ $0 \leqslant s \leqslant t$.

Cet ensemble inclus dans $\mathcal{D}_t$ ensemble des contrôles t-admissibles sera appelé ensemble des contrôles t-markoviens. (Nous supprimerons l'indice ∞ dans le cas infini).

Il semble naturel de se poser le problème du contrôle optimal dans la classe des contrôles Markoviens et de tenter de répondre aux trois questions suivantes :

— le problème limité aux contrôles markoviens admet-il une solution, ou plus précisément existe-t-il un contrôle optimal markovien dans la classe des contrôles markoviens ?

— ce contrôle peut-il être choisi indépendamment de la loi initiale ?

— enfin ce contrôle markovien optimal, s'il existe, est-il encore optimal dans la classe $\mathcal{D}_t$ des contrôles admissibles ?

L'étude ci-dessous va se diviser en deux parties, dans la première nous répondrons aux trois questions précédentes dans le contrôle markovien à horizon fini sous une hypothèse supplémentaire (H_5), puis à horizon infini sous (H_5'), enfin dans la dernière partie nous étudierons les hypothèses (H_5) et (H_5'), et le contrôle markovien sans ces hypothèses supplémentaires.

§ 2. Contrôle markovien

Dans tout ce paragraphe en horizon fini nous supposerons l'hypothèse suivante vérifiée :

(H_5) L'application qui a t, x de $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ fait correspondre

$$\inf_{\delta \in \mathfrak{m}_T} E_\delta^{t,x}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^\delta(t+s, X_s)ds\right]$$

est mesurable.

(Nous montrerons au paragraphe 3 que cette hypothèse n'est pas vide).

Nous allons tout d'abord supposer qu'au temps initial $t = 0$ nous partons d'un x fixé, et nous allons étudier les propriétés du coût conditionnel après t partant de x : $K_t^\delta(x)$ (16).

LEMME III.2.1. — Le coût conditionnel après t partant de x est égal à :

$$K_t^\delta(x) = E_\delta^{t,X_t}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^\delta(t+s, X_s)ds\right] \tag{17}$$

où

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^\delta(t, x) &= c(t, x, \delta^1(t, x)) + \int_U h(t, x, u, \delta^2(t, x))e^{\psi(t,x,\delta^2(t,x),u)}S(t, x, du)\\ &= c^\delta(t, x) + \int_U h^\delta(t, x, u)e^{\psi^\delta(t,x,u)}S(t, x, du)\,;\end{aligned}$$

par suite $K_t^\delta(x)$ est t, X_t mesurable pour tout t de $[0, T]$ et est indépendant du point de départ x.

Preuve. — Pour tout $t \leqslant T$

$$\begin{aligned}\rho_T^t(\delta) = \exp\Bigg\{ &\int_t^T \langle \tilde{\phi}^\delta(s, X_s) \,|\, a^{-1}(s, X_s) \,|\, d\bar{M}_s \rangle + \int_t^T\int_U \psi^\delta(s, X_{s^-}, u)q(ds, du)\\ &- \frac{1}{2}\int_t^T \langle \tilde{\phi}^\delta(s, X_s) \,|\, a^{-1}(s, X_s) \,|\, \tilde{\phi}^\delta(s, X_s) \rangle\, ds\\ &- \int_t^T ds \int_U (e^{\psi^\delta(s,X_s,u)} - 1 - \psi^\delta(s, X_s, u))S(s, X_s, du)\Bigg\}\\ = \exp\Bigg\{ &\int_0^{T-t} \langle \phi^\delta(s+t, X_{s+t}) \,|\, a^{-1}(s+t, X_{s+t}) \,|\, d(\bar{M}_{s+t} - \bar{M}_t) \rangle\\ &+ \int_0^{T-t}\int_U \psi^\delta(s+t, X_{s+t^-}, u)q^t(ds, du)\\ &- \frac{1}{2}\int_0^{T-t} \langle \phi^\delta(s+t, X_{s+t}) \,|\, a^{-1}(s+t, X_{s+t}) \,|\, \phi^\delta(s+t, X_{s+t}) \rangle\, ds\\ &- \int_0^{T-t} ds \int_U (e^{\psi^\delta(s+t,X_{s+t},u)} - 1 - \psi^\delta(s+t, X_{s+t}, u))S(s+t, X_{s+t}, du)\Bigg\}\end{aligned}$$

où q^t est la mesure martingale associée au processus ponctuel $Y_{t+s} - Y_t$.

