ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. AZÉMA
T. JEULIN

Précisions sur la mesure de Föllmer

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 3 (1976), p. 257-283
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_3_257_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 3, 1976, p. 257-283. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Précisions sur la mesure de Föllmer

par

J. AZÉMA et T. JEULIN
Université Paris 6. Laboratoire de Calcul des probabilités,
9, quai Saint-Bernard, Tour 56 75230 Paris Cedex 05

SUMMARY. — In this article, we give a new construction of the exit measure of a supermartingale defined on a probability space $(\Omega, \mathbf{F}, \mathrm{P})$, as well as a construction of the minimal space (which may be larger than Ω) supporting this measure. Then measures which are exit measures are characterized : the letters are those which assign null measure to « completely evanescent sets ». It is also shown that the balayage operation on supermartingales can be expressed very simply in terms of Föllmer measures, using Killing operators.

L'idée d'associer à une martingale sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, une mesure sur Ω est presque aussi ancienne que la notion de martingale : elle remonte probablement à Doob. Pourtant le problème n'a été traité qu'assez récemment pour les martingales à temps continu, et en premier lieu par Föllmer qui dans [*3*] a associé à toute surmartingale positive X une « mesure de sortie ». Si, dans le cas discret, il suffit de supposer que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un « bon » espace, on s'aperçoit en revanche que cette condition ne suffit pas en temps continu (on donne ici au § V un exemple très simple de surmartingale définie sur un espace $(\Omega, \mathscr{A})$ lusinien n'admettant pas de mesure de sortie). Föllmer a travaillé sur ce qu'il appelle, après Parthasaraty, un système standard ; cela présente un inconvénient : beaucoup d'espaces canoniques intervenant en théorie des processus de Markov par exemple ne sont pas des systèmes standards. C'est pourquoi Meyer [*6*], a repris la

(*) Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 224 « Processus stochastiques et applications ». Université Pierre-et-Marie-Curie.

question avec des hypothèses différentes : Ω est l'espace des trajectoires continues à durée de vie à valeurs dans un bon espace d'état (qui ne donne pas un système standard). Il construit ensuite la mesure de sortie en appliquant le théorème de Prokhorov sur les limites projectives de mesures; Signalons enfin un travail de Stricker [9] qui construit la mesure de Föllmer par une application simple du théorème de Prokhorov sur la convergence étroite de mesures mais sous des hypothèses restrictives (espace d'état compact).

Nous avons ici repris la plupart des idées de Meyer, mais en les appliquant à une construction assez différente : on se ramène au cas où X est de la classe (D) en la réduisant au lieu de l'arrêter. Les hypothèses faites permettent de travailler sur tous les espaces de trajectoires usuels.

Après avoir rappelé au § I quelques résultats simples sur les réduites de surmartingales, nous construirons au § II une famille $(\mathbf{F}_t)$ de tribus bien adaptée au problème (mais qui peut sans doute servir dans d'autres circonstances). On construit la mesure de Föllmer d'une surmartingale positive au § III sur un espace qui peut être légèrement plus gros que Ω ; au § IV enfin, on étend aux surmartingales positives quelconques un certain nombre de définitions et de résultats énoncés dans (1) pour les surmartingales de la classe (D) On déduit du mode de construction de la mesure une démonstration très simple du théorème de Fatou.

Nous avons rédigé explicitement au paragraphe VI l'application aux u-processus d'un processus de Markov. Il s'agit de choses bien connues et nous n'apportons rien de nouveau si ce n'est une petite subtilité : si l'on part d'un processus fortement markovien par rapport à une famille d'opérateurs de translation (θ_t), le u-processus reste défini sur le même espace et reste fortement markovien par rapport à la même famille (θ_t). Il n'est donc plus nécessaire de revenir à l'espace canonique comme on le fait habituellement ce qui n'est pas toujours aussi inoffensif qu'il y paraît.

I. RAPPELS SUR LES RÉDUITES DE SURMARTINGALES

1. Hypothèses et notations

Dans ce chapitre, on se placera dans le cadre usuel de la théorie générale des processus : on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{F}, \mathrm{P})$ muni d'une famille croissante $(\mathbf{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous tribus de $\mathbf{F}$, continue à droite et contenant les ensembles P-négligeables. Il nous sera commode de définir les processus à l'infini; l'ensemble d'indice sera donc $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{ +\infty \}$. Il n'y a aucune difficulté à définir les objets habituels de la théorie générale des processus dans cette nouvelle situation (on se ramène à la théorie sur $[0\ 1]$ au moyen d'un homéomorphisme de $[0\ 1]$ sur $\bar{\mathbb{R}}_+$). On notera tout de même qu'il faut introduire un deuxième infini que l'on notera ∞^+, avec $\infty^{\pm} > \infty$, qui servira à faire « s'évanouir » les temps d'arrêt ; avec ces conventions un temps d'arrêt est une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \cup \{ \infty^+ \}$, et un intervalle stochastique $[\![S\ T]\!]$ est l'ensemble aléatoire $\{ (\omega, t) ; t \leq \infty, S(\omega) \leq t \leqslant T(\omega) \}$.

Les processus sont définis à une évanescence près.

Une surmartingale $X = (X_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}$ sera une surmartingale continue à droite au sens usuel prolongée par $X_\infty = 0$. On notera X_- le processus défini par $X_{0^-} = 0$ et $X_-(t, \omega) = X_{t^-}(\omega)$ pour $0 < t \leqslant \infty$.

2. **Réduite gauche d'une surmartingale positive**

(1) THÉORÈME ET DÉFINITION. — Soit X une surmartingale positive et Γ un ensemble aléatoire ; l'ensemble $\mathscr{G}$ des surmartingales vérifiant $Y_- 1_\Gamma \geq X_- 1_\Gamma$ possède un plus petit élément noté $\bar{\mathscr{R}}_\Gamma X$ que l'on appellera réduite gauche de X sur Γ.

(2) Si Γ' est un ensemble aléatoire contenant Γ, on a

$$\bar{\mathscr{R}}_\Gamma \bar{\mathscr{R}}_{\Gamma'} X = \bar{\mathscr{R}}_{\Gamma'} \bar{\mathscr{R}}_\Gamma X = \bar{\mathscr{R}}_\Gamma X .$$

Démonstration. — On se ramène au cas où l'ensemble d'indice est $[0\ 1]$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0\ 1]$ et Y^n une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{G}$ telle que $\inf_n Y^n$ soit une version de la borne inférieure essentielle de $\mathscr{G}$ pour la mesure $P \otimes \lambda$. La régularisée à droite Z de $\inf_n Y^n$ est le plus petit élément de $\mathscr{G}$; en effet

a) si $Y \in \mathscr{G}$, $\inf_n Y^n \leq Y$ $P \otimes \lambda$ – ps ; on a donc $Z \leq Y$

b) de l'égalité $(\inf_n Y^n)_- = \inf_n (Y^n_-)$ (valable pour toute suite de surmartingales) on tire immédiatement l'inégalité $Z_- 1_\Gamma \geq Y_- 1_\Gamma$; Z appartient donc à $\mathscr{G}$. La dernière propriété est alors évidente et montre que la réduite gauche d'une surmartingale a de meilleures propriétés que la réduite ordinaire.

3. **Réduite extérieure d'une surmartingale de la classe (D)**

Supposons maintenant Γ prévisible et X de la classe (D) ; on appellera A le processus croissant intégrable (chargeant éventuellement $[\![\infty]\!]$) engendrant X et $\bar{L}^\Gamma$ le processus prévisible défini par

$$\bar{L}^\Gamma(\omega, t) = \sup \{ s ; s \leq t, (\omega, s) \in \Gamma \} \qquad (\sup \phi = 0) .$$

La forme linéaire $Z \to E \int_0^\infty Z_{\underline{L}^\Gamma}(\omega, t) 1_{[\underline{L}^\Gamma > 0]}(\omega, t) dA_t(\omega)$ définit une nouvelle mesure positive bornée sur la tribu des prévisibles, d'où un nouveau processus croissant prévisible $\bar{A}^\Gamma$. Soit $\bar{X}^\Gamma$ la surmartingale de la classe (D) engendrée par $\bar{A}^\Gamma$; on dit que $\bar{X}^\Gamma$ est la réduite extérieure de X sur Γ. Un théorème qui n'est pas très difficile, de (1) (voir aussi (6)) affirme que, sous les hypothèses faites, $\bar{X}^\Gamma$ et $\bar{\mathscr{R}}_\Gamma X$ coïncident ; on peut donc énoncer :

PROPOSITION. — Soit X une surmartingale de la classe (D) et Γ un ensemble aléatoire prévisible ; appelons A et $\bar{A}^\Gamma$ les processus croissants prévisibles engendrant respectivement X et $\bar{\mathscr{R}}_\Gamma X$. On a quel que soit Z prévisible borné

$$E\left(\int_0^\infty Z_s d\bar{A}_s^\Gamma\right) = E\left(\int_0^\infty Z_{\underline{L}^\Gamma}(\omega, s) 1_{(\underline{L}^\Gamma > 0)}(\omega, s) dA_s(\omega)\right)$$

Remarque. — L'une des choses que nous nous proposons de faire est d'étendre la définition d'une réduite extérieure à des surmartingales qui ne sont plus nécessairement de la classe (D) ; on remplacera le processus croissant A par la « mesure de Föllmer » de la surmartingale. Les notions de réduite gauche et de réduite extérieure seront alors distinctes, d'où ce vocabulaire un peu compliqué.

