ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Sur le support des lois indéfiniment divisibles dans les espaces vectoriels localement convexes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 1 (1977), p. 27-42
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_1_27_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIII, n° 1, 1977, p. 27-43. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur le support des lois indéfiniment divisibles dans les espaces vectoriels localement convexes

par

A. TORTRAT (*)
85, rue de Paris, 92190 Meudon

SUMMARY. — We study the support S of infinitely divisible laws μ (without gaussian component) in the non symmetric case, and of mixings of μ^t in the first case : $\mu = e(F)$ is defined without translations.

The main point is to get conditions such that S is additive (first case), or linear (the case with translations), and (if μ is weakly Radon) is generated by the support of F. Are improved all the results directly known for stable laws.

1. INTRODUCTION

La nature du support S ([0]) d'une loi gaussienne centrable, dans l'espace vectoriel X, pour une topologie l. c. $\mathscr{T}$, est assez claire lorsque, μ étant τ-régulière, l'espace autoreproduisant H_0 (relatif à la loi centrée $\mu_0 = \mu_{-m}$) est dans X. Mais cela fait intervenir l'équivalence $\mu_h \sim \mu$ ($h \in H_0$, μ_h loi de $\zeta + h$ si ζ est une v. a. de loi μ). On a $S = \bar{H}_0 + m$ (le trait désigne la fermeture). Lorsque H_0 n'est pas dans X, *ou* si μ n'est pas centrable (dans X), nous ne savons pas si (et comment) S est lié à $\overline{H_0 \cap X}$, bien qu'on ait toujours l'alternative $\mu_h \sim \mu$ ou $\mu_h \perp \mu$ suivant que $h \in H_0 \cap X$ ou non.

(*) Laboratoire associé au C. N. R. S. (n° 224) « Processus stochastiques et Applications ».

([0]) Nous entendons « support » au sens local (de Paul Lévy) : S est défini dès que μ l'est sur une base de $\mathscr{T}$-voisinages, nous n'imposons pas qu'il soit mesurable, *a fortiori* de mesure 1. $\mathscr{T}$ pourrait même n'être pas compatible avec la dualité : si $\mathscr{T}$ est métrisable, $S \in \mathscr{B}_\sigma$ et $\mu S = 1$ devient un *critère* de prolongement à la tribu $\mathscr{T}$-borélienne, cf. le th. 9 de [*10'*].

— C. Borell, en prouvant que toute loi gaussienne, et de Radon, μ, est convexe :

$$\mu_*(pA + qB) \geq \min(\mu A, \mu B), \qquad p + q = 1, \tag{1}$$

assure que S *est convexe*. L'hypothèse « μ de Radon » peut être levée (cf. [*6*] et ci-après), et ce résultat vaut *sans aucune autre hypothèse* que « les lois μ_y des v. a. réelles $y(.)$, $y \in Y$ dual de X, sont gaussiennes », et « μ peut être définie dans son support linéaire topologique E_0 » (cf. (4) ci-après), pour assurer la définition de S. La convexité de S peut aussi se déduire de (6) ci-après, ramenant au cas μ de Radon dans un espace de Banach.

— Savoir S convexe assure, suivant le théorème 5.1 de [*1*], que $S = E + a = E'$ ($a \in E_0$, $E_0 = E \oplus \{ta\}$) pour toute loi μ telle que

i) $\mu^*_{\mathscr{C}} E_0 = 1$,

ii) μ a une concentration scalaire > 0 sur S (alors S est non vide et $\mu^*_{\mathscr{C}} E' = 1$, (cf. (4') ci-après),

iii) les μ_y ont la droite réelle R entière pour support, ou sont impropres (après translation $-a$, se plaçant dans E_0, elles deviennent toutes propres).

Pour μ gaussienne, *i*) et *ii*) suffisent pour que $S = E + a$ et ne paraissent pas imposer que μ soit centrable dans X (: symétrique autour de $m \in X$).

— Cette convexité de S s'obtient (très simplement) pour les lois symétriques stables d'exposant $p \geq 1$ (cf. [*2*] et [*5*]). Cela suit de la relation

$$c\zeta + c'\zeta' \overset{\text{loi}}{=} (c^p + c'^p)^{1/p}\zeta, \quad c \text{ et } c' > 0, \text{ ind. de } \zeta' \quad \text{et} \quad \mu \text{ loi } \zeta \text{ et } \zeta', \tag{2}$$

et est valable pour $p = 2$, c'est-à-dire μ gaussienne *centrée*.

Mais pour le cas $p < 1$, avec μ *symétrique*, il faut faire appel à la structure $e(F)$ de μ, suivant l'initiative de Rajput B. S. dans [*5'*] ; ce travail est à l'origine des développements qui suivent, et nous remercions ici son auteur pour nous l'avoir adressé.

2. LE CENTRAGE DES LOIS

Pour la cohérence de ce texte nous rappelons ce qu'on sait sur le centrage :

Au sens strict, on dit que la loi μ, *ou* la probabilité cylindrique μ, du 1^er^ ordre (: les $y(.)$ sont μ-intégrables) est centrable si

$$m_y \overset{\text{def}}{=} \int y(x) d\mu = (y, m) \quad \text{avec} \quad m \in X. \tag{3}$$

Il est équivalent de dire que « μ_{-m} est centrée ».

Posons

(4) $$E_0 = \{ x : y(x) = 0 , \quad \text{toute} \quad y(.) \overset{\mu}{\sim} 0 \} ,$$

(4′) $$E' = \{ x : y(x) = a_y \quad \text{si} \quad \mu_y = \delta(a_y) \} , \qquad \delta \text{ loi de Dirac} .$$

LEMME 1. — On suppose que μ est une loi sur la tribu cylindrique $\mathscr{C}$ de X (non nécessairement du 1[er] ordre). Alors ($E_0 \supset E'$) si E' est non vide, en particulier si $\mu^*_{\mathscr{C}}E' > 0$, on a $E_0 = \{ ta \} \oplus E$, tout $a \in E'$, et

(5) $$\mu^*_{\mathscr{C}}E_0 = \mu^*_{\mathscr{C}}E' .$$

Preuve. — Il s'agit de prouver que $\mu^*_{\mathscr{C}}E'$ n'est pas $< \mu^*_{\mathscr{C}}E_0$ (la relation de « centrage » $E' = a + E$ est évidente si E' est non vide. Soit μ_0 la trace de μ sur E_0 ($\mu_0 E_0 = \mu^*_{\mathscr{C}}E_0$). Si E' non vide diffère de E_0, ayant choisi a, il existe $y(.)$ égale à 1 sur E′ et $\neq 1$ hors de E′, ce qui prouve E′ mesurable pour μ_0 et de même mesure que E_0.