Nous en déduisons facilement que :

$$\rho_T^t(\delta) = {}^t\rho_{T-t}^0(\delta) \circ \theta_t$$

où ${}^t\rho_{T-t}^0(\delta)$ est associé aux coefficients $a(t + s, x)$, $\phi(t + s, x, \delta^1(t + s, x))$, $\psi(t+s, x, \delta^2(t+s, x), u)$ $S(t+s, x, du)$, s appartenant à $[0, T-t]$ et x à $\mathbb{R}^d$.

Par suite la forme de $K_t^\delta(x)$ suit facilement, en effet :

$$\begin{aligned}
K_t^\delta(x) &= E_\delta^{0,x}[L_T^\delta - L_t^\delta/F_t^0] \\
&= E_\delta^{0,x}\left[\int_t^T \mathscr{C}^\delta(s, X_s)ds/F_t^0\right] \\
&= E\left[{}^t\rho_{T-t}^0(\delta) \circ \theta_t \times \int_0^{T-t} \mathscr{C}^\delta(s + t, X_s) \circ \theta_t ds/F_t^0\right] \\
&= E^{t,X_t}\left[{}^t\rho_{T-t}^0(\delta) \int_0^{T-t} \mathscr{C}^\delta(s + t, X_s)ds\right] \\
&= E_\delta^{t,X_t}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^\delta(s + t, X_s)ds\right]
\end{aligned}$$

d'après notre définition de la solution au problème des martingales et la propriété de Markov ; d'où (17) et par suite le résultat. ■

Nous noterons par $V(t, x)$ la fonction introduite dans l'hypothèse et nous voyons d'après (17) que pour tout x de $\mathbb{R}^d$:

$$V(t, X_t) = \inf_{\delta \in \mathfrak{m}_T} K_t^\delta(x).$$

Par suite l'introduction de l'ess-inf (II.1.11) n'est plus nécessaire.

Le résultat suivant est essentiel pour résoudre le cas Markovien [*1*].

PROPOSITION III.2.2. — Si A_t est un processus à variation intégrable absolument continu par rapport au temps sur $[0, T]$ et si nous notons par A_t^h une version cadlag de $E[A_{t+h} - A_t/F_t^0]$, alors nous obtenons que :

$$\frac{dA_t}{dt} = \overline{\lim_{h \searrow 0}} \frac{A_t^h}{h} d\lambda^T \times dP \text{ p. p.} \tag{18}$$

où λ^T est la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$.

THÉORÈME III.2.3. — *i)* Il existe des fonctions réelles $\gamma(t, x)$, $\beta(t, x, u)$

et un vecteur d-dimensionnel $\xi(t, x)$ boréliens tels que $\xi(t, x)$, $\gamma(t, x)$ et $\int_U |\beta(t, x, u)|^2 S(t, x, du)$ soient bornés sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ et tels que :

$$V(t, X_t) = V_0 + \int_0^t \xi(s, X_s)d\bar{M}_s + \int_0^t \int_U \beta(s, X_{s^-}, u)q(ds, du) + \int_0^t \gamma(s, X_s)ds$$

$P^{0,x}$p. s. pour tout t de $[0, T]$ et x de $\mathbb{R}^d$.

ii) Pour tout contrôle T-markovien $\delta = (\delta^1, \delta^2)$, pour tout x de $\mathbb{R}^d$

$$\gamma(t, y) + \xi(t, y)\phi^\delta(t, y) + \int_U \beta(t, y, u)(e^{\psi^\delta(t,y,u)} - 1)S(t, y, du) + \mathscr{C}^\delta(t, y) \geqslant 0$$

sauf sur un ensemble $\lambda^T \times P_x$ nul ; et δ^* est un contrôle markovien T-optimal markovien si et seulement si l'égalité est vraie sauf sur un ensemble $\lambda^T \times P_x$ nul.

Preuve. — Considérons le coût conditionnel markovien après t, $V(t, X_t)$, et fixons pour l'instant x de $\mathbb{R}^d$. Alors par une démonstration semblable en tout point à celle de la proposition II.1.14, des lemmes II.1.15, II.1.16 et du théorème II.1.17, on peut montrer l'existence d'une probabilité $P^{*,x}$ d'une version continue à droite du processus $V(t, X_t)$, notée $V_x(t)$, et des processus $\gamma_x(t)$, $\xi_x(t)$, $\beta_x(t, u)$ vérifiant les conditions du théorème II.1.17 tels que pour tout t de $[0, T]$

$$(19) \quad V_x(t) = V_0 + \int_0^t \xi_x(s)d\bar{M}_s + \int_0^t \int_U \beta_x(s, u)q(ds, du) + \int_0^t \gamma_x(s)ds$$

$P^{0,x}$p. s. Nous allons appliquer plusieurs fois la proposition III.2.2 pour expliciter les processus $\gamma_x(t)$, $\xi_x(t)$ et $\beta_x(t, u)$.