II. TRIBUS

1. Prenons par exemple un espace de trajectoires ; on a le choix entre deux possibilités pour construire une famille de tribus :

* Soit raisonner sur la famille des tribus naturelles engendrée par les coordonnées ; cette famille a de bonnes propriétés algébriques.

* Soit compléter convenablement cette famille ; on perd les propriétés algébriques, mais on y gagne une chose indispensable : les temps d'entrée dans les ensembles progressifs sont des temps d'arrêt.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de construire une famille de tribus intermédiaire possédant à la fois les deux types d'avantage. Elle aura de plus une propriété miraculeuse : les temps d'entrée dans les ensembles aléatoires mesurables adaptés seront des temps d'arrêt.

$(\Omega, \mathbf{G})$ est un espace mesurable ; on se donne une famille $(k_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathbf{G})$ dans $(\Omega, \mathbf{G})$ et une variable aléatoire ζ, $\mathbf{G}$-mesurable, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ satisfaisant aux axiomes (très faibles) suivants :

(*i*) $k_s \circ k_t = k_{s \wedge t}\, \zeta \circ k_s = \zeta \wedge s$ quels que soient s et $t \geq 0$.

(*ii*) $\forall t \geq \zeta(\omega)$, $k_t(\omega) = \omega$ pour tout ω.

La famille $\mathbf{G}_t = \bigcap_{s>t} k_s^{-1}(\mathbf{G})$ est alors une famille croissante, continue à droite de sous-tribus de $\mathbf{G}$; ζ est un temps d'arrêt pour $(\mathbf{G}_t)$; on définit comme d'habitude la tribu des ensembles prévisibles (optionnels) relativement à $(\mathbf{G}_t)$ sur $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+^*$ (resp. $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+$) ainsi que la tribu $\mathbf{G}_{\zeta-}$ des événements strictement antérieurs à ζ. On a le résultat suivant ($\mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ définit la tribu borélienne sur $\bar{\mathbb{R}}_+$).

(4) PROPOSITION. — *a*) $(\omega, s) \to k_s\omega$ est mesurable de

$$(\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+,\ \mathbf{G}_{\zeta-} \otimes \mathrm{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)) \qquad \text{dans} \qquad (\Omega,\ \mathbf{G}_{\zeta-})$$

b) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

* Z est un processus prévisible constant après ζ (i. e. $Z_t = Z_\zeta$ si $t \geq \zeta$)
* Il existe une v. a. z $\mathbf{G}_{\zeta-}$-mesurable vérifiant $Z_s = z \circ k_s$.

Démonstration. — C'est une trivialité : raisonner sur les générateurs. On notera que $z = Z_{\zeta-}$. Le *b*) est une vieille remarque due à Benveniste qui préférait énoncer de cette manière les résultats de (2).

Remarque. — Si $\mathbf{G}' = \mathbf{G}_{\zeta-}$ et $\mathbf{G}'_t = \bigcap_{s>t} k_s^{-1}(\mathbf{G}')$, on a $\mathbf{G}'_{\zeta-} = \mathbf{G}_{\zeta-}$ et il y a identité entre les processus $(\mathbf{G}'_t)$ ou $(\mathbf{G}_t)$ prévisibles constants après ζ.

De même il y a identité entre les processus adaptés à (G'_t) ou à (G_t), nuls après ζ.

2. La famille $(\mathbf{F}_t)$

Nous allons changer un peu les notations ; notre espace mesurable sera noté $(\Omega, \mathbf{F}^0)$; on suppose donnés k et ζ vérifiant (*i*) et (*ii*).

Nous noterons par $\mathbf{F}$ la complétée universelle de $\mathbf{F}^0$.

On pourra définir comme en 1) les tribus $\mathbf{F}_t^0, \mathbf{F}_{\zeta-}^0$. Nous construirons aussi à l'aide de $\mathbf{F}$, les tribus $\mathbf{F}_t = \bigcap_{s>t} k_s^{-1}(\mathbf{F})$; nous noterons $\mathbf{F}^*$ la tribu $\mathbf{F}_{\zeta-}$.

$\mathscr{P}^*$ désignera la famille des processus prévisibles relativement à $\mathbf{F}_t$, constants après ζ.

Remarquons que $\mathbf{F}^*$ est contenue dans la complétée universelle de $\mathbf{F}_{\zeta-}^0$.

La famille $(\mathbf{F}_t)$ a de bonnes propriétés algébriques. Dans la proposition suivante, nous allons réaliser la deuxième partie de notre programme.

(5) PROPOSITION. — *a*) $(\omega, s) \to k_s\omega$ est mesurable de

$$(\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+, \mathbf{F}^* \otimes \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)) \qquad \text{dans} \qquad (\Omega, \mathbf{F}^*).$$

b) Un processus Z est dans $\mathscr{P}^*$ si et seulement si il existe z, $\mathbf{F}^*$-mesurable tel que $Z_s = z \circ k_s$.

c) Si Γ est un ensemble aléatoire $\mathbf{F} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$-mesurable adapté à la famille $(\mathbf{F}_t)$ les variables aléatoires (à valeurs dans

$$\bar{\mathbb{R}}_+ \cup \{ \infty^+ \}) \; T_\Gamma(\omega) = \inf \{ s > 0, (\omega, s) \in \Gamma \}$$

$D_\Gamma(\omega) = \inf \{ s \geqslant 0, (\omega, s) \in \Gamma \}$ sont des temps d'arrêt de $(\mathbf{F}_t)$.

De plus, le processus L^Γ défini par $L^\Gamma(\omega, t) = \sup \{ s ; s < t, (\omega, s) \in \Gamma \}$ est prévisible relativement à $(\mathbf{F}_t)$.

Démonstration. — Seul *c*) reste à montrer ; considérons par exemple T_Γ. Il est facile de voir qu'il a la propriété suivante, qui provient du fait que Γ est adapté :

$$t > T_\Gamma(\omega) \quad \text{et} \quad k_t(\omega) = k_t(\omega') \Rightarrow T_\Gamma(\omega) = T_\Gamma(\omega')$$

Si nous posons alors $H = \{ T_\Gamma < t \}$, on a $k_t^{-1}(H) = H$; mais H est $\mathbf{F}$-mesurable en vertu du théorème de capacitabilité. Il en résulte que H appartient à $k_t^{-1}(\mathbf{F})$, donc à $\mathbf{F}_t$; puisque les familles de tribus sont continues à droite, on a le résultat.

Le processus L^Γ est continu à gauche ; un argument semblable montre qu'il est adapté.

(6) CONSÉQUENCES. — *a*) Si X est un processus $\mathbf{F} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ mesurable, adapté à $(\mathbf{F}_t)$, le processus $\overline{\lim\limits_{\substack{s \uparrow t \\ s < t}}} X_s$ est $(\mathbf{F}_t)$-prévisible

b) Si Γ est prévisible pour $(\mathbf{F}_t)$, le processus

$$\bar{L}^\Gamma(\omega, t) = \sup \{ s \mid s \leq t, (\omega, s) \in \Gamma \}$$

est prévisible ; si X est prévisible pour $(\mathbf{F}_t)$, il en est de même pour le processus $\overline{\lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \leq t}}} X_s$

c) Si Γ est $\mathbf{F} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$-mesurable, adapté à $(\mathbf{F}_t)$, la variable aléatoire $l^\Gamma(\omega) = \sup \{ t ; t < \zeta(\omega), (\omega, t) \in \Gamma \}$ est $\mathbf{F}^*$-mesurable. Il en est de même de $\bar{l}^\Gamma(\omega) = \sup \{ t ; t \leq \zeta(\omega), (\omega, t) \in \Gamma \}$ dès que Γ est prévisible pour $(\mathbf{F}_t)$. Sous ces conditions, les applications k_{l^Γ} et $k_{\bar{l}^\Gamma}$ sont mesurables de $(\Omega, \mathbf{F}^*)$ dans lui-même.

Démonstration. — Tout cela est très facile :

a) se déduit immédiatement de (5), *c*) tout au moins quand X est l'indicatrice d'un ensemble aléatoire adapté Γ (considérer l'ensemble aléatoire $\{ (\omega, t) L_t^\Gamma(\omega) = t \}$). Le passage aux processus se fait comme d'habitude.

b) Se montre en remarquant que $\bar{L}_t^\Gamma = L_t^\Gamma \vee t 1_\Gamma$; le résultat se prolonge aussi aux processus.

c) Enfin $l^\Gamma = L_\zeta^\Gamma$, $\bar{l}^\Gamma = \bar{L}_\zeta^\Gamma$; il suffit d'appliquer (5) *b*) ; par (5) *a*) on obtient immédiatement la mesurabilité des applications k_{l^Γ} et $k_{\bar{l}^\Gamma}$.

On peut enfin énoncer le résultat utile suivant, dont la démonstration est encore triviale si l'on raisonne sur les générateurs.

(7) PROPOSITION. — Si Z est un processus prévisible relativement à $(\mathbf{F}_t)$, il existe pour chaque loi μ sur Ω, deux processus Z^1 et Z^2 encadrant Z, prévisibles relativement à $(\mathbf{F}_t^0)$ et tels que l'ensemble aléatoire $\{ Z^1 \neq Z^2 \}$ soit μ-évanescent.