DÉFINITION 1. — Nous dirons X réductible, pour μ, si $\mu^*_{\mathscr{C}}E_0$ égale 1. C'est dire qu'on peut se placer dans E_0 (complet si X l'est). Alors, si $\mu^*_{\mathscr{C}}E' > 0$, on peut après translation, obtenir les μ_y toutes propres.

Soit $\{ P_U \}$ une famille de semi-normes définissant $\mathscr{T}$ ($U = \{ x : p_U(x) \leq 1 \}$). Le quotient de E_0 par $\{ x : p_U(x) = 0 \}$ définit l'espace normé E_U, séparable (cf. [*11*], théorème 1.4), et les projections $x \to \pi_U x$ de E_0 sur E_U. U est, dans E_0, élément de la tribu cylindrique $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C} \cap E_0$, donc S est défini (pour la topologie $\mathscr{T}$) : s'il existe un prolongement de μ à la tribu $\mathscr{T}$-borélienne dans X, son support est dans E_0 et défini par μ_0 trace de μ *sur* $\mathscr{C}_0$ dans E_0. Dans X il suffit d'ailleurs de connaître μ sur $\mathscr{B}_\sigma$, tribu borélienne faible, pour avoir S, puisque $U \in \mathscr{B}_\sigma$, mais nous affaiblissons (1) (dans les énoncés qui suivent) cette hypothèse en supposant X réductible. On a (cf. [*11*])

(6) $$S = \cap\, \pi_U^{-1} S_U,\ S_U \qquad \text{support de la loi projection } \pi_U \mu = \mu_U .$$

Nous étudierons donc S sans savoir s'il est mesurable (*a fortiori* s'il est de mesure 1). Par contre on a toujours $\mu_U S_U = 1$.

PROPOSITION 1. — Soit μ une probabilité cylindrique du 1[er] ordre et $m_y = \displaystyle\int_X y(x) d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_R t d\mu_y(t)$. On suppose que

(1) Par rapport à « μ est faiblement τ-régulière dans X ».

i) m_y est continue pour la topologie $\mathscr{T}^0$ définie dans Y par la CV. en mesure des v. a. $y(.)$,

ii) μ est scalairement concentrée suivant des compacts faibles convexes.

Alors μ est centrable : satisfait à (3).

Si (X, $\mathscr{T}$) est complet ([2]), l'hypothèse *ii)* est inutile si μ est une loi sur $\mathscr{C}$ et X réductible pour μ, et il suffit que *i)* soit vrai pour les lois $\tilde{\mu}_U$ induites par les μ_U dans les Banach $\tilde{E}_U$ (complétés des E_U).

Preuve :

A) i) signifie que, ξ_y désignant la v. a. $y(.)$, on a $|m_y| \leq 1$ pour toute y telle que $\mu\{|\xi_y| > \eta\} \leq \varepsilon$ (*un* couple (η, ε) convenable). Si K est un compact absolument convexe pour lequel la concentration *scalaire* de μ est $\geq 1 - \varepsilon$, cela veut dire que

$$\sup_K y(.) \leq 1/n \Rightarrow \mu\{|\xi_y| \leq 1/n < \eta\} \geq 1 - \varepsilon,$$

et implique $|m_y| \leq 1$ si $1/n < \eta$. Cela assure bien la τ-continuité de m_y dans Y.

B) $\tilde{\mu}_U$ étant toujours de Radon, les m_U (compatibles) existent dans les $\tilde{E}_U$ et leurs voisinages respectifs définissent un filtre de Cauchy *dans* E_0 (complet avec X), d'où $m \in E_0$.

On notera que l'hypothèse *i)* est un affaiblissement notable de la condition $\|\xi_y\|_1 \to 0$ si $y \overset{\mathscr{T}^0}{\to} 0$.

Pour l'exposant 2 et μ du 2ᵉ ordre, cette condition exprime le « cotype 0 » de μ dans l'espace auto-reproduisant (dans R^T, T base algébrique de Y).

3. LE « CENTRAGE » DES LOIS STABLES ET DES LOIS e(F)

Vu (6) il nous suffira le plus souvent de considérer un espace de Banach X, séparable en ce qui concerne l'étude de S.

DÉFINITION 2. — Dans X espace de Banach séparable (alors $\mathscr{C}$ est la tribu borélienne) nous dirons la *loi* $\mu = e(F)$ α-centrée si sa f. c. (: transformée de Fourier) s'écrit ($|x|$ *norme* de x)

$$(7) \quad \operatorname{Log} \hat{\mu}(y) = \int \{ e^{i(y,x)} - 1 - i(y,x) 1_{B_\alpha} \} \, dF(x), \quad \text{avec} \quad B_\alpha = \{ x : |x| \leq \alpha \},$$

([2]) Cf. [*6*] pour une variante dont nous nous sommes inspirés. La condition *i)* équivaut à (3.3) de [*6*]. Dans le cas complet notre énoncé est essentiellement celui de [*6*] (proposition 3). Nous l'allégeons conformément à la note ([0]) et à notre énoncé (th. 1.4 de [*11*]) de la proposition 1 de [*6*].

On sait suivant [*13*] que, $F_{\eta\alpha}$ désignant la restriction de F à

$$B_{\eta\alpha} = B_\alpha - B_\eta \ (\eta < \alpha),$$

on a

$$(8) \quad e(F_{\eta\alpha})\delta(a_{\eta\alpha})e(F_{\alpha\infty}) \underset{n\to 0}{\longrightarrow} \mu, \quad \text{avec} \quad (y, a_{\eta\alpha}) = -\int_{B_{\eta\alpha}} y(x)dF, \ a_{\eta\alpha} \in X,$$

au sens de la convergence (: CV.) en loi dans le Banach X.