— En prenant pour A_t le processus $\int_0^t \gamma_x(s)ds$, la proposition nous indique que $\lambda^T \times P^{0,x}$p. s. $\beta_x(t)$ est égal à $\overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{A_t^h}{h}$, soit $\overline{\lim_n}\, nA_t^{\frac{1}{n}}$. Or par construction A_t^h est une version cadlag du processus $E^{0,x}\left[\int_t^{t+h} \gamma_x(s)ds \mid F_t^0\right]$ soit encore du processus $E^{0,x}[V_x(t + h) - V_x(t)/F_t^0]$. Il s'ensuit que : $\lambda^T \times P^{0,x}$ p. s.

$$\begin{aligned}\gamma_x(t) &= \overline{\lim_n}\, n\left\{ E^{0,x}\left[V\left(t + \frac{1}{n}, X_{t+\frac{1}{n}}\right)/F_t^0\right] - V(t, X_t)\right\}\\ &= \overline{\lim_n}\, n\left\{ E^{t,X_t}\left[V\left(t + \frac{1}{n}, X_{\frac{1}{n}}\right)\right] - V(t, X_t)\right\}\end{aligned}$$

grâce à la propriété de Markov. Si nous notons par $\gamma(t, y)$ la fonction mesurable $\overline{\lim_n} \left\{ n\mathrm{E}^{t,y}\left[\mathrm{V}\left(t + \frac{1}{n}, \mathrm{X}_{\frac{1}{n}} \right) \right] - n\mathrm{V}(t, y) \right\}$, nous voyons que

$$\gamma_x(t) = \gamma(t, \mathrm{X}_t)\lambda^{\mathrm{T}} \times \mathrm{P}^{0,x}\text{p. s.}$$

Ce qui montre que $\gamma_x(t)$ admet une version indépendante de x et de la forme $\gamma(t, \mathrm{X}_t)$.

— De même en prenant successivement pour A_t les processus

$$\int_0^t ds \sum_{k=1}^d \xi_x^k(s) a_{ki}(s, \mathrm{X}_s), \qquad i = 1, \ldots, d,$$

nous voyons que pour tout i,

$$\lambda^{\mathrm{T}} \times \mathrm{P}^{0,x}\text{p. s.} : \sum_{k=1}^d \xi_x^k(t) a_{ki}(s, \mathrm{X}_s) = \overline{\lim_n}\, n\mathrm{A}_t^{\frac{1}{n}}$$

où A_t^h est une version du processus :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{0,x}\left[\int_t^{t+h} ds \sum_{k=1}^d \xi_x^k(s) a_{k,i}(s, \mathrm{X}_s) / \mathrm{F}_t^0 \right] \\
&\quad = \mathrm{E}^{0,x}\left[\int_0^{t+h} \xi_x(s) d\bar{\mathrm{M}}_s \,.\, \bar{\mathrm{M}}^i(t+h) - \int_0^t \xi_x(s) d\bar{\mathrm{M}}_s \,.\, \bar{\mathrm{M}}^i(t) / \mathrm{F}_t^0 \right] \\
&\quad = \mathrm{E}^{0,x}\left[\int_t^{t+h} \xi_x(s) d\bar{\mathrm{M}}_s . \bar{\mathrm{M}}^i(t+h) - \bar{\mathrm{M}}^i(t) / \mathrm{F}_t^0 \right] \\
&\quad = \mathrm{E}^{0,x}\left[\left(\mathrm{V}_x(t+h) - \mathrm{V}_x(t) - \int_t^{t+h} \gamma_x(s) ds \right) (\bar{\mathrm{M}}^i(t+h) - \bar{\mathrm{M}}^i(t)) / \mathrm{F}_t^0 \right]
\end{aligned}$$

car $\bar{\mathrm{M}}^i(t)$ et $\int_0^t \int_{\mathrm{U}} \beta_x(s, u) q(ds, du)$ sont deux martingales orthogonales et utilisant (19). Or une version du processus précédent d'après les résultats obtenus plus haut est

