ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DENIS BRUNHES

Prédiction scalaire ou prédiction vectorielle pour des processus faiblement stationnaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 4 (1976), p. 291-298
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_4_291_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 4, 1976, p. 291-298. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Prédiction scalaire ou prédiction vectorielle pour des processus faiblement stationnaires

par

Denis BRUNHES

Département de Mathématiques,
Université de Rouen, 76130 Mont-St-Aignan

Si on se donne un processus vectoriel faiblement stationnaire dont on essaye de prédire uniquement une composante, on peut se demander si la prédiction de cette composante — que nous appellerons prédiction incomplète — peut se ramener à une prédiction ou à une somme de prédictions scalaires.

On donnera, sous deux formes différentes, une condition nécessaire et suffisante pour que la prédiction incomplète se ramène à une prédiction scalaire. On construira ensuite des contre-exemples montrant que cette réduction n'est que très rarement possible.

1. HYPOTHÈSES

a) $\{ x_n \}$ est un processus vectoriel (à q composantes) stochastique faiblement stationnaire.

b) $\{ x_n \}$ est un processus régulier.

Il en résulte que sa densité spectrale F est absolument continue et que, si l'on note $dF = f(\theta)d\theta$, Log det f appartient à L_1 $[0,2\pi]$.

2. DÉFINITION DE LA PRÉDICTION INCOMPLÈTE

Soient x_0^1 l'avenir de la première composante en 0, p^1 le prédicteur de la première composante, on a :

$$p^1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 x_{-n} \tag{2.1}$$

($a_n^1 x_{-n}$ est une forme linéaire sur x_{-n}).

Le Problème de Prédiction Incomplète consiste à minimiser :

$$\| x_0^1 - p^1 \|^2 \tag{2.2}$$

3. DÉCOMPOSITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE LA PRÉDICTION INCOMPLÈTE SE RAMÈNE A UNE SOMME DE PRÉDICTIONS SCALAIRES

On pose ξ_n matrice ligne à q éléments telle que :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \xi_n &= -\, a_n^1 \quad \text{si} \quad n > 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(2.2) se met alors sous la forme :

$$\| x_0^1 - p^1 \|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n (x_{-n}, x_{-p}) \xi_p^* \tag{3.2}$$

on a [définitions et propriétés] :

a) $$(x_{-n}, x_{-p}) = \left(x_{-n}^j, x_{-p}^k\right) \qquad j, k = 1, \ldots, q \tag{3.3}$$

c'est une matrice carrée d'ordre q, que l'on note

b) $$\Gamma(p - n) = (x_{-n}, x_{-p}) \tag{3.4}$$

c'est la matrice de covariance du processus $\{ x_n \}$, qui s'écrit

c) $$\Gamma(p - n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(p-n)\theta} f(\theta) d\theta \tag{3.5}$$

(2.2) peut donc se mettre sous la forme :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(p-n)\theta} f(\theta) d\theta \right) \xi_p^* \tag{3.6}$$

ce qui donne formellement :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \geqslant 0} \xi_n e^{in\theta} \right) f(\theta) \left(\sum_{p \geqslant 0} \xi_p e^{ip\theta} \right)^* \tag{3.7}$$

Pour que la prédiction incomplète se ramène à une somme de prédictions scalaires, il faut et il suffit que l'expression (3.6) puisse se mettre sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n^j\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(p-n)\theta}g_j(\theta)\right)\eta_p^{j*} \tag{3.8}$$

η_n^j étant une constante scalaire, et $g_j(\theta)$ une fonction appartenant à $L_1(0,2\,\pi)$ non négative.

(3.8) s'écrit formellement

$$\sum_{j=1}^{j=q}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\geqslant 0}\eta_n^j e^{in\theta}\right)g_j(\theta)\left(\sum_{p\geqslant 0}\eta_p^j e^{ip\theta}\right)^* d\theta \tag{3.9}$$

on pose

$$g = (g_{jk}) \quad \text{avec} \quad g_{jk}(\theta) = \delta_{jk}g_j(\theta)$$

g est donc une matrice diagonale d'ordre q non négative dont les éléments appartiennent à L_1 $[0,2\,\pi]$.

Soit

$$\eta_n = (\eta_n^1, \eta_n^2, \ldots, \eta_n^q)$$

η_n est une matrice ligne à q éléments. (3.9) est donc équivalent à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\geqslant 0}\eta_n e^{in\theta}\right)g(\theta)\left(\sum_{p\geqslant 0}\eta_p e^{ip\theta}\right)^* d\theta \tag{3.10}$$

on a donc :

3.1. **Théorème**

La prédiction incomplète se ramène à une somme de prédictions scalaires si et seulement si il existe une matrice unitaire U appartenant à H^2 (¹) diagonalisant la matrice $f(\theta)$.

$$g = U^*fU \tag{3.11}$$

3.2. **Corollaire**

Soit $F = AA^*$, avec A appartenant à H^2, la prédiction incomplète se ramène à une somme de prédictions scalaires, si et seulement si il existe une matrice unitaire U appartenant à H^2 et une matrice diagonale B appartenant à H^2 telles que :

$$A = UB \tag{3.12}$$

(¹) Ensemble des fonctions de $L_2[0,\,2\pi]$ ayant un prolongement analytique dans le disque.