On sait aussi que toute loi μ à μ_y indéfiniment divisibles, définit F de Radon hors des B_α, mais $\int_{B_1} |x|^2 dF < \infty$ n'est ni nécessaire ni suffisant ([3]). Par contre $\int_{B_1} |x| dF < \infty$ suffit à l'existence ([3']) de $\mu = e(F)$ définie par (7) (satisfaisant donc à (8)), dans tout espace de Banach. Rappelons que les lois de (8) forment une famille « tendue » (: portée à ε par des K_ε indépendants de η).

Proposition 2. — Si

i) X est complet et séparable, *ou* μ prolongeable en une loi faiblement de Radon,

ii) μ est une loi sur $\mathscr{C}$, à μ_y stables, d'exposant commun $p \neq 1$.

Alors μ est « centrable » : il existe $m \in X$ tel que μ_{-m} vérifie (2) (: est strictement stable). Une fois centrée $\hat{\mu}$ s'écrit comme en (7) *avec* $\alpha = 0$ pour $p < 1$ (ou $p = 1$ mais μ symétrique), $\alpha = \infty$ pour $p > 1$ ([4]).

Preuve. — Suivant la preuve du théorème 5 de [*3*], on a

$$c\xi_y + c'\xi'_y \overset{\text{loi}}{=} c''\xi_y + a_y,$$

avec $c''^p = c^p + c'^p$, et $a(y)$ fonction linéaire séquentiellement faiblement continue dans Y, donc faiblement continue dans chaque U^0 (compact

([3]) Hors le cas X de Hilbert, cf. [*2'*]. Dans les conditions de [*9*], $\int_{B_1} |x|^2 dF$ fini est nécessaire, mais c'est seulement $\int_{|x|_K \leq 1} |x|_K^2 dF$ fini qui suffit, avec FK^c fini. Cela revient à dire, prenant F nulle hors de K, que $e(F)$ est portée par l'espace hilbertien $H = U n K$, cas très particulier, souvent impossible : exemple, dans $\mathscr{C}[0, 1]$, toutes les lois qui dans leur espace autoreproduisant sont de cotype 0.

([3']) Ce résultat de [*13*] vaut sans l'hypothèse X réflexif qui intervient implicitement dans la preuve de l'auteur. La preuve, présentée de façon plus simple, est aussi dans [*2'*], théorème 1.

([4]) Sans préjuger de la définition de F qu'on peut considérer comme une mesure cylindrique. Pour le cas μ faiblement de Radon et une signification analogue à (8), cf. [*12*].

faible métrisable si (X, $\mathscr{C}$) est séparable). Si X est complet, cela assure la τ-continuité de $a(y)$, suivant le critère de Banach-Grothendieck. Alors on a $c\xi + c'\xi' \overset{\text{loi}}{=} c''\xi + a(c, c')$ (nous complétons la note 3 de [*12*]. Pour le cas faiblement de Radon cf. [*8*]. Que μ devienne strictement stable par une translation convenable est immédiat (cf. [*3*], [*12*]). L'expression (7) de Log $\hat{\mu}(y)$ (avec $\alpha = 0$ ou ∞) est alors une propriété des lois stables dans R.

4. LEMMES GÉNÉRAUX SUR LES SUPPORTS

LEMME 2. — Si les S_U de (6) sont convexes, ou stables pour l'addition (vectorielle) ou les homothéties de rapport $t \in \Lambda$ partie de R, il en est de même pour S.

LEMME 3. — Pour que les S_U aient une des propriétés qui précèdent, il est nécessaire et suffisant qu'il en soit ainsi pour les $\tilde{S}_U$ supports des lois μ_U de Radon dans les $\tilde{E}_U$ (on a $S_U = \tilde{S}_U \cap E_U$).

LEMME 4. — Soit G une mesure bornée, $\mu = e(G)$ la loi $e^{-g} \sum_0^\infty \frac{G^n}{n!}$ (g = GX est la variation totale de G). Alors

a) Le support S de μ est la réunion de 0 et du semi-groupe additif fermé engendré par le support S_G de G. Ce demi-groupe égale la réunion des supports $\overline{S_G^n}$ des G^n.

b) L'ensemble Λ_S des homothéties pour lesquelles S est stable (: $tS \subset S$) contient celui relatif au support de G.

Preuves immédiates. — Précisons qu'au lemme 4 on peut supposer G donc μ) τ-régulière pour $\mathscr{C}$ (G et μ définies sur $\mathscr{B}$ tribu $\mathscr{C}$-borélienne) pour la définition univoque des convoluées G^n, *ou* se placer dans E_0 avec la seule hypothèse $G^*_{\mathscr{C}}E_0 = 1$.

COROLLAIRE. — Les lois μ^t ($\mu = e(G)$) ont même support.

PROPOSITION 3. — *a*) Dans tout espace topologique complètement régulier la convergence $\mu_\alpha \to \mu$ entre lois définies sur la tribu borélienne entraîne entre leurs supports S_α et S, si μ est τ-régulière, la relation

$$S \subset \overline{\underline{\lim}\, S_\alpha}, \tag{9}$$

la lim inf dans (9) étant entendue au sens topologique ($x \in \underline{\lim}\, S_\alpha$ si tout voisinage de x coupe tous les S_α d'un élément du filtre).

b) Si, dans X vectoriel [5], la convolution infinie dénombrable des lois ν_n de Radon : $\mu = \lim v'_n$, avec $v'_n = v_1, \ldots, v_n$, est tendue (: les v'_n sont à ε près portées par un même compact K_ε), on a $S \supset \overline{\lim}\, S_n$ (S_n support de v'_n) donc S est la fermeture tant de lim inf S_n que de lim sup S_n.

Preuve de a). — Si $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{C}$-voisinage ouvert de $x \in S$, on a $\underline{\lim}\ \mu_\alpha\mathcal{O} \geq \mu\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ coupe bien tous les S_α pour lesquels, par exemple $\mu_\alpha\mathcal{O} \geq \mu\mathcal{O}/2$.

Preuve de b). — Si les ζ_n sont des v. a. indépendantes de lois ν_n, il est connu que $\zeta = \sum_1^\infty \zeta_n$ converge en probabilité. Soit V un $\mathcal{C}$-voisinage de 0 et $U + U \subset V$. Pour $n \geq N_U$, on a $P\left\{ \sum_{n+1}^{\infty} \zeta_i \in U \right\} > 0$. Si $x \in S_{n_i}$, $n_i \uparrow \infty$, les $U + x$ sont de ν_{n_i}-mesures > 0, donc également les $V + x$ pour la loi μ de ζ, ce qui prouve l'assertion.