Commentaires. — *a*) Supposons que Ω soit l'espace des fonctions continues à droite et à durée de vie, à valeurs dans un espace d'état cosouslinien E, muni des opérateurs de meurtre habituels. Dans ces conditions $\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}_{\zeta-}^0$. Il est facile de voir que $k_t^{-1}(\mathbf{F})$ est la complétée universelle de $k_t^{-1}(\mathbf{F}^0)$ et la famille $(\mathbf{F}_t)$ n'est autre que la famille de ces complétées universelles que l'on a rendue continue à droite. On notera que $\mathbf{F}_t$ ne contient pas les ensembles de mesure nulle de $\mathbf{F}_\infty = \mathbf{F}$: elle ne satisfait donc pas aux « conditions habituelles » de la théorie générale des processus. En particulier un ensemble évanescent n'est pas nécessairement adapté (et *a fortiori* prévisible). Les mesures que l'on va construire pouvant charger les ensembles prévisibles évanescents, on ne verra que des avantages à ce que ceux-ci ne soient pas autorisés à être un peu n'importe quoi.

b) On notera également que $\mathbf{F}^*$ n'est pas la complétée universelle de $\mathbf{F}^0$; un exemple tiré de la pratique des processus de Markov le fera comprendre ; supposons que Ω soit l'espace canonique d'un processus de Hunt (X_t) et soit f une fonction universellement mesurable bornée sur E. La variable aléatoire $z = f(X_{\zeta-})$ est $\mathbf{F}$-mesurable ; s'il était vrai que $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$, le processus $(Z_t) = (z \circ k_t) = (f(X_{t-}))$ serait prévisible d'après (5). Ce serait trop beau.

III. CONSTRUCTION DE LA MESURE DE FÖLLMER

1. Hypothèses

$(\Omega, \mathbf{F}^0)$ est un espace mesurable ; les notations sont celles de II. (k_t) et ζ sont définis comme en II 1), vérifiant (*i*), (*ii*) et satisfont de plus à l'hypothèse suivante :

(*iii*) $k_s(\omega) = k_s(\omega')$ pour $s < t \Rightarrow k_t(\omega) = k_t(\omega')$

on fera enfin une hypothèse sur l'espace mesurable :

(*iv*) $(\Omega, \mathbf{F}_{\zeta-}^0)$ est un U-espace au sens de Getoor (i. e. Ω est un espace topologique homéomorphe à un sous-espace universellement mesurable d'un espace compact métrisable et $\mathbf{F}_{\zeta-}^0$ est sa tribu borélienne).

Puisque $\mathbf{F}^*$ est incluse dans la complétée universelle de $\mathbf{F}^0_{\zeta-}$ (et contient $\mathbf{F}^0_{\zeta-}$), toute probabilité sur $\mathbf{F}^*$ sera intérieurement régulière.

L'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans E cosouslinien à durée de vie et continues à droite est lui-même cosouslinien ; c'est donc un U-espace. Tout sous-espace universellement mesurable et stable pour le meurtre de celui-là satisfait donc aux hypothèses ci-dessus.

2. **Clôture projective de Ω**

On peut définir à l'aide des $(k_s)_{s<t}$ un système projectif d'ensembles : on pose $\Omega_s = \Omega$ pour tout $s < t \leq \infty$, et si $s' \leqslant s < t$, on a un système $\Omega_{s'} \overset{k_{s'}}{\leftarrow} \Omega_s$ qui est projectif. Sa limite projective sera notée $\varprojlim_{s<t} (\Omega, k)$. A tout point ω de Ω on peut faire correspondre l'élément $(k_s(\omega))_{s<t}$ et on a ainsi défini une application ϕ_t de Ω dans $\varprojlim_{s<t} (\Omega, k)$.

(8) DÉFINITION. — Nous dirons que (Ω, k, ζ) est *projectivement clos* si, pour chaque t, ϕ_t est une bijection de $\{ \zeta \leq t \}$ sur $\varprojlim_{s<t} (\Omega, k)$.

Il est très facile de voir que la condition (*iii*) est équivalente au fait que ϕ_t est injective. Un exemple nous montrera ce que signifie intuitivement la surjectivité. Si Ω est l'espace des trajectoires à durée de vie, continues à droite et limitées à gauche sur $]0\ \zeta]$, Ω n'est pas projectivement clos. En revanche l'espace des trajectoires continues à droite, limitées à gauche sur $]0\ \zeta[$ est projectivement clos : c'est le plus petit espace projectivement clos contenant le précédent. C'est ce que nous appellerons, dans la construction qui va suivre, la clôture projective de Ω. La difficulté consiste à construire une limite projective ne dépendant pas de t et qui reste un U-espace. Voici comment l'on peut faire.

a) On peut par isomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}_+$ sur $[0\ 1]$ supposer ζ borné. Dans ce cas, les applications $\tau_t = k_{(\zeta-t)_+}$ vérifient la propriété de semi-groupe $\tau_t \circ \tau_s = \tau_{t+s}$; τ est mesurable de $\mathbf{F}^0_{\zeta-} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ dans $\mathbf{F}^0_{\zeta-}$. Si $\mathbf{Q}^*_+$ est l'ensemble des rationnels > 0, et si $0 < p \leq q$, on définit $\mathrm{T}_{q,p} = \tau_{q-p}$; le système $\Omega_p \overset{\mathrm{T}_{p\cdot q}}{\longrightarrow} \Omega_q$ (où tous les Ω_p sont égaux à Ω) est un système projectif. On appellera W sa limite projective (c'est la limite projective, « quand p tend vers 0 »), et T_p l'application canonique de W dans Ω_p. Les $\mathrm{T}_{p,q}$ étant mesurables de $\mathbf{F}^0_{\zeta-}$ dans $\mathbf{F}^0_{\zeta-}$, munissons W de la tribu limite projective $\overline{\mathbf{G}}^0$ W est mesurable dans $\prod_{q \in \mathbf{Q}^*_+} (\Omega_q, \mathbf{F}^0_{\zeta-})$ et $\overline{\mathbf{G}}^0$ est la trace de $\bigotimes_{\mathbf{Q}^*_+} \mathbf{F}^0_{\zeta-}$ sur W.

L'application $\phi : \omega \to (\tau_q(\omega))_{q \in Q_+^*}$ de Ω dans W est injective d'après *iii*); on peut donc identifier Ω au sous-ensemble $W_0 = \phi(\Omega)$ de W.

On a $\tau_p = T_p \circ \phi$ et ϕ est mesurable de $\mathbf{F}^0_{\zeta-}$ dans $\bar{\mathbf{G}}^0$ de plus si

$$A = B \cap (\zeta = 0)(B \in \mathbf{F}^0), \quad \phi(A) = W_0 \cap \bigcap_{q \in Q_+^*} T_q^{-1}(A)$$

si

$$A = B \cap (\zeta > t)(B \in \mathbf{F}_t^0), \quad \phi(A) = W_0 \cup \bigcup_{q \in Q_+^*} T_q^{-1}(A)$$

d'où pour tout $A \in \mathbf{F}^0_{\zeta-}$, $\phi(A)$ appartient à $\bar{\mathbf{G}}^0 \mid_{W_0}$ trace de $\bar{\mathbf{G}}^0$ sur W_0 on peut donc identifier $(\Omega, \mathbf{F}^0_{\zeta-})$ et $(W_0, \bar{\mathbf{G}}^0 \mid_{W_0})$.

b) *Prolongement de* ζ *et* (k_t) *à* W. — On définira $\bar{\zeta}$ sur W en posant $\bar{\zeta} = \sup_{p \in Q_+^*} \zeta \circ T_p$; il est clair que $\bar{\zeta}$ prolonge ζ et que $\bar{\zeta}$ est $\bar{\mathbf{G}}^0$ mesurable ; on définit maintenant une application $\bar{\tau}_t$ sur W en posant $\bar{\tau}_t = \phi \circ \tau_{t-p} \circ T_p$ où p est un élément de Q_+^* inférieur à t, si $t > 0$ ($\bar{\tau}_0$ sera l'identité sur W). Cette définition ne dépend pas du p-choisi ; on vérifie immédiatement que $\bar{\tau}_t \circ \bar{\tau}_s = \bar{\tau}_{t+s}$ et $\bar{\zeta} \circ \bar{\tau}_t = (\bar{\zeta} - t)_+$; on remarquera que $\bar{\tau}_t(w)$ est dans W_0 dès que t est > 0 et que, si $p \in Q_+^*$, $\bar{\tau}_p = \phi \circ T_p$.

On pose enfin $\bar{k}_t = \bar{\tau}_{(\bar{\zeta}-t)_+}$; la famille $(\bar{k}_t)$ et $\bar{\zeta}$ vérifient (*i*) et (*ii*) ; $\bar{\tau}$, et par suite $\bar{k}$, est mesurable de $\bar{\mathbf{G}}^0 \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ dans $\bar{\mathbf{G}}^0$; de plus $\bar{k}_t(w)$ est dans W_0 dès que t est strictement plus petit que $\bar{\zeta}(w)$; enfin $\phi \circ k_s = \bar{k}_s \circ \phi$.

c) W *est projectivement clos.* — Montrons que $(\bar{k}_t)$ vérifie *iii*) ce qui montrera déjà que l'application $\bar{\phi}_t$ est injective. Supposons $\bar{k}_s(w) = \bar{k}_s(w')$ pour $s < t$; posons $w_1 = \bar{k}_t(w)$, $w_2 = \bar{k}_t(w')$; il est clair que $\bar{\zeta}(w_1) = \bar{\zeta}(w_2) = \sigma \leq t$ on peut alors écrire pour tout $p \in Q_+^*$

$$\phi \circ T_p(w_1) = \bar{\tau}_p(w_1) = \bar{k}_{(\sigma-p)_+}(w_1) = \bar{k}_{(\sigma-p)_+}(w_2) = \phi \circ T_p(w_2).$$

On a donc $w_1 = w_2$.