$$\mathrm{E}^{0,x}\left[\left(\mathrm{V}(t+h, \mathrm{X}(t+h)) - \mathrm{V}(t, \mathrm{X}_t) - \int_0^h \gamma(t+s, \mathrm{X}_{t+s}) ds \right) (\bar{\mathrm{M}}^i(t+s) - \bar{\mathrm{M}}^i(t)) / \mathrm{F}_t^0 \right]$$

soit encore :

$$\mathrm{E}^{0,x}\left[\left(\mathrm{V}(t+h, \mathrm{X}_h \circ \theta_t) - \mathrm{V}(t, \mathrm{X}_t) - \int_0^h \gamma(t+s, \mathrm{X}_s \circ \theta_t) ds \right) \bar{\mathrm{M}}^i(h) \circ \theta_t / \mathrm{F}_t^0 \right]$$

appliquant les propriétés de la martingale $\bar{M}^i(t)$, soit enfin grâce à la propriété de Markov :

$$E^{t,X_t}\left[\left(V(t+h, X_h) - V(t, X_0) - \int_0^h \gamma(t+s, X_s)ds\right)\bar{M}^i(h)\right]$$

Posons pour tout $i = 1, \ldots, d$,

$$\bar{\xi}^i(t, y) = \overline{\lim_n}\, nE^{t,x}\left[\left(V\left(t+\frac{1}{n}, X_{\frac{1}{n}}\right) - V(t, X_0) - \int_0^{\frac{1}{n}} \alpha(t+s, X_s)ds\right)\bar{M}^i\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

alors nous avons pour tout i et tout x :

$$\bar{\xi}^i(t, X_t) = \sum_{k=1}^{d} \xi_x^k(t)a_{k,i}(t, X_t)\lambda^T \times P^{0,x}\text{p. s.}$$

Ce qui montre que $\xi_x(t)$ admet une version indépendante de x de la forme $\xi(t, X_t) = \bar{\xi}(t, X_t)a^{-1}(t, X_t)$.

— Enfin en prenant pour A_t successivement pour tout Γ de $\mathscr{B}(U)$

$$\int_0^t ds \int_\Gamma \beta_x(s, u)S(s, X_{s^-}, du)$$

et en effectuant un raisonnement semblable aux deux précédents, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \beta_x(t, u)S(t, X_{t^-}, du)
&= \overline{\lim_n}\, nE^{0,x}\left[\int_0^{t+\frac{1}{n}}\int_U \beta_x(s, u)q(ds, du) \times q_{t+\frac{1}{n}}(\Gamma)\right.\\
&\qquad\left. - \int_0^t\int_U \beta_x(s, u)q(ds, du) \times q_t(\Gamma)/F_t^0\right]\\
&= \overline{\lim_n}\, nE^{0,x}\left[\left(V\left(t+\frac{1}{n}, X_{t+\frac{1}{n}}\right) - V(t, X_t) - \int_0^{\frac{1}{n}} \gamma(s+t, X_{s+t})ds\right)\right.\\
&\qquad\left. \times (q_{t+\frac{1}{n}}(\Gamma) - q_t(\Gamma))/F_t^0\right]\\
&= \overline{\lim_n}\, nE^{t,X_t}\left[\left(V\left(t+\frac{1}{n}, X_{\frac{1}{n}}\right) - V(t, X_0) - \int_0^{\frac{1}{n}} \gamma(s+t, X_s)ds\right)\right.\\
&\qquad\left. \times q_{\frac{1}{n}}^t(\Gamma)\right]\lambda^T \times P^{0,x}\text{p. s.}
\end{aligned}$$

où q^t est la mesure martingale associée au processus $Y_{t+h} - Y_t$.

Posons alors :

$$N(t, y, \Gamma) = \overline{\lim_n}\, n E^{t,x}\left[\left(V\left(t+\frac{1}{n}, X_{\frac{1}{n}}\right) - V(t, X_0) - \int_0^{\frac{1}{n}} \alpha(s+t, X_s)ds\right) \times q^t_{\frac{1}{n}}(\Gamma)\right]$$

les égalités précédentes montrent que pour tout Γ, il existe une version de $\int_\Gamma \beta_x(t, u)S(t, X_{t^-}, du)$ indépendante de x et de la forme $N(t, X_{t^-}, \Gamma)$.