5. LOIS e(F) « SANS TRANSLATION »

Nous dirons que μ est une telle loi si, X étant réductible pour μ, comme pour les lois strictement stables d'exposant $p \geq 1$ (*ou* $p = 1$ mais symétrique), on a

$$\text{Log}\ \hat{\mu}(y) = \int (e^{i(y,x)} - 1)dF\,, \tag{10}$$

F définie sur l'algèbre cylindrique, l'intégrale étant, si besoin, entendue en un sens symétrique au voisinage de 0.

Alors les mesures $\tilde{F}_U$ induites par les mesures cylindriques projections F_U, dans les espaces de Banach $\tilde{E}_U$ sont de Radon (bornées à distance positive 0), suivant les propriétés rappelées ci-dessus (après (8)), appliquées aux $\hat{\mu}_U$. Mais on ne sait pas en général si on a (F_η pour $F_{\eta\infty}$), *sans* les translations de (8),

$$e(\tilde{F}_U) \underset{n \to 0}{\longrightarrow} \tilde{\mu}_U\,. \tag{11}$$

On ne sait pas non plus si F_U existe comme loi *dans* E_U.

Proposition 4. — Si la loi μ est, cylindriquement, définie par (10), avec

---

[5] Ou X groupe topologique — même non abélien — à condition que la loi limite μ ne soit invariante par aucune translation à droite.

$FX = \infty$, et X réductible pour μ, et si elle vérifie (11) pour chaque Banach $\tilde{\tilde{E}}_U$, alors le support S de μ contient 0 et

i) est un demi-groupe additif fermé,

ii) est stable pour les homothéties $t \in \Lambda \subset R$, s'il en est ainsi de tous les supports des $\tilde{F}_U$,

iii) est *le* demi-groupe additif fermé engendré par S_F, $\mathscr{C}$-support de F, si μ est faiblement de Radon.

Preuve :

A) Il suffit pour *i*) et *ii*), de les prouver dans les Banach $\tilde{\tilde{E}}_U$, pour les supports $\tilde{\tilde{S}}_U$ des $\tilde{\mu}_U$ (vu $S_U = E_U \cap \tilde{\tilde{S}}_U$ et (6)). Notons que $\tilde{F}_U$ peut être bornée dans $\tilde{\tilde{E}}_U - \{ 0 \}$, en ce cas c'est le lemme 4 qui assure *i*) et *ii*). Sinon la proposition 3 et (11) nous disent que pour toute suite $\eta_n \downarrow 0$ (une suffit !) $\tilde{\tilde{S}}_U$ est la fermeture commune de $\underline{\lim}\ \tilde{\tilde{S}}_{U\eta_n}$ et $\overline{\lim}\ \tilde{\tilde{S}}_{U\eta_n}$, $\tilde{\tilde{S}}_{U\eta_n}$ étant lié à $\tilde{F}_{U\eta_n}$ comme l'indique le lemme 4. Or $\tilde{\tilde{S}}_{U\eta_n} \uparrow$ avec *n*, et le support de $\tilde{F}_{U\eta_n} \uparrow$ celui de $\tilde{F}_U$. C'est assurer *i*), *ii*) et *iii*) pour $\tilde{\mu}_U$ donc pour μ_U.

Si μ est faiblement de Radon dans X, on peut se placer dans E_0 (fermé) où elle est encore telle. F est définie (cf. [*9*] et [*4*]) et unique (cf. [*12*]), faiblement de Radon dans $X - \{0\}$ et $E_0 - \{0\}$. Dans E_0 son support S_F *pour* $\mathscr{C}$ est défini (et contient 0). Les supports S^U des F_U le sont également (F_U est faiblement de Radon *dans* E_U), et S_F vérifie (6), égale $\cap\, \pi_U^{-1} S^U$ (on peut ajouter 0 à S^U si F_U est bornée, dans $E_U - \{ 0 \}$, ce n'est pas nécessaire car une des $F_U \{ E_U - 0 \}$ au moins est infinie).

B) Si $x \in \Sigma(S_F)$, demi-groupe engendré par S_F, chaque $x_U = \pi_U x \in \Sigma(S^U) \subset S_U$. Donc S contient $\Sigma(S_F)$.

Réciproquement, notons que S_U est la fermeture de $\pi_U S$ (de même avec S^U et S_F) car si un point x_U de E_U est hors de $\pi_U S$, il y a une boule $B_\eta(x_U) = \{ \mid x - x_U \mid < \eta \}$, dans E_U telle que le cylindre $\pi_U^{-1} B_\eta(x_U)$ ne coupe pas S donc est μ-nul, donc B_η ne coupe pas S_U.

Si $x \in S$, chaque x_U adhère à $\Sigma(S)$ donc à $\Sigma(\pi_U S_F) = \pi_U \Sigma(S_F)$. C'est dire que chaque $\eta U + x$, dans E_0, coupe $\Sigma(S_F)$, donc S est dans l'adhérence de $\Sigma(S_F)$.

Corollaire (Rajput). — Si μ est indéfiniment divisible et symétrique, dans X réductible pour μ, S est un groupe additif ; celui engendré par le support de F, si μ est faiblement de Radon. En effet, (10) et (11) sont satisfaites.

Proposition 5. — On suppose que dans X espace de Banach séparable, μ est une *loi* $\in$ (10) (on peut la dire « cylindriquement » sans translation, par opposition à (11)). On suppose qu'il existe un disque (5') compact (pour la norme) tel que soient vraies

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{FK}^c < \infty$$

$$\text{(13)} \qquad \int_{\mathrm{K}} p_{\mathrm{K}}(x) d\mathrm{F} < \infty .$$

Alors $e(\mathrm{F}_{\eta\infty}) \underset{n \to 0}{\longrightarrow} \mu$ (au sens de la convergence, tendue, des lois dans X (6)).

Preuve. — La preuve est exactement celle donnée dans [*12*] pour les lois strictement stables d'exposant $p < 1$. Elle repose sur le fait que (13) assure l'uniforme τ-continuité des f. c. $\hat{\nu}_\eta(y)$ des lois $\nu_n = e(\mathrm{F}_{\eta 1})$, et de même pour une famille $\{ \nu_\eta * \delta(a_\eta) \}$ équitendue *qu'on sait exister* (pour des a_η convenables). On en déduit que $\{ a_\eta \}$ est relativement compact, donc que la famille $\{ \nu_\eta \}$ est aussi équitendue.