Preuve. — Le corollaire 3.2 est équivalent au théorème 3.1

$$(\exists \mathrm{U} \in \mathrm{H}^2, \mathrm{A} = \mathrm{UB}) \Rightarrow (\exists \mathrm{U} \in \mathrm{H}^2, \mathrm{U}g\mathrm{U}^* = f)$$

Soit $g = \mathrm{BB}^*$, on a alors :

$$\mathrm{U}g\mathrm{U}^* = \mathrm{UBB}^*\mathrm{U} = \mathrm{AA}^* = f$$

$$(\exists \mathrm{U} \in \mathrm{H}^2, \mathrm{U}g\mathrm{U}^* = f) \Rightarrow (\exists \mathrm{U} \in \mathrm{H}^2, \mathrm{A} = \mathrm{UB})$$

g est factorisable sous la forme :

$$g = \mathrm{BB}^*, \qquad \mathrm{B} \in \mathrm{H}^2$$

on a donc :

$$\mathrm{U}^* f \mathrm{U} = \mathrm{BB}^*$$

ce qui s'écrit aussi :

$$f = \mathrm{UBB}^*\mathrm{U} = \mathrm{UB}(\mathrm{UB})^*$$

A et UB sont par définition des « left outer matrices » telles que

$$\mathrm{AA}^* = \mathrm{UB}(\mathrm{UB})^*,$$

on peut alors appliquer les résultats de Helson et Lowdenslager [1]; à un facteur multiplicatif près — constitué par une matrice unitaire constante — on a donc :

$$\mathrm{A} = \mathrm{UB}.$$

4. CONTRE-EXEMPLES

Pour une matrice f quelconque définie non négative, dont les éléments appartiennent à $\mathrm{L}_1\,[0,2\,\pi]$ et telle que Log [det f] appartienne à $\mathrm{L}_1\,[0,2\,\pi]$, on n'est pas assuré de l'existence d'une matrice U unitaire appartenant à H^2 et telle que (3.11) soit vérifiée.

4.1. Contre-exemple pour une matrice carrée d'ordre 2

$$\text{Soit } f(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{i \operatorname{sh}((4\pi)^{-1}\theta)}{2} \\ \dfrac{-i \operatorname{sh}((4\pi)^{-1}\theta)}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

[2] Théorème 11, page 206 de [*2*].

on a

$$\det (f(\theta) - s\mathrm{I}_2) = (1 - s)(2 - s) - \frac{\mathrm{sh}^2((4\pi)^{-1}\theta)}{4}$$

l'équation $\det (f(\theta) - s\mathrm{I}_2) = 0$ s'écrit encore :

$$s^2 - 3\Delta + 2 - \frac{\mathrm{sh}^2((4\pi)^{-1}\theta)}{4} = 0$$

on a

$$\Delta = 9 - 4\left(2 - \frac{\mathrm{sh}^2((4\pi)^{-1}\theta)}{4}\right) = 1 + \mathrm{sh}^2[(4\pi)^{-1}\theta] = \mathrm{ch}^2[(4\pi)^{-1}\theta]$$

d'où les 2 racines

$$s_1 = \frac{3 - \mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta]}{2} \qquad s_2 = \frac{3 + \mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta]}{2}$$

les vecteurs propres associés sont pour

$$s_1 \left| \begin{matrix} i\,\mathrm{sh}[(4\pi)^{-1}\theta] \\ 1 - \mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] \end{matrix} \right. \qquad s_2 \left| \begin{matrix} i\,\mathrm{sh}[(4\pi)^{-1}\theta] \\ 1 + \mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] \end{matrix} \right.$$

ce qui donne la matrice U

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{i\,\mathrm{sh}[(4\pi)^{-1}\theta]}{(2\,\mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta][\mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] - 1])^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{i\,\mathrm{sh}[(4\pi)^{-1}\theta]}{(2\,\mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta][\mathrm{ch}(4\pi)^{-1}\theta + 1])^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{1 - \mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta]}{(2\,\mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta][\mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] - 1])^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{1 + \mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta]}{(2\,\mathrm{ch}[(4\pi)^{-1}\theta][\mathrm{ch}(4\pi)^{-1}\theta + 1]^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

U est défini à une matrice multiplicative près de la forme

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} e^{iv_1(\theta)} & 0 \\ 0 & e^{iv_2(\theta)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad v_1 \text{ et } v_2 \text{ appartenant à } \mathbb{R}$$

il reste à montrer qu'il n'existe pas v_1 et v_2 tels que UV appartienne à H^2. Si $\mathrm{U} = (\mathrm{U}_{jk})$ $j, k = 1, 2$, on a :

$$\mathrm{UV} = \begin{pmatrix} \mathrm{U}_{11}e^{iv_1} & \mathrm{U}_{12}e^{iv_2} \\ \mathrm{U}_{21}e^{iv_1} & \mathrm{U}_{22}e^{iv_2} \end{pmatrix}$$