D'autre part, il est aisé de voir que $N(t, y, du)$ est un noyau sur

$$[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{B}(U)$$

et qu'il existe une constante C telle que pour tout Γ de $\mathscr{B}(U)$

$$N(t, y, \Gamma) \leqslant C \overline{\lim_n}\, E^{t,y}[q^t_{\frac{1}{n}}(\Gamma)] ;$$

or

$$nE^{t,y}[q^t_{\frac{1}{n}}(\Gamma)] = nE^{t,y}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} ds\, S(s + t, X_s, \Gamma)\right]$$

qui converge vers $S(t, y, \Gamma)$ lorsque n tend vers l'infini ; d'où pour tout t de $[0, T]$, y de R^d, Γ de $\mathscr{B}(U)$

$$N(t, y, \Gamma) \leqslant CS(t, y, \Gamma).$$

Nous en déduirons que le noyau $N(t, y, du)$ est absolument continu par rapport au noyau $S(t, y, du)$ et par suite qu'il existe une fonction mesurable $\beta(t, y, u)$ telle que

$$N(t, y, \Gamma) = \int_\Gamma \beta(t, y, u)S(t, y, du)$$

Ce qui montre que $\beta_x(t, u)$ admet pour tout u une version prévisible indépendante de x et de la forme $\beta(t, X_{t^-}, u)$.

Nous en déduisons que $V(t, X_t)$ admet une version c. à d. l. a. g. indépendante de x ; pour tout t de $[0, T]$

$$V(t, X_t) = V_0 + \int_0^t \xi(s, X_s)d\bar{M}_s + \int_0^t \int_U \beta(s, X_{s^-}, u)q(ds, du) + \int_0^t \gamma(s, X_s)ds.$$

Alors par une démonstration semblable à celle du théorème II.1.17 pour tout contrôle T markovien δ :

$$\gamma(t, X_t) + \xi(t, X_t)\phi^\delta(t, X_t) + \int_U \beta(t, X_t, u)(e^{\psi^\delta(t,X_t,u)} - 1)S(t, X_t, du) + \mathscr{C}^\delta(t, X_t) \geqslant 0$$

P^x p. s. ; et de plus :

δ^* est optimal si et seulement s'il y a égalité P^xp. s. pour $\delta = \delta^*$

Considérons l'ensemble N :

$$N = \left\{ t, x \mid \gamma(t, x) + \xi(t, x)\phi^{\delta}(t, x) + \int_{U} \beta(t, x, u)(e^{\psi^{\delta}(t,x,u)} - 1)S(t, x, du) + \mathscr{C}^{\delta}(t, x) < 0 \right\}$$

alors $P^{0,x}[X_t^{-1}(N_t)] = 0$ pour tout t de $[0, T]$ d'où

$$\int_0^T ds\, E^{0,x}[\mathbb{1}_N(t, X_t)]$$

est nul, nous en déduisons le théorème ■

Le théorème suivant qui répond aux deux premières questions est l'analogue du théorème II.2.3.

THÉORÈME III.2.4. — Sous les hypothèses introduites au paragraphe III.1 et si (H_5) est vérifiée, il existe un contrôle optimal T-markovien $\hat{\delta}$ tel que $\hat{\delta}(t, X_t)$ soit un contrôle optimal T-markovien pour toute loi $P^{0,x}$.

Preuve. — Par une démonstration analogue à celle de la proposition II.2.2 nous pouvons choisir une application $\hat{y}_1(t, x, p)$ (resp. $\hat{y}_2(t, x, q)$) qui soit mesurable et qui réalise le minimum de $\mathscr{H}'_1$ (resp. $\mathscr{H}'_2$)

Alors nous pouvons vérifier que :

$$\hat{\delta} = (\hat{y}_1(t, X_t, \xi(t, X_t)), \hat{y}_2(t, X_{t^-}, \beta(t, X_{t^-}, .)\sqrt{n(t, X_{t^-}, .)}))$$

est un élément de $\mathfrak{M}_T$ qui satisfait au problème ■

Le théorème suivant nous permet de répondre dans l'affirmative à la troisième question :

THÉORÈME III.2.5. — $J_D^x = \inf_{\delta \in \mathscr{D}_T} E_\delta^{0,x}[L_T^\delta]$ est égal à $J_M^x = \inf_{\delta \in \mathfrak{M}_T} E_\delta^{0,x}[L_T^\delta]$ pour tout x de $\mathbb{R}^d$. Ce qui montre bien que dans le cas markovien nous pouvons nous restreindre à la classe des contrôles markoviens.