THÉORÈME 1. — Soit μ une loi strictement stable d'exposant $p < 1$, dans X réductible ($\mu^*_{\mathscr{C}}\mathrm{E}_0 = 1$, E_0 défini par (4)). Alors le $\mathscr{C}$-support défini dans X par μ, pour une topologie $\mathscr{C}$ localement convexe, est un cône convexe fermé contenu dans E_0. C'est E_0 si et seulement si aucune des lois μ_y n'a son support borné d'un côté (à droite *ou* à gauche) : il n'existe pas un demi-espace $\{ x : y(x) \geqslant 0 \}$ (*une* $y(.)$) qui porte μ ou F (donc F ou μ).

Preuve. — Pour μ strictement stable d'exposant $p < 1$, (12) et (13) sont vérifiées pour tout disque borné de μ-mesure positive. Dans les $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{U}}$, pour μ_{U} un tel disque K-compact pour la norme existe toujours. On a

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{U}}(d\tau \times d\rho) = \tilde{\sigma}_{\mathrm{U}}(d\tau) \frac{d\rho}{\rho^{1+p}},$$

τ parcourant $\{ p_{\mathrm{K}}(x) = 1 \}$. Ainsi $\tilde{\mathrm{S}}^{\mathrm{U}}$ est un cône : admet toutes les homothéties ≥ 0. La proposition 4 *i*) et *ii*) assure donc que S est un cône convexe.

Suivant le théorème 5.1 de [*1*] rappelé au n° 1 (ici μ strictement stable assure que les a_y de (4') sont nuls), si aucune μ_y n'est unilatère (μ_y strictement stable, $p < 1$, a pour support R_+, R_- ou R toute entière, il faut exclure le cas unilatère), $\mathrm{S} = \mathrm{E}_0$. Il est clair que sinon un demi-espace porte μ et F, que S ne peut égaler E_0. On voit que, parce que S est convexe, il n'est nullement nécessaire (mais il suffit) que les supports des $\tilde{\sigma}_{\mathrm{U}}$ (soit, ici, ceux des $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{U}}$) soient symétriques, seulement qu'ils aient un point dans chaque demi-espace ouvert : $\{ x : y(x) > 0 \}$.

(5') Ensemble équilibré et convexe ou « absolument convexe » : a. c.

(6) Comme dans (11), convergence des intégrales des fonctions continues bornées.

6. MÉLANGES DES $\mu^t = e(t\mathrm{F})$ « SANS TRANSLATION »

Supposons que la loi $\mu = e(\mathrm{F})$ réponde à la proposition 4 *iii)* : elle est faiblement de Radon et vérifie (10). Alors on sait μ^t défini et continu (cf. [*7*], p. 243), c'est dire que $e(t\mathrm{F})$ existe avec les mêmes propriétés que μ, et *même* support S que $\mu = \mu^1$, pour tout $t > 0$. Alors tout mélange

$$(14) \qquad \nu = \int_{[0,\infty[} \mu^t \rho(dt)$$

a encore S pour support (si $\rho(0) > 0$, $\mu^0 = \delta(0)$, la composante $\rho(0)\,\mu^0$ de ν a son support dans S).

ν ne vérifie plus (10) en général, à moins que ν ne soit indéfiniment divisible : $\nu = e(\mathrm{F}_0)$. En ce cas (cf. [*10*]) on a

$$(14') \qquad \mathrm{Log}\, \hat{\nu}(y) = \int (e^{i(y,x)} - 1) d\mathrm{F}, \ \mathrm{F}(dx) = \int_{[0,\infty[} \mu^t(dx) d\mathrm{F}_0(t).$$

Dans (14') l'intégrale doit être entendue, au voisinage de $y = 0$, au sens symétrique (cf. [*10*], p. 228).

Proposition 6. — Si $\int t d\mathrm{F}_0(t)$ est fini et si μ est strictement stable d'exposant $p \leq 1$, faiblement de Radon, alors le mélange $\nu = \int \mu^t d\rho$ ($\rho = e(\mathrm{F}_0)$) vérifie (11), (12) et (13) dans chaque espace de Banach $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{U}}$.

Preuve. — Il suffit de supposer l'espace X de Banach et séparable. Si K est un disque compact μ-positif, et C la constante de De Acosta (cf. [*2*], et (15) de [*12*]), on a

$$\mathrm{F}(\mathrm{K}^c) = \int_{]0,\infty[} \mu(t^{-1/p}\mathrm{K}^c) d\mathrm{F}_0(t) \leq \mathrm{C} \int t d\mathrm{F}_0(t).$$

De même $\| x \|$ désignant $p_{\mathrm{K}}(x)$, on a

$$(15) \qquad \int_{\mathrm{K} \times]0,\infty[} \| x \| \, d\mu^t(x) d\mathrm{F}_0(t) = \int_{\|x'\| \leq t^{-1/p}} t^{1/p} \| x' \| \, \mu(dx') d\mathrm{F}_0(t),$$

avec $x' = x/t^{1/p}$, et

$$\int_{]0,t^{-1/p}]} \| x \| \, d\mu^t(x) d\mathrm{F}_0(t) = \int_0^{t^{-1/p}} \theta \mathrm{G}(d\theta) \ (\text{avec } \mathrm{G}[\theta, \infty[= \mu\{\theta \mathrm{K}^c\} \leq \mathrm{C}\theta^{-p})$$

$$\leqslant t^{-1/p}\mathrm{G}(t^{-1/p}) + \int_0^{t^{-1/p}} \mathrm{G}(\theta) d\theta \leq t^{-1/p}(1 + \mathrm{C}t);$$

on en déduit la majoration cherchée : $\int (1 + Ct)dF_0(t)$ pour (15) (soit (13) pour ν : le F de (14')).