Donnons nous maintenant une famille $(w_s)_{s<t}$ d'éléments de W vérifiant $\bar{k}_s(w_{s'}) = w_s$ si $s \leq s' < t$. La fonction $s \to \bar{\zeta}(w_s)$ est croissante et tend vers une limite $l \leq t$ quand s tend vers t. Si $l < t$, le point $w = w_l$ appartient à l'événement $\{ \bar{\zeta} \leq t \}$ et vérifie $\bar{k}_s(w) = w_s$ pour tout $s < t$. Supposons alors $l = t$, dans ce cas $\bar{\zeta}(w_s) = s$ pour $s < t$ et il en résulte, compte tenu de la remarque faite en *b*), que w_s appartient à W_0.

La famille $(v_p)_{p \in Q_+^*}$ définie par $v_p = \phi^{-1}(w_{(t-p)_+})$ vérifie alors $\tau_h(v_p) = v_{p+h}$ quels que soient p et h dans Q_+^* ; elle définit donc un élément w de W tel que $\zeta_p(w) = w_{(t-p)_+}$ et tel que $\bar{\zeta}(w) = t$; on vérifie alors $\bar{\tau}_s(w) = w_{(t-s)_+}$ pour tout $s > 0$, ce qui s'écrit alors $\bar{k}_s(w) = w_s (s < t)$.

d) On définit à l'aide de la famille $(\bar{k}_t)$ les tribus $\bar{\mathbf{G}}_t^0 = \bigcap_{s>t} \bar{k}_s^{-1}(\bar{\mathbf{G}}^0)$ et la tribu $\mathbf{H}$ des événements strictement antérieurs à $\bar{\zeta}$. On a alors $\bar{\mathbf{G}}^0 = \mathbf{H}$.

(Pour montrer que $\bar{\mathbf{G}}^0 \subset \mathbf{H}$, on utilise les générateurs de $\mathbf{F}^0_{\zeta-}$ et on tire facilement que T_p est mesurable de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{F}^0_{\zeta-}$ pour tout $p > 0$).

En utilisant *a*) nous pouvons énoncer :

$$(\mathrm{W}, \bar{\mathbf{G}}^0) \text{ est un U-espace}$$

Remarque. — Si on suppose en outre que k est mesurable de $\mathrm{F}^0 \otimes \mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}_+}$ dans $\mathbf{F}^0$, on peut définir sur W la tribu $\bar{\mathbf{F}}^0$, limite projective de $\mathbf{F}^0$, puis les tribus $\bar{\mathbf{F}}^0_t$; on montre alors que $\bar{\mathbf{G}}^0$ n'est autre que $\bar{\mathbf{F}}^0_{\bar{\zeta}-}$ tribu des événements de $\bar{\mathbf{F}}^0$, strictement antérieurs à $\bar{\zeta}$, ce qui justifiera les notations ultérieures.

e) Ω *est universellement mesurable dans* $(\mathrm{W}, \bar{\mathbf{G}}^0)$.

C'est un argument maintenant bien connu (cf. [*8*]). Ω, par hypothèse, est universellement mesurable dans un compact métrisable K ; si μ est une mesure sur $(\Omega, \mathbf{F}^0_{\zeta-})$, μ est portée par un borélien A_μ de K ($\mathrm{A}_\mu \subset \Omega$) ; $\phi(\mu)$ est portée par $\phi(\mathrm{A}_\mu)$ qui est un borélien dans $\mathrm{K}^{\mathrm{Q}^*_+}$ d'après le théorème de Lusin. Ω est donc mesurable pour toute mesure de la forme $i(\mu)$. Si maintenant ν est une mesure sur $(\mathrm{W}, \bar{\mathbf{G}}^0)$ on se ramène au cas précédent en considérant la « trace » de ν sur Ω (ce qui nous est autorisé par *a*)).

On dira que W *est la clôture projective de* Ω ; on notera $\bar{\mathbf{F}}$ la complétée universelle de $\bar{\mathbf{G}}^0$, $\bar{\mathbf{F}}_t$ la tribu $\bigcap_{s>t} \bar{k}_s^{-1}(\bar{\mathbf{F}})$ et $\bar{\mathbf{F}}^*$ la tribu $\bar{\mathbf{F}}_{\bar{\zeta}-}$.

3. Construction de la mesure de Föllmer d'une surmartingale

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathbf{F}^0)$. On se donne une surmartingale $(\mathrm{X}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}$, positive, nulle pour $t \geq \zeta$, continue à droite et adaptée à la famille $(\mathbf{F}^{\mathrm{P}}_t)$, où $\mathbf{F}^{\mathrm{P}}_t$ est la tribu engendrée par $\mathbf{F}^0_t$ et les ensembles P-négligeables (la famille $(\mathbf{F}^{\mathrm{P}}_t)$ vérifie les conditions habituelles). On pourra considérer X comme un processus sur W en posant $\mathrm{X}_t(\omega) = 0$ si $w \notin \Omega$, cela nous étant autorisé par 2*e*), ainsi que le fait de pouvoir considérer P comme une probabilité sur W. On peut alors énoncer :

(9) THÉORÈME. — Il existe une mesure μ sur $(\bar{\mathrm{W}}, \bar{\mathbf{F}}^*)$ portée par $(\bar{\zeta} > 0)$, unique, vérifiant $\mu[\bar{\zeta} > \mathrm{T}] = \mathrm{E}[\mathrm{X}_\mathrm{T} ; \mathrm{T} < \bar{\zeta}]$ pour tout temps d'arrêt T de la famille $\bar{\mathbf{F}}_t$.

On peut, au vu de ce qui précède, supposer $\Omega = \mathrm{W}$, c'est-à-dire supposer que Ω est projectivement clos. Cela présentera l'avantage de supprimer les barres. Mais, que l'on se rassure, nous allons, avant de commencer la démonstration, introduire des tildas : il est en effet équivalent de se donner une mesure μ sur $(\Omega, \mathbf{F}^*)$ ou une mesure $\tilde{\mu}$ sur la tribu prévisible, portée par $[\![0\ \zeta]\!]$, le passage de μ à $\tilde{\mu}$ étant donné par les formules $\tilde{\mu}(Z) = \mu(Z_\zeta)$ ou $\mu(z) = \tilde{\mu}(z \circ k)$. On peut alors énoncer le théorème (9) sous la forme

(9′) THÉORÈME. — Il existe sur $(W \times \bar{\mathbb{R}}_+^*, \mathscr{P}^*)$ une mesure unique, portée par $]\!]0\ \zeta]\!]$ et vérifiant $\tilde{\mu}(]\!]T\ \bar{\zeta}]\!]) = E[X_T ; T < \bar{\zeta}]$ quel que soit le temps d'arrêt T de la famille $\bar{\mathbf{F}}_t$.

Nous dirons que $\tilde{\mu}$ *est la mesure de Föllmer* associée à X.

Démonstration. — *a*) L'unicité de μ est évidente puisque les événements $\{T < \zeta\}$ constituent une famille de générateur de $\mathbf{F}^* \cap [\zeta > 0]$.

b) Si X est de la classe (D), engendrée par un processus croissant prévisible intégrable A, la mesure $\tilde{\mu}$ est donnée par $\tilde{\mu}(Z) = E\left(\int_0^\infty Z_s dA_s\right)$ (c'est une mesure sur les ensembles prévisibles classiques, mais, puisque $\tilde{\mu}$ ne charge pas les ensembles évanescents, il n'y a aucune difficulté à prendre sa « restriction » à $\mathscr{P}^*$). Dans les autres notations, cela est équivalent à $\mu(z) = E\left(\int_0^\infty z \circ k_s dA_s\right)$.

Si maintenant Γ est un ensemble aléatoire prévisible de $]\!]0\ \zeta]\!]$, et si $\bar{\mathscr{R}}_\Gamma X$ désigne la réduite gauche de X sur Γ, on peut écrire la formule (3) de la façon suivante :

$$\mu^\Gamma(z) = \mu(z \circ k_{l^\Gamma} l^\Gamma > 0) \tag{10}$$

où μ^Γ représente la mesure de Föllmer de $\bar{\mathscr{R}}_\Gamma X$ et où

$$l^\Gamma(\omega) = \sup\,(s \mid s \leq \zeta(\omega), (\omega, s) \in \Gamma)$$

nous écrirons la formule (10) sous la forme un peu différente

$$\mu(z \circ k_{l^\Gamma}) = \mu^\Gamma(z) + E[z \circ k_0(X_0 - \bar{\mathscr{R}}_\Gamma X_0)] \tag{11}$$

c) Supposons maintenant X quelconque ; X_- (défini à une évanescence près), est prévisible (au sens usuel). Mais on peut en choisir un représentant scs à gauche qui soit prévisible par rapport à la famille $(\mathbf{F}_t)$ que nous appellerons toujours X_-. On pose maintenant

$$\Gamma^n = [X < n] \cap]\!]0\ \zeta]\!],\ L^n(\omega, t) = \sup\,(s\,;\, s \leq t, (\omega, s) \in \Gamma^n)$$
$$l^n(\omega) = \sup\,(s\,;\, s \leq \zeta(\omega), (\omega, s) \in \Gamma^n) = L^n_\zeta\,.$$

D'après (6), L^n est prévisible, continu à gauche, l^n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbf{F}^*)$ et k_{l^n} est mesurable de $(\Omega, \mathbf{F}^*)$ dans lui-même.

On appellera X^n la réduite gauche de X sur Γ^n ; on a bien sûr $X^n \leq n$.