Preuve. — $\mathscr{D}$ contenant $\mathfrak{M}$, J_M^x majore J_D^x pour tout x, par suite il suffit de montrer que $J_M^x \leqslant J_D^x$. Du théorème III.2.3, nous déduisons que pour tout t $P^{0,x}$ p. s. :

$$V(t, X_t) = J_M^x + \int_0^t \xi(s, X_s)d\bar{M}_s + \int_0^t \int_U \beta(s, X_{s^-}, u)q(ds, du) + \int_0^t \gamma(s, X_s)ds.$$

Par suite comme au paragraphe II.1.c pour tout contrôle δ de $\mathscr{D}_T$ nous obtenons $P_\delta^{0,x}$ p. s. :

$$W_t = V(t, X_t) = J_M^x + N_t^\delta + \int_0^t ds\Big[\gamma(s, X_s) + \xi(s, X_s)\phi(s, X_s, \delta^1(s)) + \int_U \beta(s, X_{s^-}, u)(e^{\psi(s,X_{s^-},\delta^2(s),u)} - 1)S(s, X_{s^-}, du)\Big]$$

où N_t^δ est une $P_\delta^{0,x}$ martingale; d'où :

$$J_M^x = - E_\delta^{0,x}\Big[\int_0^T ds\Big(\gamma(s, X_s) + \phi(s, X_s, \delta_s^1)\xi(s, X_s) + \int_U \beta(s, X_{s^-}, u)(e^{\psi(s,X_{s^-},u)} - 1)S(s, X_{s^-}, du)\Big)\Big]$$

Il suit alors du théorème III.2.3 *ii*) :

$$J_M^x \leqslant E_\delta^{0,x}\Big[\int_0^T ds\Big(c(s, X_s, \delta_s^1) + \int_U h(s, X_s, \delta_s^2, u)e^{\psi(s,X_s,\delta_s^2,u)}S(s, X_s, du)\Big)\Big] \leqslant J_D^x,$$

d'où le résultat ■

Supposons que dans le cas à horizon infini l'hypothèse (H_5') suivante soit réalisée :

(H_5') L'application qui a t, x de $\mathbb{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ fait correspondre

$$\inf_{\delta\in\mathfrak{m}} E_\delta^{t,x}\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha(t+s)}f(t + s, X_s)ds\Big]$$

est mesurable pour toute f bornée.

Cette hypothèse entraîne que l'hypothèse (H_5) est vérifiée pour tout T et $e^{-\alpha t}\mathscr{C}^\delta t, x)$. Alors comme au paragraphe III.3, des théorèmes précédents nous déduisons le résultat en contrôle markovien à horizon infini ; soit :

THÉORÈME III.2.6. — Sous les hypothèses introduites au paragraphe III.1 et si (H_5') est vérifiée, il existe un contrôle optimal $\hat{\delta}$ qui soit markovien, tel que $\hat{\delta}(t, X_t)$, t de $\mathbb{R}^+$, soit un contrôle optimal pour toute loi $P^{0,x}$.

§ 3. Compléments

A. HYPOTHÈSES (H_5') ET (H_5)

Si une fonction f est définie sur $[0, T]$ nous la prolongerons à $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = 0$ pour t n'appartenant pas à $[0, T]$ et nous la noterons ${}^Tf$. Pour tout δ de $\mathfrak{M}_1^T \times \mathfrak{M}_2^T$ nous pouvons définir une probabilité $P^{t,x}_{{}^T\phi^\delta, {}^T\psi^\delta}$ unique solution au problème des martingales $M(a, {}^{T}\phi^{\delta}, S, {}^{T}\psi^{\delta})$ partant de x à l'instant t et telle que : $dP^{t,x}_{T_{\phi}\delta, T_{\psi}\delta} = d^{T}P^{t,x}_{\delta}$ soit égale à $R_T . dP^{t,x}$ pour $t \leqslant T$. Alors nous avons :

$$E^{t,x}_{\delta}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^{\delta}(s + t, X_s)ds\right] = {}^{T}E^{t,x}_{\delta}\left[\int_0^{\infty} {}^{T}\mathscr{C}^{\delta}(s + t, X_s)ds\right]$$

ce qui nous permet d'unifier les hypothèses (H_5) et (H'_5)

THÉORÈME III.3.1. — Si le processus $(\Omega^{o}, F_t, \theta_t, X_t, {}^{T}P^{t,x}_{\delta})$ est fortement fellérien pour tout contrôle T-markovien, alors l'hypothèse (H_5) $(H'_5$ lorsque T est infini$)$ est vérifiée.