Remarque 1. — Les $y(.)$ ne sont pas intégrables pour μ donc pour ν, *a fortiori* $|x|$ et $\|x\| \geq |x|/C'$, ne le sont pas, ce qui explique la condition $\int t dF_0(t) < \infty$. Si elle n'est pas satisfaite, (11) ne le sera pas en général, bien que $S_\nu = S_\mu$ garde les propriétés que la proposition 4 assure à μ. Voici un exemple où la loi ρ du mélange peut être absolument quelconque sans altérer (10) : supposons que μ soit une probabilité cylindrique à μ_y (lois des $y(.)$ pour μ) symétriques et strictement stables (d'exposant $p \leq 1$), soit

$$\operatorname{Log} \hat{\mu}(ty) = -|t|^p \psi(y), \qquad \psi(y) = \psi(-y).$$

Alors *tout* mélange $\nu = \int_{[0,\infty[} \mu^\theta \rho(d\theta)$ de ces probabilités cylindriques est permis, car il en est ainsi dans R : les lois ν_y appartiennent à la classe $\mathscr{I}^P(R)$ des lois symétriques dont toutes les puissances (telles ν_y^θ, $\theta > 0$) ont des f. c. convexes pour $t > 0$: appartiennent à la classe de Polya. Cette propriété équivaut à la convexité (pour $t > 0$) de $\operatorname{Log} \hat{\nu}_y(t)$, vérifiée par $-|t|^p$. On a

$$\hat{\nu}(y) = \int_{[0,\infty[} e^{-\theta^p \psi(y)} \rho(d\theta). \tag{16}$$

Ainsi on a la

PROPOSITION 7. — Soit μ une loi stable symétrique d'exposant $p \leq 1$, donnée sur la tribu cylindrique $\mathscr{C}$ de $(X, \mathscr{T})$, avec X réductible pour μ ($\mu^*_{\mathscr{C}}E_0 = 1$, $E_0 \in (4)$). On suppose que les μ^t sont σ-additives sur les sous-tribus $\mathscr{B}_U$ de $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C} \cap E_0$ relatives aux projections π_U (: les μ^t_U sont des lois dans les E_U), cela suffit à définir leur $\mathscr{T}$-support.

Alors le $\mathscr{T}$-support de *tout* mélange $\nu = \int \mu^t d\rho(t)$ égale le $\mathscr{T}$-support E_0 commun à toutes les μ^t.

7. LOIS e(F) « AVEC TRANSLATION »

Les lois strictement stables d'exposant $p > 1$ rentrent dans ce cas, et (2) donne aisément que le support S est stable pour l'addition et les homothéties de rapport $t > 1$, résultat que nous retrouverons (comme cas particulier).

THÉORÈME 2. — Soit, dans X espace de Banach séparable, une loi $\mu = e(\mathrm{F})$ où F se décompose ainsi :

$$(17) \quad \begin{cases} \mathrm{F}(d\tau \times d\rho) = \sigma(d\tau)\mathrm{F}_0(d\rho), \quad \text{avec} \quad |\tau| = 1, x = \tau \times \rho, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma \text{ bornée sur } |x| = 1, \\ \mathrm{F}_0 \text{ est sans atomes, } \displaystyle\int_0^1 \rho d\mathrm{F}_0 = \infty, \text{ support de } \mathrm{F}_0 = [0, \infty[. \end{cases}$$

On pose $a = \int \tau\sigma(d\tau)$ (intégrale de Bochner sur la frontière de la boule unité de X).

Alors S_α étant le support de μ α-centrée (cf. (8)),

i) S_α est stable pour l'addition et toutes homothéties de rapport $t > 1$,

ii) S_α décroît avec α et $\mathrm{S}_\alpha - ta = \mathrm{S}_{\alpha'}$ pour un $\alpha'(t, \alpha) < \alpha$, et tout $t > 0$.

On peut faire $\alpha = +\infty$ si $\int_1^\infty \rho d\mathrm{F}_0$ est fini.

Preuve. — Fixons α pour alléger les notations. Notons que (8) définissant μ comme une convolution dénombrable, la proposition 3 s'applique.

$x \in \mathrm{S}$ si et seulement tout $\mathrm{U}(x) = \mathrm{U} + x$, contient pour tout η assez petit (une infinité $\eta_k \searrow 0$ suffit) des points $\sum_1^{\mathrm{I}} x_i - c_\eta a$, avec $x_i \in \mathrm{S}_\mathrm{F}$ (support de F), $|x_i| > \eta$, $c_\eta = \int_{\eta < \rho \leq \alpha} \rho d\mathrm{F}_0$.

Fixons $t > 1$ et η. On a $tc_\eta = c_{\eta'}$ avec $\eta' < \eta$ donc

$$t\left(\sum_1^{\mathrm{I}} x_i - c_\eta a\right) = \sum_1^{\mathrm{I}} tx_i - c_{\eta'} a, \quad \text{avec} \quad |x_i| > \eta'.$$

Ainsi le voisinage $t\mathrm{U}$ de tx coupe une infinité de supports de $e(\mathrm{F}_{\eta\infty})\delta(a_{\eta\alpha})$, s'il en est ainsi de $\mathrm{U}(x)$: $tx \in \mathrm{S}$.

Puisque $2c_\eta = c_{\eta'}$, $\eta' < \eta$, on voit de même que $2\mathrm{U}(x + x')$ coupe une infinité des supports susdits s'il en est ainsi de $\mathrm{U}(x)$ et $\mathrm{U}(x')$. Cela prouve *i*).

Le même raisonnement montre que S_α admet toutes les translations $-ta$, $t > 0$, ce qui nous explique que tous les S_α puissent être stables pour l'addition : $\mathrm{S}_{\alpha'} = \mathrm{S}_\alpha - t_{\alpha\alpha'} a \subset \mathrm{S}_\alpha$ si $\alpha' < \alpha$ (la stabilité de S_α entraîne celle de $\mathrm{S}_{\alpha'}$ car

$$x' \text{ et } y' \in \mathrm{S}_{\alpha'} \Rightarrow x' = x - ta,\ y' = y - ta,\ x,\ y \in \mathrm{S}_\alpha \Rightarrow x + y - ta = z \in \mathrm{S}_{\alpha'}$$

et

$$x' + y' = z - ta \in \mathrm{S}_{\alpha''} \in \mathrm{S}_{\alpha'}).$$

THÉORÈME 3. — Dans les conditions du théorème 2, on suppose que le support S_F est convexe (c'est donc un cône convexe fermé) et on ne suppose plus F_0 continue.

Alors S_α, support de $\mu = e(F)$, α-centrée ($\alpha = +\infty$ est permis *si* $\int_1^\infty \rho dF_0$ est fini), égale le support linéaire topologique E_0 commun à μ et F (défini par (4)), c'est-à-dire X réduit.