X^n est donc de la classe (D) et on peut lui associer une mesure ν^n sur $(\Omega, \mathbf{F}^*)$. On posera enfin

$$\mu^n(z) = \nu^n(z) + E[z \circ k_0(X_0 - X_0^n)].$$

Puisque $X^n = \bar{\mathscr{R}}_{\Gamma^n} X^{n+1}$, on a d'après (11),

$$\nu^{n+1}(z \circ k_{l^n}) = \nu^n(z) + E[z \circ k_0(X_0^{n+1} - X_0^n)]$$

ajoutons la quantité $E[z \circ k_0(X_0 - X_0^{n+1})]$ aux deux membres, il vient :

(12) $$\mu^{n+1} \circ k_{l^n} = \mu^n.$$

Le système $\Omega_n \overset{k_{l^n}}{\leftarrow} \Omega_{n+1}$ (où tous les Ω_n sont égaux à Ω) est maintenant un système projectif d'ensembles. Munissons chaque Ω_n de la tribu $\mathbf{F}^*$ et de la mesure μ_n. Nous avons un système projectif de mesures bornées, et puisque chaque μ_n est intérieurement régulière, il existe une mesure μ sur $\varprojlim (\Omega_n, k_{l^n})$ muni de la tribu limite projective des $\mathbf{F}^*$. (Voir [5] pour une « démonstration simple » du théorème de Prokhorov sous ces hypothèses). Nous allons maintenant identifier cette limite projective à un sous-ensemble mesurable de Ω, ce qui nous autorisera à considérer μ comme une mesure sur $(\Omega, \mathbf{F}^*)$.

d) Posons $L = \sup_n L^n$, $l = \sup_n l^n$, $H = [\zeta = l] = \{ \omega ; k_l(\omega) = \omega \}$ H est un élément de $\mathbf{F}^*$ et

(13) L'APPLICATION ϕ : $H \to \varprojlim (\Omega_n, k_{l^n})$ *qui à* ω *fait correspondre* $(k_{l^n}(\omega))_{n \geq 1}$ *est une bijection bimesurable si* H *est muni de la tribu induite par* $\mathbf{F}^*$.

On remarquera tout d'abord que les inégalités $l \geq l \circ k_l \geq l \circ k_{l^n} = l^n$ prouvent que $l \circ k_l = l$. Montrons que ϕ est injective : supposons

$$k_{l^n}(\omega) = k_{l^n}(\omega')$$

pour tout n; cela entraîne d'abord $l^n(\omega) = l^n \circ k_{l^n}(\omega) = l^n \circ {}_{l^n}(\omega') = l^n(\omega')$. On montre ensuite facilement que $k_s(\omega) = k_s(\omega')$ quel que soit s inférieur à $l(\omega) = l(\omega')$, d'où le résultat d'après la « continuité à gauche » de k. D'autre part, il est à peu près évident que ϕ est mesurable. Soit $(\omega^n)_{n \geq 1}$ un point de la limite projective ; nous cherchons un point ω de H tel que $\phi(\omega) = (\omega^n)$. $l^n(\omega^n) = l^n(k_{l^n}(\omega^{n+1})) \leq l^n(\omega^{n+1}) \leq l^{n+1}(\omega^{n+1})$; la suite $l^n(\omega^n)$ est croissante en n ; appelons λ sa limite. On définit alors une famille $(\omega_s)_{s < \lambda}$ de la manière suivante :

$\omega_s = k_s(\omega^n)$ où ω^n est choisi de manière à ce que $l^n(\omega^n) \geq s$. On vérifie que ω_s ne dépend pas du point ω^n ainsi choisi et que $k_{s'}(\omega_s) = \omega_{s \wedge s'}$.

Comme Ω est projectivement clos, il existe ω vérifiant $k_\lambda(\omega) = \omega$ et $k_s\omega = \omega_s$ pour $s < \lambda$. On vérifie immédiatement que $\phi(\omega) = (\omega^n)$ et $k_l(\omega) = \omega$.

Il reste à montrer que ϕ^{-1} est mesurable. Soit $A = B \cap (\zeta > t) \cap (\zeta = l)$ un générateur de $\mathbf{F}^*$ sur $H(B \in \mathbf{F}_t)$. On peut écrire

$$A = B \cap [l > t] \cap [\zeta = l] = \bigcup_n (B \cap (l^n > t)) \cap [\zeta = l]$$
$$= \bigcup_n k_{l^n}^{-1}(B \cap (\zeta > t)) \cap [\zeta = l]$$

on a donc, si π_n désigne l'application canonique de la limite projective dans Ω_n, $\phi(A) = \bigcup_n \pi_n^{-1}(B \cap (\zeta > t))$, qui est mesurable dans la limite projective. De même si

$$A = B \cap (\zeta = 0) \cap (l = \zeta)(B \in \mathbf{F}^*),\ \phi(A) = \bigcap_n \pi_n^{-1}(B \cap (\zeta = 0)).$$

e) Nous avons donc construit une mesure μ sur $(\Omega, \mathbf{F}^*)$, portée par $(\zeta = l)$ et vérifiant $\mu \circ k_{l^n} = \mu^n$ quel que soit n. Nous avons encore à montrer que μ satisfait (9), ou que $\tilde{\mu}$ satisfait (9'). Nous raisonnerons sur $\tilde{\mu}$; on a le résultat suivant :

(14) PROPOSITION. — Si Z est un processus prévisible continu à gauche, $\lim_n \tilde{\mu}^n(Z) = \tilde{\mu}(Z)$.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $\mu \circ k_l = \mu$; on peut en effet écrire, puisque μ est portée par $(\zeta = l)$,

$$\mu(z) = \mu(z \circ k_\zeta\,;\ \zeta = l)\mu(z \circ k_l 1_{(\zeta = l)} = \mu(z \circ k_l).$$

Si maintenant Z est continu à gauche,

$$\lim_n \tilde{\mu}^n(Z) = \lim_n \tilde{\mu}(Z_{L^n}) = \tilde{\mu}(Z_L) = \tilde{\mu}(Z).$$

Appliquons cette proposition à $Z = 1_{]\!]T\ \zeta]\!]}$, il vient

$$\tilde{\mu}(]\!]T\ \zeta]\!]) = \lim_n \tilde{\mu}^n(]\!]T\ \zeta]\!]) = \lim_n E[X_T^n\,;\ T < \zeta] = E[X_T\,;\ T < \zeta].$$

Le même raisonnement appliqué à $T = 0$, prouve que

$$\tilde{\mu}(]\!]0\ \zeta]\!]) = E[X_0] = \|\tilde{\mu}\|.$$

Le théorème 9' est donc démontré.

(14') Il résulte immédiatement de (9') que deux surmartingales indistinguables admettent même mesure de Föllmer. Les surmartingales sont définies à une évanescence près (elles ont d'ailleurs été choisies adaptées aux tribus complétées). Il n'en est pas de même de ce que nous avons appelé X_-, c'est-à-dire une version prévisible de la régularisée à gauche de X pour laquelle on dispose d'une liberté beaucoup moins grande.

IV. MESURES DE FÖLLMER ET BALAYAGE

1. Définition

Soit μ une mesure bornée sur $(\Omega, \mathbf{F}^*)$ et l une variable aléatoire $\mathbf{F}^*$-mesurable, majorée par ζ ; nous appellerons l-balayée de μ la mesure μ^l définie par $\mu^l(z) = \mu(z \circ k_l;\ l > 0)$.

(16) THÉORÈME ET DÉFINITION. — Si μ est la mesure de Föllmer d'une surmartingale X, positive, la mesure μ^l est la mesure de Föllmer d'une surmartingale X^l que l'on appellera l-réduite de X.

Démonstration. — Posons $L_s = l \circ k_s$; on a $L_s \leq \zeta \wedge s$ et on écrit pour tout temps d'arrêt T,

$$\tilde{\mu}^L(]\!]T\ \zeta]\!]) = \tilde{\mu}(\{(\omega, t) ; L_t(\omega) > T(\omega)\}) \leq \tilde{\mu}(]\!]T\ \zeta]\!]) \tag{17}$$

En considérant d'abord les temps d'arrêt constants, cela nous montre que $1_{(t<\zeta)} . \mu^l$ est absolument continue par rapport à $1_{(t<\zeta)}. P$ sur la tribu $\mathbf{F}_t$ et admet une densité X_t^l, nulle sur $[t \geq \zeta]$.

Comme $E[X_t^l] = \tilde{\mu}(L > t)$ est continu à droite, il existe une version continue à droite, nulle après ζ, de la surmartingale X^l. Il n'y a aucune difficulté, en revenant aux temps d'arrêt, à montrer que la mesure de Föllmer de X^l et μ^l. X^l est majorée par X.

(18) *Remarque.* — Supposons L continu à gauche ; si l'on appelle dans ce cas T_t le début de l'ensemble aléatoire $[L > t]$, on peut écrire $[L > t] =]\!]T_t\ \infty]\!]$. Il résulte alors immédiatement de la caractérisation des mesures de Föllmer que X^l est la version continue à droite de la surmartingale. $E[X_{T_t} \mid \mathbf{F}_t]$. Nous allons abandonner cette notion générale de réduite et étudier plus particulièrement trois cas intéressants. Nous traiterons tout de suite le premier exemple.

(19) PROPOSITION. — Soit X une surmartingale positive admettant μ comme mesure de Föllmer et T un temps d'arrêt. La version continue à à droite de la surmartingale $E[X_{T+t} \mid \mathbf{F}_t]$ admet comme mesure de Föllmer la mesure μ' définie par

$$\mu'(z) = \mu(z \circ k_{\zeta - T} ;\ \zeta > T) \tag{20}$$

Démonstration. — On peut toujours se ramener au cas où $[\![T]\!] \subset [\![0\ \zeta[\![$. On applique alors (16) en prenant $l = (\zeta - T)^+$. La mesure μ' définie en (20) est la l-balayée de μ et le processus L est continu à gauche. La remarque (18) donne alors le résultat.