U_{22} est une fonction continue strictement positive, Log U_{22} est donc une fonction réelle, il existe une fonction holomorphe dans B (0,1) dont la partie réelle est égale sur C (0,1) à Log U_{22}, ce sera h_{22}, on choisira $v_2 = \mathrm{Im}(h_{22})$, $\mathrm{U}_{22}e^{iv_2}$ appartiendra donc à H_2. $- i\mathrm{U}_{12}e^{iv_2}$ n'est pas une fonction de H^2, cela supposerait que U_{22} et $-iU_{12}$ (qui est positif) différent d'une constante au plus ce qui est faux. UV n'est donc pas une fonction de H^2 puisque un élément au moins n'appartient pas à H^2.

4.2. Contre-exemple pour une matrice carrée d'ordre q

Soit $f(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \bar{\alpha} \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & 0 & \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $\alpha(\theta) \in L_1\ [0, 2\pi]$ $0 < |\alpha(\theta)| < 1$

on a

$$\det(f(\theta) - sI_q) = (1-s)^q - \alpha\bar{\alpha}(1-s)^{q-2} = (1-s)^{q-2}[s^2 - 2s + 1 - \alpha\bar{\alpha}]$$

$$\Delta = \alpha\bar{\alpha}$$

on a $(q-2)$ vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre $s = 1$ ce seront

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et ont 2 valeurs propres distinctes $s_1 = 1 + |\alpha|$, $s_q = 1 - |\alpha|$, les vecteurs propres associés seront :

$$s_1 \left| \begin{array}{c} \dfrac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2}|\alpha|} \\ 0 \\ \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \qquad s_q \left| \begin{array}{c} -\dfrac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2}|\alpha|} \\ 0 \\ \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

on a donc :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2}\,|\alpha|} & 0 & \dots & 0 & -\frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2}\,|\alpha|} \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

U est défini à une matrice multiplicative près de la forme :

$$V = \begin{pmatrix} e^{iv_1(\theta)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{iv_q(\theta)} \end{pmatrix} \quad \text{avec } v_j \quad j = 1, \dots, q \text{ appartenant à } \mathbb{R} \tag{4.1}$$

si on choisit α de façon à ce que $\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}$ et $\frac{|\alpha|}{\bar{\alpha}}$ ne soient pas des fonctions de H^2, alors on peut déterminer v_1 de façon à ce que $\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|} e^{iv_1}$ soit égal à 1, mais alors e^{iv_1} n'appartient pas à H^2 et le produit UV n'appartient pas à H^2.

4.3. **Autre contre-exemple**

La recherche d'un contre-exemple peut se mettre sous la forme suivante :

Si U est une matrice mesurable unitaire quelconque, elle est définie à une matrice V multiplicative près de la forme (4.1) ; est-il possible de déterminer V de façon à ce que UV appartienne à H^2.

On peut se donner une matrice unitaire mesurable quelconque en choisissant un vecteur colonne quelconque $(U_{11}, U_{21}, \dots, U_{q1})$ de norme 1, on complète le choix des autres colonnes de façon à ce que l'on obtienne une matrice unitaire. Le choix de v_1 modifie la première colonne seule, on pourra donc si les U_{j1}, $j = 1, \dots, q$ sont choisis de façon à ce qu'aucun d'entre eux ne soient holomorphes rendre un des $U_{j1}e^{iv_1}$ holomorphe, si le choix des U_{k1}, $k \neq j$, est fait correctement, les $U_{k1}e^{iv_1}$, $k \neq j$ ne seront pas holomorphes.

5. CONCLUSION

Ces résultats montrent que si l'on prédit scalairement l'avenir de la première composante — c'est-à-dire, en utilisant uniquement son seul passé — on trouve une prédiction bien moins bonne qu'en utilisant la prédiction vectorielle.

Ceci peut également s'énoncer ainsi : il est impossible en général de construire une base où la prédiction vectorielle d'un processus à q composantes se réduise à la prédiction scalaire de ses q composantes.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] HELSON-LOWDENSLAGER : Prediction Theory and Fourier Series in Several variables Part I. *Acta. Math.*, t. **99**, 1959, p. 165-202.

[*2*] HELSON-LOWDENSLAGER : Prediction Theory and Fourier Series in several variables Part II. *Acta. Math.*, t. **106**, 1962, p. 175-213.

[*3*] WIENER-MASANI : the Prediction Theory of Multivariate stochastic Processes Part I. *Acta. Math.*, t. **98**, 1957, p. 111-150.

[*4*] WIENER-MASANI : the Prediction Theory of Multivariate stochastic Processes Part II. *Acta. Math.*, t. **99**, 1958, p. 93-137.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1976)