Preuve :

A) Fixons $\tau \in S_\sigma$ support de σ et considérons la section du cône $C = S_F$ par la demi-droite $\tau + \theta(a - \tau)$, $\theta \geq 0$. S étant convexe, $a \in C$. Nous voulons montrer que a est intérieur au segment obtenu.

Considérons pour cela $y_0 \in Y$, égale à t en ta, et à 1 en τ, et posons $E = \{ x : y_0(x) = 0 \}$. La section C' de C par $E + a$ étant convexe et fermée, si a était point frontière de C', (sur la demi-droite sus-dite) il existerait y nulle en a et ≤ 0 sur $C' - a$, donc ≤ 0 sur C' et C ($\{ y'(x) = 0 \}$ est hyperplan tangent à C suivant $\{ ta \}$). Alors $y'(a_\eta) = 0$ ne saurait être l'intégrale de $y'(x)$ pour $F_{\eta\alpha}$ sans que $y'(x)$ soit p. s. nulle pour σ donc F et μ (ce qu'on peut exclure en réduisant X).

B) Soit donc $t'\tau'$ ($|\tau'| = 1$) le point frontière sur la droite (τ, a), du côté de a (par rapport à τ). Le support de $e(F_\eta)_\infty \, \delta(a_\eta)$ contient le point $\eta\tau - c_\eta a$. Mais a s'écrit $\theta\tau + \theta'\tau'$ avec θ et $\theta' > 0$, et le support de $e(F_\eta)$ contient $D_\eta = \{ t\tau + t'\tau'$, avec t et $t' > \eta$ ou $= 0 \}$. Pour t réel donné, $t\tau$ appartient à $D_\eta - c_\eta a$ dès que $t > \eta c_\eta \theta$, donc assurément pour tout η assez petit. Ainsi le support S_α contient C et $-$ C. Il est additif si F_0 est continue (le th. 2), mais cette hypothèse est inutile, car la méthode même que nous venons d'employer s'applique au point $t\tau + t_1\tau_1$ au lieu de $t\tau$ (seule la figure est moins simple). Ainsi S_α contient le vectoriel engendré par S_F, qui, fermé, n'est autre que E_0.

COROLLAIRE 1. — Le théorème 3 vaut encore si le support S_G est une *somme finie* de cônes convexes C_i.

COROLLAIRE 2. — Le théorème 3 vaut encore si on suppose que, S_F *restant un cône convexe*,

$$F(d\tau \times d\rho) = \sigma(d\tau)F_\tau(d\rho),$$

sous les conditions suivantes $\left(i) \text{ nécessite que } \int_{|x| \leq 1} |x| \, dF \text{ soit infini} \right)$:

i) $a_\eta = \int_{\eta < \rho \leq \alpha} xF(dx)$ a une norme qui $\to \infty$ lorsque $\eta \to 0$, *ii*) Pour chaque τ fixé, l'angle de a et τ'_η défini par a_η comme τ' l'est par a dans la preuve du théorème 3, a une lim sup > 0 lorsque $\eta \to 0$.

THÉORÈME 4. — On suppose X hilbertien, F décomposée comme au théorème 3 et portée par une *somme* $\sum_1^\infty C_i$ de cônes convexes C_i de « barycentres » (pour F) orthogonaux en ce sens :

$$\int_{\tau \in C_i} \tau\sigma(d\tau) = t_i a_i \quad \text{avec} \quad (t_i > 0, |a_i| = 1)\ a_i \in \text{base de } C_i = S_\sigma \cap C_i,$$
$$\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Alors on a toujours $S_\alpha = E_0$.

Preuve. — Désignons par E_i les espaces vectoriels engendrés par les supports C. Soit

$$x = \sum_1^I x_i, \qquad x_i \in E_i.$$

La translation a_η égale $\sum_1^\infty a_{\eta i}$, avec $a_{\eta i} = -c_\eta t_i a_i$, $c_\eta = \int_{\eta < \rho \leq \alpha} \rho dF_0$.

On sait que pour η assez petit, x appartient au support de

$$e\left(\sum_1^I F_{i\eta}\right)\delta\left(\sum_1^I a_{i\eta}\right).$$

La distance $d(x, S_\eta)$ de x au support de $e(F_\eta)\delta(a_\eta)$ est donc $\leq$ celle de 0 au support de $e(F^I_\eta)\delta(a^I_\eta)$, en posant $F^I_\eta = \sum_{I+1}^\infty F_i$, $a^I_\eta = \sum_{I+1}^\infty a_{\eta i}$.

Mais le support de $e(F_{i\eta})$ contient 0 et ηa_i (vu la convexité de C_i et $|a_i| = 1$), celui de $e(F_{i\eta})\delta(a_{\eta i})$ contient $a_i(\eta - c_{\eta i})$ et $-c_{\eta i}a_i$ (avec $c_{\eta i} = c_\eta t_i$), et 0 si $c_{\eta i} > \eta$. Alors l'orthogonalité des a_i nous donne

$$d^2(x, S_\eta) \leq \sum_{\eta \geq c_{\eta i} \geq \eta/2} (\eta - c_{\eta i})^2 + \sum_{c_{\eta i} < \eta/2} c_{\eta i}^2 \leq \sum_{c_{\eta i} < \eta} \leq \eta \sum_1^\infty c_{\eta i}.$$

$\int_0^\alpha \rho^2 dF_0 < \infty$ nécessite $\eta c_\eta \underset{n \to 0}{\longrightarrow} 0$

car
$$\int_\eta^\alpha \rho^2 dF_0 = \int_\eta^\alpha - \rho dC(\rho) = \eta c_\eta + \int_\eta^1 C(\rho) d\rho \geq \eta c_\eta.$$

D'autre part $\sum_1^\infty t_i$ est majoré par la variation totale, finie, de σ, donc $\eta \sum_1^\infty c_{\eta i} = \eta c_\eta \sum_1^\infty t_i \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi x adhère à $\underline{\lim}\, S_\eta$ (au sens de la proposition 3), $x \in S_\alpha$, donc $S_\alpha \supset E_0$.

Remarque 2. — Nous pensons qu'un exemple $S_\alpha \neq E_0$ peut être construit avec une σ discrète (et des a_i non $\perp$!) mais ce n'est pas très aisé.