La formule (20) appliquée aux temps d'arrêt constants permet de caractériser les martingales : X est une martingale si et seulement si

$$\mu(z) = \mu(z \circ k_{\zeta - a}\,;\, \zeta > a)$$

quel que soit $a \geq 0$. Il est facile de montrer que cela est équivalent au fait que μ est portée par $[\zeta = \infty]$. La décomposition $\mu = \mu 1_{(\zeta = \infty)} + \mu 1_{(\zeta < +\infty)}$ d'une mesure de Föllmer correspond à la décomposition de Riesz des surmartingales.

2. **Réduite ordinaire. Ensembles complètement évanescents**

Soit Γ un ensemble aléatoire adapté contenu dans $[\![0\ \zeta[\![$. Nous allons appliquer (16) à la variable aléatoire $l^\Gamma(\omega) = \sup\,(t, (\omega, t) \in \Gamma)$. On sait que $L_t^\Gamma = l^\Gamma \circ k_t$ est continu à gauche; la remarque (18) est donc valable. On peut donc énoncer, si l'on pose $T_t^\Gamma(\omega) = \inf\,(s\,;\, s > t, (\omega, s) \in \Gamma)$.

(21) Proposition. — Si X est une surmartingale positive de mesure de Föllmer μ, la version continue à droite de la surmartingale $E[X_{T_t^\Gamma} \mid \mathbf{F}_t]$ admet pour mesure de Föllmer, la mesure μ^Γ définie par

$$\mu^\Gamma(z) = \mu(z \circ k_{l^\Gamma}\,;\, l^\Gamma > 0)\,.$$

Nous allons profiter de cette proposition pour caractériser les mesures de Föllmer sur $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+$.

(22) Définition. — Nous dirons qu'un ensemble aléatoire prévisible est complètement évanescent, s'il est contenu dans un ensemble prévisible ouvert à gauche évanescent.

(23) Proposition. — Une mesure μ positive bornée, portée par $]\!]0\ \zeta]\!]$, sur la tribu des prévisibles, est la mesure de Föllmer d'une surmartingale positive X, si et seulement si $\bar{\mu}$ ne charge pas les ensembles complètement évanescents.

Démonstration. — *a*) Montrons que si $\bar{\mu}$ est associée à X, $\bar{\mu}$ ne charge pas les ensembles complètement évanescents. Soit G un ensemble prévisible, ouvert à gauche, évanescent, on peut écrire, les notations étant celles de (21),

$$0 = \bar{\mu}^G(\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+) = \bar{\mu}(L_G > 0) \geq \bar{\mu}(G)$$

en ayant remarqué que la mesure μ^G est nulle en vertu de (21).

b) Si maintenant $\tilde{\mu}$ ne charge pas les ensembles complètement évanescents, il n'y a pas de difficulté à montrer que $1_{(\zeta > t)}\mu \,|\, \mathbf{F}_t$ est absolument continue par rapport à $1_{(\zeta > t)}P \,|\, \mathbf{F}_t$. On construit alors une surmartingale X admettant μ comme mesure de Föllmer comme d'habitude.

Voici une application simple de la notion d'ensemble complètement évanescent. Appelons $(\mathbf{F}_t^P)$ la famille de tribus obtenue en complétant (F_t^0) de la manière habituelle et soit Q une deuxième probabilité sur $(\Omega, \mathbf{F}^0)$. Effectuons la décomposition de Lebesgue.

(24) $$Q = X_t \,.\, P + Q(N_t \,.\,)\,;\; P(N_t) = 0$$

de Q par rapport à P sur $\mathbf{F}_t$. Il est bien connu que (X_t) est une surmartingale ; nous allons montrer ici que (X_t) peut être choisi continu à droite et qu'on peut « recoller » les N_t de manière à obtenir un ensemble évanescent.

(25) Proposition. — Il existe une surmartingale continue à droite (X_t) et un ensemble évanescent N tel que l'on puisse écrire (24) sur $(\mathbf{F}_t)$, N_t désignant la section de N en t.

Démonstration. — Soit Q_0 la restriction de Q à $(\zeta > 0)$. Considérons la mesure $\tilde{Q}_0$ sur $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+$; elle est portée par $]\!]0\ \zeta]\!]$ et, d'après un résultat de Dellacherie on peut décomposer $\tilde{Q}_0$ de la manière suivante :

$\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2$ où $\tilde{Q}_1$ ne charge pas les ensembles complètement évanescents et $\tilde{Q}_2$ est portée par un ensemble complètement évanescent H de $]\!]0\ \zeta]\!]$. Nous appellerons X^1 la surmartingale continue à droite admettant $\tilde{Q}_1$ pour mesure de Föllmer. Effectuons d'autre part la décomposition de Lebesgue de Q par rapport à P sur $\mathbf{F}$ $Q = Z \,.\, P + Q(K \cap .)$. On peut écrire, si $A \in \mathbf{F}_t$

(26) $$Q(A \cap (\zeta > t)) = Q_0(A \cap (\zeta > t)) = E[X_t^1 \,.\, 1_A] + Q(A \cap (\zeta > t) \cap H_\zeta)$$

(26′) $$Q(A \cap (\zeta \leq t)) = E[Z\,;\, A \cap (\zeta \leq t)] + Q(A \cap (\zeta \leq t) \cap K)$$

additionnons (26) et (26′); il vient

$$Q(A) = E[(X_t^1 + Z1_{(\zeta \leq t)})1_A] + Q((A \cap (\zeta > t) \cap H_\zeta) \cup (A \cap (\zeta \leq t) \cap K))\,.$$

d'où le résultat en posant $X_t = X_t^1 + Z1_{(\zeta \leq t)}$ et

$$N = (H_\zeta \times [0\ \infty] \cap [\![0\ \zeta[\![) \cup (K \times [0\ \infty] \cap [\![\zeta + \infty]\!])$$

En réalité cette notion ne serait vraiment intéressante que si l'on savait montrer le théorème suivant : tout ensemble évanescent non complètement évanescent porte une mesure de Föllmer. Nous n'avons pas pu résoudre cette question.

Nous pouvons aussi énoncer comme conséquence de (23) le résultat suivant :

(27) PROPOSITION. — Soit l $\mathbf{F}^*$-mesurable, majoré par ζ et μ une mesure de Föllmer ; définissons une mesure ν^l sur $\mathbf{F}^*$ par

$$\nu^l(Z) = \mu(Z \circ k_l\,;\, 0 < l < \zeta)$$

ν^l est une mesure de Föllmer associée à une surmartingale de la classe (D).

Démonstration. — Soit $\lambda = l 1_{(l<\zeta)}$; on a $\nu^l = \mu^\lambda$ d'où la première assertion. Notons $L = l \circ k$, $\Lambda = \lambda \circ k$. On a alors pour A prévisible inclus dans $]\!]0\ \zeta]\!]$

$$1_A(\omega, \Lambda(\omega, t)) 1_{(0<\Lambda(\omega,t))} 1_{(0<t\leq\zeta(\omega))}$$
$$= 1_A(\omega, L(\omega, t)) 1_{(0<L(\omega,t)<t)} 1_{(0<t\leq\zeta(\omega))} \leq 1_{]\!]T_A\zeta]\!]}(\omega, t)$$

avec $$T_A(\omega) = \inf(t, (\omega, t) \in A),$$

par suite si A est évanescent, $1_{]\!]0\ \zeta]\!]}(1_A)_\Lambda 1_{(\Lambda>0)}$ est complètement évanescent, donc $\tilde{\nu}^l(A) = 0$ et $\tilde{\nu}^l$ ne charge pas les ensembles évanescents — d'où le résultat —.

Remarque. — On a par exemple la conséquence suivante

Si X est un potentiel et T un temps d'arrêt > 0, alors $E[X_{T+t} \mid \mathbf{F}_t]$ est de la classe (D).

3. **Réduite extérieure**

Soit H un ensemble prévisible inclus dans $]\!]0\ \zeta]\!]$ et $\bar{l}^H(\omega) = \sup(t, t \leq \zeta(\omega), (\omega, t) \in H)$. Nous appellerons réduite extérieure de X sur H la $\bar{l}^H$ réduite de X et nous la noterons $\bar{X}^H$ (cf. (16)).

Nous noterons H^g la fermeture gauche de H ; il est extrêmement facile de voir que la mesure de Föllmer de $\bar{X}^H$ est portée par H^g. Nous allons maintenant donner une condition nécessaire et suffisante pour que réduite gauche et réduite extérieure coïncident.

Soit T un processus prévisible ; on notera $\underline{T}$ le processus défini par

(28) $\underline{T}_t(\omega) = \varliminf_{\substack{s<t \\ s\to t}} T_s(\omega)$; on sait d'après (6) que $\underline{T}$ est prévisible.

(29) LEMME. — Soient T^1 et T^2 deux processus prévisibles P-indistinguables ; alors les ensembles $(\underline{T}^1 = +\infty)$ et $\underline{T}^2 = +\infty)$ sont $\tilde{\mu}$ p. s.-égaux pour toute mesure de Föllmer μ.

Démonstration. — Les notations étant celles de (5),

$$(\underline{T}^i = +\infty) = \bigcap_n ((\omega, t) L^{(T^i<n)}(\omega, t) < t)$$

et $L^{(T^i<n)}$ étant continu à gauche, $(L^{(T^1<n)} \neq L^{(T^2<n)})$ est complètement évanescent.