Preuve. — Si le processus est fortement fellérien pour tout contrôle T-markovien alors :

$${}^{T}E^{t,x}_{\delta}\left[\int_0^{+\infty} {}^{T}\mathscr{C}^{\delta}(s + t, X_s)ds\right]$$

est bicontinue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ (dans le cas T infini nous avons la bicontinuité de la résolvante $E^{t,x}_{\delta}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha(s+t)}f(s + t, X_s)ds\right]$ pour toute fonction mesurable bornée). L'hypothèse (H_5) (ou (H'_5)) se déduit alors immédiatement du théorème III.64 [*8*] qui indique que toute famille de fonctions S. C. S. sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ contient une sous-famille dénombrable admettant la même enveloppe inférieure. ■

Nous n'avons pas pris l'hypothèse de fortement fellérien comme hypothèse de départ, car elle n'est peut-être utile que par la méthode employée au théorème précédent. Nous obtenons ainsi par une méthode très probabiliste l'existence d'un contrôle optimal Markovien, de plus par rapport au travail de Bismut [*4*] nous montrons qu'un contrôle markovien est optimal parmi les contrôles admissibles. Suivant les hypothèses de Stroock [*21*] qui entraînent l'hypothèse d'un processus fortement fellérien, nous obtenons le résultat suivant :

COROLLAIRE III.3.2. — Si la matrice a est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, le vecteur $\phi(t, x, d_1)$ borné et pour tout Γ $S(t, x, \Gamma)$ continu en (t, x), alors il existe un contrôle optimal $\hat{\delta}$ qui soit markovien, tel que $\hat{\delta}(t, X_t)$ soit un contrôle optimal pour toute loi initiale.

REMARQUE III.3.3. — Si le processus $(\Omega^0, F^0_t, \theta_t, {}^{T}P^{t,x}_{\delta})$ est fortement fellérien pour tout δ T-markovien, $V(t, X_t)$ et $E^{t,X_t}_{\hat{\delta}}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^{\hat{\delta}}(s + t, X_s)ds\right]$ sont indistinguables, où $\hat{\delta}$ est un contrôle markovien optimal.

En effet :

pour tout t de $[0, T]$ $V(t, X_t)$ est majoré par $E_{\hat{\delta}}^{t,X_t}\left[\int_0^{T-t} ds\,\mathscr{C}^{\hat{\delta}}(s+t, X_s)\right]$ par hypothèse et à l'aide du principe d'optimalité :

$$V(t, X_t) = E_{\hat{\delta}}^{t,X_t}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^{\hat{\delta}}(s+t, X_s)ds\right] P^{0,x} \text{ p. s.}$$

$V(t, x)$ est S. C. S. et $E_{\hat{\delta}}^{t,x}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^{\hat{\delta}}(s+t, X_s)ds\right]$ est continue en x, d'où l'ensemble $\Gamma_t = \left[x \mid V(t, x) - E_{\hat{\delta}}^{t,x}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^{\hat{\delta}}(s+t, X_s)ds\right] < 0\right\}$ est un ouvert. Sauf pour un ensemble dénombrable de $[0, T]$, N, $X_t^{-1}(\Gamma_t)$ est aussi un ouvert (voir [*14*], appendice), d'où :

$$\bigcup_{t\in[0,T]} \{X_t^{-1}(\Gamma_t)\} = \bigcup_{N} \{X_t^{-1}(\Gamma_t)\} \cdot \bigcup_{t\in N} \{X_t^{-1}(\Gamma_t)\}.$$

Alors l'espace Ω^0 étant séparable, de tout recouvrement ouvert d'un ouvert nous pouvons en extraire un recouvrement dénombrable, par suite :

$$\bigcup_{t} \{X_t^{-1}(\Gamma_t)\} = \bigcup_{\substack{t\in[0,T] \\ \text{den}}} \{X_t^{-1}(\Gamma_t)\}$$

et

$$P^{0,x}\left[\bigcup_{\substack{t\in[0,T] \\ \text{den}}} (X_t^{-1}(\Gamma_t))\right] = P^{0,x}\left[\bigcup_{\text{den}} (X_t^{-1}(\Gamma_t)\right] = 0$$