THÉORÈME 5. — On suppose, $\mu = e(F)$ étant une loi dans X espace de Banach séparable, que sur toute droite $\Delta_\tau = \{ t\tau, t \text{ réel} \}$ coupant le support S_F de F, S_F contient les points d'abscisses (variables avec τ)

$$kc, \ -k'c, \ c_n \downarrow kc \quad \text{et} \quad c'_n \uparrow -k'c, \ k \text{ et } k' \quad \text{entiers},$$
$$k(\tau)c(\tau) \quad \text{et} \quad k'(\tau)c(\tau) \geq \delta > 0 \,.$$

Alors S_α, support de μ α-centrée, égale le support linéaire topologique E_0 (commun à μ et F), pour tout $0 < \alpha < \infty$.

Preuve. — Prenant $\eta < \delta$, on voit que $\Sigma(F_\eta)$, demi-groupe engendré par le support de $F_{\eta\infty}$ contient $(k''c_n - kk'c)\tau$, points qui pour $k'' \geq k'$ et n variant, sont denses sur $\{ t\tau, t > 0 \}$. De même pour les $t < 0$. Ainsi chaque Δ_τ est dans $\overline{\Sigma(F_\eta)}$ qui, étant un demi-groupe, égale E_0.

Considérons maintenant

$$a_{\eta\alpha} = \int_{\eta < |x| \leq \alpha} x dF \,.$$

La couronne $\{ \eta < |x| \leq \alpha \}$ étant partagée en parties A_{ni} de diamètres $< \varepsilon_n/2$, de F-mesures f_{ni}, on a $f_{ni} \in [k_{ni}, k_{ni} + 1]/N_n$, d'où, si $x_{ni} \in A_{ni}$

$$a'_{n\alpha} = \sum_1^{I_n} k_{ni} x_{ni}/N_n \overset{(18)}{\Rightarrow} |a_{\eta\alpha} - a'_{n\alpha}| \leq \alpha \{ \Delta_n F_{n\alpha} + I_n/N_n \} + \varepsilon_n/2 \,.$$

Dans (18) $\Delta_n F_{n\alpha}$ désigne la perte de F-mesure due au tronquage, on peut la choisir arbitrairement petit, c'est-à-dire I_n assez grand, puis N_n assez grand de sorte que $|a_\eta - a'_n| < \varepsilon_n$. La boule $B_{\varepsilon_n}(a_{\eta\alpha})$ coupe donc

$$\frac{1}{N_n} \sum_1^{I_n} k_{ni} x_{ni} \,,$$

a fortiori $\frac{1}{N_n} \overline{\Sigma(F_\eta)} = \overline{\Sigma(F_\eta)} = (E_0)$. Ainsi $a_{\eta\alpha} \in E_0$, le support de $e(F_{\eta\infty})\delta(a_{\eta\alpha})$

est indépendant de η, c'est E_0, support de μ α-centrée. Comme plus haut, on pourra prendre $\alpha = \infty$ si $a_{\eta\infty}$ existe : $\int_{1<|x|} |x|\,dF < \infty$.

Remarque 3. — La relation (6), avec S_U trace sur E_U du support $\tilde{S}_U$ de $\tilde{\mu}_U$ dans le Banach séparable $\tilde{E}_U$, permet dans certains cas (comme au § 5, proposition 4 et théorème 1) d'en déduire des propriétés de S pour μ dans X « réductible ».

Ainsi, nous l'avons dit au début de ce § 7, pour μ strictement stable d'exposant $p > 1$, on retrouve le résultat de De Acosta : S_∞ vérifie *i*) du théorème 2. Pour étendre à des cas plus généraux l'application de ce théorème 2, il faut étudier les lois $\mu = e(F)$ (dans E_0) pour lesquelles les $\tilde{F}_U$ satisfont toutes aux conditions (17) de ce théorème.

RÉFÉRENCES

[*1*] C. Borell, Convex measures on locally convex spaces. *Arkiv for matematik*, t. **197**, p. 231-252.

[*2*] A. de Acosta, Stable measures and semi-norms. *The annals of Probability*, t. **3**, **5**, 1975, p. 865-875.

[*2'*] A. P. de Araujo, On infinitely divisible laws in C[0, 1]. *Proc. of Amer. Math. sc.*, t. **51**, 1, 1975, p. 179-185.

[*3*] Dudley and Kanter, Zero-one laws for stable measures. *Proc. Am. Math. Soc.*, t. **45**, 2, 1974, p. 345-252.

[*4*] H. Heinich, Mesures vectorielles indéfiniment divisibles. *C. R. Acad. sci. Paris*, t. **271**, 1970, p. 258-259.

[*5*] B. S. Rajput, On the support of certain symmetric stable probability measures on T. V. S. *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[*5'*] *On the subgroup (resp. subspace) property of the support of symmetric infinitely divisible (resp. stable) probability measures on L. C. T. V. S.* to appear.

[*6*] Rajput and Vakhania, *On the support of gaussian probability measures on L. C. T. V. S.* Fourth international symposium on multivariate analysis, Academic Press.

[*7*] E. Siebert, Einbettung unendlich teilbarer Warscheinlichkeitsmasse auf topologischen Gruppen. *Zeitschrift W.*, t. **28**, 1974, p. 227-247.

[*8*] A. Tortrat, Structure des lois indéfiniment divisibles dans un E. V. T. *Lecture Notes*, n° 31, 1966, p. 299-328.

[*9*] A. Tortrat, Sur la structure des lois indéfiniment divisibles dans un espace vectoriel. *Zeitschrift W.*, t. **11**, 1969, p. 311-326.

[*10*] A. Tortrat, *Mélanges de lois et lois indéfiniment divisibles.* Ed. Acad. Rép. Soc. Roumaine, 1973, p. 227-244.

[*10'*] A. Tortrat, *Prolongements τ-réguliers. Application aux probabilités gaussiennes.* Symposia Mathematica, *à paraître*.

[*11*] A. Tortrat, τ-régularité des lois, séparation au sens de A. Tulcea et propriété de Radon-Nicodym. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **XII**, 2, 1976, p. 131-150.

[*12*] A. Tortrat, Lois $e(\lambda)$ dans les espaces vectoriels et lois stables. *Zeitschrift W.*, 1976.

[*13*] V. V. Yurinskii, On infinitely divisible distributions. *Theory of probability and its applications*. t. **XIX**, 1974, p. 308-318.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1976).