Nous pouvons alors énoncer

(30) PROPOSITION. — Soit X une surmartingale positive de mesure de Föllmer $\tilde{\mu}$; alors

a) $\bar{\mathscr{R}}_H X \leq \bar{X}^H \leq X$

b) $\bar{\mathscr{R}}_H X = \bar{X}^H$ si et seulement si H n'a $\tilde{\mu}$-p. s. aucun point isolé à gauche situé dans $(\underline{X} = +\infty)$ (où X est défini comme en (28) à partir d'une version prévisible quelconque de X_-).

La condition *b*) s'écrit aussi $\mu(H_\zeta \cap (l^H < \zeta) \cap (\underline{X}_\zeta = +\infty)) = 0$.

Démonstration. — Revenons à la construction de μ et prenons les notations du III.3). Puisque $\bar{\mathscr{R}}_{\Gamma_n} X \uparrow X$, il résulte immédiatement de la définition d'une réduite gauche que $\bar{\mathscr{R}}_H \bar{\mathscr{R}}_{\Gamma_n} X \uparrow \bar{\mathscr{R}}_H X$; appelons Y^n la suite de surmartingales du premier membre et Y sa limite. $\bar{\mathscr{R}}_{\Gamma_n} X$ est de la classe (D) et sa mesure de Föllmer ν^n vérifie, par construction même de μ,

$$\nu^n(Z) = \mu(Z \circ kl_n \,;\, l^n > 0)\,.$$

Et puisque sur la classe (D), réduite gauche et réduite extérieure coïncident d'après (3), la mesure de Föllmer de Y^n est la l^H balayée de ν^n; c'est la mesure σ^n définie par $\sigma_n(z) = (z \circ k_{\lambda^n} \,;\, \lambda^n > 0)$ avec $\lambda_n = l^H \circ k_{l^n}$ appliquons ce résultat à la variable aléatoire $z = 1_{(T<\zeta)}$ où T est un temps d'arrêt; $s \to z \circ k_s$ étant continu à gauche, il vient

$$E[Y_T \,;\, T < \zeta] = \lim_n E[Y_T^n \,;\, T < \zeta] = \lim_n \mu(z \circ k_{\lambda^n} \,;\, \lambda^n > 0) = \mu(z \circ k_\lambda \,;\, \lambda > 0)$$

où λ est la limite des λ^n.

Puisque $\lambda \leq l^H$ on a $\bar{\mathscr{R}}_H X \leq \bar{X}^H$; il y a égalité si et seulement si $\lambda = l^H \mu$-p.s., ce qui est équivalent à $\mu((l^H < l^H) \cap \bigcap_n (l^n < \zeta)) = 0$ d'où les résultats, en vertu du lemme (29), (en effet $(l^H < l^H) = H_\zeta \cap (l^H < \zeta)$).

Nous remarquerons en outre que $\tilde{\mu}(\underline{X} = +\infty \,;\, (X_- < n)^g) = 0$, ce qui signifie que, sur $(\underline{X}_\zeta = +\infty)$, l^n est une suite μ-p.s. strictement croissante.

Voici une autre application de cette proposition à la « seconde décomposition de Riesz » d'une surmartingale, déjà donnée sous une autre forme par Föllmer.

(31) THÉORÈME. — Posons $\mu = \mu_1 + \mu_2$ avec $\mu_1 = \mu . 1_{(\underline{X}_\zeta < +\infty)}$ et $\mu_2 = \mu . 1_{(\underline{X}_\zeta = +\infty)}$; appelons X^1 et X^2 les surmartingales admettant respectivement μ_1 et μ_2 comme mesures de Föllmer; alors

. X^1 est de la classe (D)

. X^2 est une martingale locale; de plus toute surmartingale de la classe (D) fortement majorée par X^2 est nulle.

Démonstration. — *a*) Montrons que $\tilde{\mu}$ ne charge pas les ensembles prévisibles évanescents inclus dans $(\underline{X} < +\infty)$. Soit N un tel ensemble; d'après la proposition (30), la réduite extérieure de X sur N est égale à sa réduite gauche sur N ; elle est donc nulle ; la l^{-N} balayée de μ est donc nulle, soit

$$0 = \mu(l^N > 0) \geq \tilde{\mu}(N).$$

$\tilde{\mu}_1$ ne charge pas les ensembles évanescents de $(\underline{X} < +\infty)$; comme elle ne charge pas non plus les autres, X^1 est de la classe (D).

Si Z est une surmartingale fortement majorée par X^2 et si Z est de la classe (D) sa mesure de Föllmer est portée par l'ensemble évanescent $(\underline{X} = +\infty)$ et ne charge pas les ensembles évanescents ; elle est donc nulle.

D'autre part, il ressort de la définition de μ_2 que $\mu_2(l^{\Gamma^n} < \zeta) = \| \mu_2 \|$. Appelons alors D_n le début de (Γ^n) ; on a $D_n \leq l^{\Gamma^n}$ sur $(D_n < \infty +)$, et par conséquent $\mu_2(D_n < \zeta) = \| \mu_2 \|$.

On a alors $E[X^2_{D_n \wedge t}] = \| \mu_2 \|$, ce qui montre que $(X^2_{D_n \wedge t})$ est une martingale.

Nous dirons que X^2 est la partie explosive de X.

(32) Proposition. — $\tilde{\mu}^2$ est portée par le graphe d'un temps d'arrêt prévisible, P-presque sûrement égal à $\infty +$.

Démonstration. — Posons $S = \inf(t > 0, \underline{X}_t = +\infty)$ et soit T le temps d'arrêt admettant pour graphe $[\![T]\!] = [\![S]\!] \cap (\underline{X} = +\infty)$. Posons alors

$$H =]\!]0\ S]\!] - [\![T]\!] \quad \text{et} \quad X' = X_{-}1_H + \infty\, 1_{H^c \cap]\!]0\ \zeta]\!]}$$

X' est une version prévisible de X_- ; μ_2 est donc portée par

$(\underline{X}' = +\infty) \cap (\underline{X}' < +\infty)^g$, qui n'est autre que $[\![T]\!]$.

Nous allons maintenant énoncer une proposition qui caractérise complètement les réduites gauches. Décomposons X en $X^1 + X^2$, comme pour le théorème (31). Soit H un ensemble prévisible inclus dans $]\!]0\ \zeta]\!]$; alors

(33) Proposition. — La réduite gauche de X sur H est la somme de la réduite extérieure de X^1 sur H et de la réduite ordinaire de X^2 sur $H \cap]\!]0\ \zeta]\!]$.

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où $X = X^2$; reprenons alors les variables aléatoires λ^n de la démonstration de (30) ; on a remarqué que les (l_n) sont μ_2-presque sûrement croissantes ; la limite des λ^n est donc μ_2-égale à $l^H(\omega) = \sup(t ; t < \zeta(\omega), (\omega, t) \in H)$ d'où le résultat.

(34) Soit l $\mathbf{F}^*$-mesurable, majorée par ζ ; comme conséquence de la proposition (27), on peut maintenant énoncer :

PROPOSITION. — La mesure de Föllmer associée à la partie explosive de X^l est $1_{(l=\zeta)} \cdot \mu_2$.

Nous pouvons donc donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réduite extérieure soit de la classe (D).

(35) DÉFINITION. — Nous dirons qu'un ensemble prévisible H réduit X si $\bar{X}^H$ est de la classe (D). (Si X est une martingale locale, il est facile de voir qu'un temps d'arrêt T réduit X au sens classique si et seulement si $]\!]0\ T]\!]$ réduit X au sens de (35)).

(36) THÉORÈME. — H réduit X si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

a) $H^g \subset (\underline{X} < +\infty)\tilde{\mu}$.p.s.

b) $\mu_2(l^H < \zeta) = \|\mu_2\|$ (μ_2 partie explosive de μ). C'est une conséquence facile de (34).

(37) *Remarque.* — Le théorème précédent a la conséquence suivante : si X est une surmartingale pour laquelle il existe une version de $\underline{X}$ qui est partout finie, alors X est de la classe (D). Bien remarquer que la version ainsi choisie doit être finie sur W et non pas seulement sur Ω dans le cas où Ω n'est pas projectivement clos. (Voir le contre-exemple n° 1).

(38) LE THÉORÈME DE FATOU. — Soient X et Y deux martingales de mesures de Föllmer μ et ν. Écrivons la décomposition de Lebesgue $\nu = h\mu + \nu'$ de ν. par rapport à μ

$$\text{On a alors } \lim_{s\to+\infty} \frac{X_s}{Y_s} = h \qquad \nu\text{-p. s.},$$

Démonstration. — *a*) Supposons tout d'abord $\nu = P$; le théorème est trivial si X est de la classe (D). Compte tenu de la décomposition (31), il suffit donc de supposer X explosive ; nous avons à montrer que dans ce cas, $X_{\infty-} = 0$ P p.s. Réintroduisons alors les ensembles Γ^n, ainsi que les surmartingales X^n de mesure de Föllmer ν^n ayant servi à construire μ. Puisque Γ^n réduit X, on a,

$$\mu(l^n < \zeta) = \|\mu\| = \mu(l^n < +\infty),$$

ce qui entraîne

$$\nu^n(\zeta < +\infty) = \mu(\zeta \circ k_{l^n} < \infty, l^n > 0) = \mu(0 < l^n < +\infty) = \| \nu^n \|$$

ν^n est donc portée par $(\zeta < +\infty)$; il en résulte (cf. (20)) que X^n est un potentiel. On a donc $X^n_{\infty -} = 0$ P-p. s.