$\hat{\delta}$ étant un contrôle markovien optimal, le résultat s'ensuit. ■

B. Contrôle markovien sans les hypothèses (H_5) (H'_5)

Si l'hypothèse (H_5) n'est pas réalisée nous ne pouvons pas définir la perte markovienne conditionnelle après t par $\inf_{\delta} E^{t,X_t}\left[\int_0^{T-t} \mathscr{C}^{\delta}(s+t, X_s)ds\right]$ car il n'y a plus mesurabilité, aussi nous sommes obligés de pratiquer comme dans le cas non markovien en utilisant l'ess-inf. Pour tout x on définit la perte conditionnelle comme une fonction de la forme $V_t^x(X_t)$. Nous pouvons alors trouver, Meyer [*19*] une version c. à. d. l. a. g. qui soit $\lambda^T \times P^{0,x}$ p. s. de la forme $f_x(t, X_t)$. Par suite les coefficients $\gamma(t, y)$, $\xi(t, y)$ et $\beta(t, y, u)$ du théorème III.2.3 dépendent de x, et en effectuant les raisonnements du paragraphe III.2 nous ne pouvons répondre dans l'affirmative qu'aux première et troisième questions.

THÉORÈME III.3.4. — Sous les hypothèses introduites au paragraphe III.1 pour toute loi initiale $P^{0,x}$, il existe un contrôle optimal δ_x qui soit markovien.

RÉFÉRENCES

[1] H. AIRAULT, H. FÖLLMER, Relative densities of semimartingales, *Inventiones math.*, t. **27**, 1974, p. 299-327.

[2] V. E. BENEŠ, Existence of optimal stochastic control laws, *S. I. A. M. J. Control.*, t. **9**, 1971, p. 446-472.

[3] V. E. BENEŠ, Existence of optimal strategies based on specified information, for a class of stochastic decision problems, *S. I. A. M. J. Control.*, t. **8**, 1970, p. 179-188.

[4] J. M. BISMUT, Contrôle des processus de sauts, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A-B, t. **281**, 1975, A 767-A 770.

[5] M. H. A. DAVIS, On the existence of optimal policies in stochastic control, *S. I. A. M. J. Control.*, t. **11**, 1973, p. 587-594.

[6] M. H. A. DAVIS, P. VARAIYA, Dynamic programming conditions for partially observable systems. *S. I. A. M. J. Control*, t. **11**, 1973, p. 226-261.

[7] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques*, Springer Verlag, 1972.

[8] C. DELLACHERIE, P. A. MEYER, *Probabilités et potentiels*, Édition refondue, chapitre 0 à IV, Hermann, 1975.

[9] C. DOLÉANS-DADE, Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales, *Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete*, t. **16**, 1970, p. 181-190.

[10] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear operators I, II*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[11] N. EL KAROUI, J.-P. LEPELTIER, Représentation des processus ponctuels multivariés à l'aide d'un processus ponctuel de Poisson, *Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete (à paraître)*.

[12] J. JACOD, Un théorème de représentation pour les martingales discontinues, *Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete*, t. **34**, 1976, p. 225-245.

[13] T. KOMATSU, Markov processes associated with certain integro-differential operators, *Osaka J. Math.*, t. **10**, 1973, p. 271-303.

[14] J.-P. LEPELTIER, B. MARCHAL, Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section B, t. **12**, 1976, p. 43-103.

[15] C. MAYER, Processus de Markov non stationnaires et espace-temps, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section B, t. **3**, 1968, p. 165-179.

[16] J. MÉMIN, *Conditions d'optimalité pour un problème de contrôle*, Journées du contrôle, Metz, mai 1976.

[17] P. A. MEYER, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg, p. 77-107. *Lecture Notes Mathematics*, 124, Springer, 1970.

[18] P. A. MEYER, Problème des martingales d'après Stroock-Varadhan. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg, p. 241-282. *Lecture Notes Mathematics*, 124, Springer, 1970.

[19] P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1969.

[20] C. STRIEBEL, *Martingale conditions for the optimal control of continuous time stochastic systems, International Work-shop on Stochastic Filtering and Control.* Los Angeles, Calif., mai 1974.

[21] D. STROOCK, Diffusion processes associated with Lévy generators, *Z. Wahrscheinlichkeits theorie*, t. **32**, 1975, p. 209-244.

(Manuscrit reçu le 14 janvier 1977).