D'autre part, $X_{\infty -} = X^n_{\infty -}$ sur $\{ X_{\infty -} < n \}$, par définition même de X^n. On a donc $X_{\infty -} = 0$ P-p.s. sur $(X_{\infty -} < +\infty)$, d'où le résultat.

b) On se ramène au cas *a*) par des arguments standards : on pose $Z = \frac{X}{Y}\left(\frac{0}{0} = 0\right)$ et l'on montre comme d'habitude que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) X est une martingale relativement à P

(*ii*) Z est une martingale relativement à ν.

On pourrait montrer des théorèmes plus fins, notamment quelques-uns de ceux qui se trouvent dans [*4*] à l'aide de la proposition (33).

V. DEUX CONTRE-EXEMPLES

Nous allons donner deux exemples qui montrent que, même si Ω est un bon espace, une surmartingale (X_t) sur Ω n'admet pas nécessairement de mesure de Föllmer. Le premier est une variante d'un exemple de Johnson et Helms. Il nous ont été signalés l'un et l'autre par Walsh.

1) Considérons le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, appelons W l'espace des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^3$, à durée de vie ζ, continues à droite et continues sur $]0\ \zeta[$. W est projectivement clos. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ la famille des applications coordonnées de W dans $\mathbb{R}^3$; on munit W de la probabilité P qui fait de (B_t) un mouvement brownien issu de l'origine.

Posons $g(x, y) = \frac{1}{\| x - y \|} ((x, y)\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et fixons $y \neq 0$.

$X_t = g(B_t, y)$ est alors une surmartingale positive, qui est à la fois une martingale locale (les temps d'entrée de (B_t) dans les boules de centre y réduisent X) et un potentiel (au sens de la décomposition de Riesz). X est donc explosive et sa mesure de Föllmer μ est portée par $(\zeta < +\infty)$.

Posons alors $X_- = \liminf_{\substack{s < t \\ s \to t}} X_s$; μ est portée par $(X_{\zeta -} = \infty) \cap (\zeta < +\infty)$.

Il est facile d'identifier cet événement : c'est l'ensemble des trajectoires à durée de vie finie, continues sur $]0\ \zeta[$, et ayant une limite à gauche égale à y en ζ. Ce résultat est bien connu, vraisemblablement depuis Doob. Venons-en maintenant au contre exemple proprement dit. Il est bien connu que le brownien à trois dimensions transite dans les ensembles relativement compacts ; si nous appelons E le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^3$, le sous-ensemble Ω de W formé des trajectoires à valeurs dans E-$\{ y \}$ et dont les limites à gauche existent sur $]0 \ \zeta]$ ($\zeta \leq \infty$) et appartiennent aussi à E-$\{ y \}$ porte P. Ω est un excellent espace (il est lusinien).

Pourtant la surmartingale (X_t) définie sur Ω n'admet pas de mesure de Föllmer. On voit également que la remarque (37) est en défaut sur Ω : X_- est partout fini et pourtant X n'est pas de la classe (D).

2. Le « crocodile de Littlewood »

Dans le plan complexe, soit C_0 l'intérieur du carré de sommets 0, 1, $1 + i$ et i ; enlevons à C_0 les segments

$$\left[2^{-2n+1} + i/4 \ 2^{-2n+1} + i\right] \quad \text{et} \quad \left[2^{-2(n+1)}, 2^{-2(n+1)} + 3\frac{i}{4}\right] \qquad (n \text{ entier}).$$

Le domaine restant est un ouvert C simplement connexe du plan (crocodile de Littlewood).

Soit A_n l'ouvert de C défini par $A_n = C \cap \left(\operatorname{Re} Z < \frac{1}{n}\right)$.

Il existe une fonction u harmonique positive finie sur C, telle que $\hat{R}_{A_n} u = u$ ($\hat{R}_A u$ réduite de u sur A au sens classique).

Voici comment on peut construire une telle fonction : appelons G la fonction de Green de C ; soit α un point de C et (x_n) une suite de points de C convergeant, au sens ordinaire vers $\frac{i}{2}$, et pour la topologie de Martin vers x si $u = \lim_n \frac{G(.\,, x_n)}{G(\alpha, x_n)}$ ($u(\alpha) = 1$), u a la propriété désirée. (Les A_n sont les traces sur C de voisinages de Martin du point x).

Considérons alors W, l'espace des applications de $\mathbb{R}_+$ dans C, à durée de vie, continues sur $]0 \ \zeta[$; $(B_t)_{t \geq 0}$ est la famille des applications coordonnées. Soit $a \in C$; munissons W de la probabilité P_a faisant de (B_t) un mouvement brownien issu de a et tué à la sortie de C. P_a est portée par le sous-ensemble Ω de W des applications limitées à gauche dans $\bar{C}$ en ζ. ($\bar{C}$ est le carré fermé). Soit $l_n(w) = \sup (t, B_t(w) \in A_n)$.

$T_n(\omega) = \inf (t > 0, B_t(\omega) \in A_n)$.

μ_a désignant la mesure de Föllmer associée à la surmartingale $u(B_t)$ on tire facilement de $\hat{R}_{A_n} u = u$ que $\mu_a = \mu_a^{l_n}$.

Par suite μ_a est portée par l'ensemble $\{ w \mid T_n(w) < \zeta(w) \}$ pour tout n, qui est un ensemble de trajectoires n'ayant pas de limite à gauche en ζ

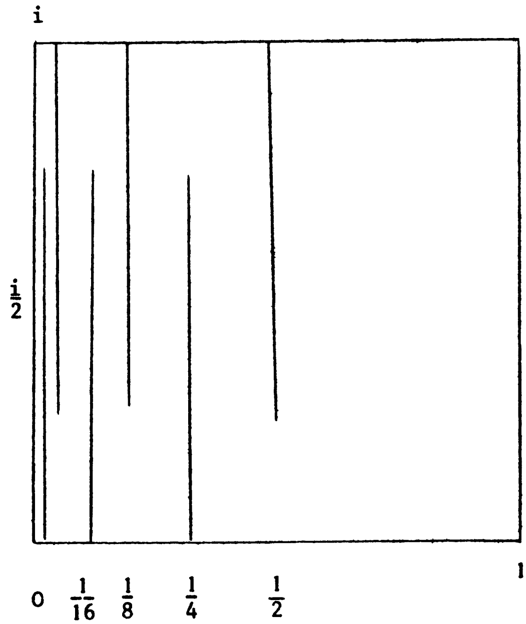

FIG. 1.

pour la topologie usuelle. Cet exemple est un peu plus raffiné que le précédent : il montre que, partant d'un processus même très régulier comme le mouvement brownien, le passage à une mesure de Föllmer ne conserve les régularités à gauche que sur $]0, \zeta[$, le point ζ étant exclu. On utilise ici le passage de Ω à sa clôture projective W dans toute sa force.

VI. APPLICATION AUX *u*-PROCESSUS

Nous voulons donner une construction de *u*-processus d'un processus de Markov à l'aide de la mesure de Föllmer.

Nous allons d'abord rappeler quelques définitions extraites de [*2*] et essayer de nous ramener à la situation du III.

(39) $(\Omega, \mathbf{F}^0, k, \zeta)$ est un espace mesurable, muni d'un opérateur de meurtre k, de durée de vie ζ ; on conserve les notations du II et les hypothèses (*i*) et (*ii*). On supposera donné un *opérateur de translation θ en* dualité avec k, c'est-à-dire une famille $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ d'applications de Ω dans lui-même vérifiant :

α) $(\omega, s) \to \theta_s\omega$ est mesurable de $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathbf{F}^0 \otimes \mathrm{B}(\mathbb{R}_+))$ dans $(\Omega, \mathbf{F}^0)$.

β) $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}, \quad \theta_0\omega = \omega$

et pour tout ω tel que $\zeta(\omega)$ est fini et pour $t \geq \zeta(\omega)$, $\theta_t\omega = \theta_{\zeta(\omega)}(\omega)$.

γ) $\zeta \circ \theta_t = (\zeta - t)_+$

δ) $k_s \circ \theta_t = \theta_t \circ k_{s+t}(s \in \bar{\mathbb{R}}_+, t \in \bar{\mathbb{R}}_+)$

E *désignera un U-espace*, **E** sa tribu borélienne et **E*** la complétée universelle de **E** ; on adjoindra à E un point cimetière ∂ et on prolongera toute fonction f sur E à $\mathrm{E}_\partial = \mathrm{E} \cup \{ \partial \}$ par $f(\partial) = 0$.

DÉFINITION. — Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathbf{F}^0)$, portée par $(\zeta > 0)$. Nous appellerons processus $\mathbb{P}$-fortement markovien la donnée :

— d'une fonction aléatoire $(\mathrm{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs dans E_∂, continue à droite, vérifiant les conditions suivantes :

$$s > t \Rightarrow \mathrm{X}_t \circ k_s = \mathrm{X}_t \qquad s \leq t \Rightarrow \mathrm{X}_t \circ k_s = \partial$$

$\mathrm{X}_s \in \mathrm{E}$ sur $(\zeta > s)$ et $\mathrm{X}_s \circ \theta_t = \mathrm{X}_{s+t}$ (on définira $\mathrm{X}_\infty(\omega) = \partial$)

— d'une famille $(\mathbb{P}_x)_{x \in \mathrm{E}}$ de probabilités sur $(\Omega, \mathbf{F}^0)$ telle que

a) pour tout Z, $\mathbf{F}^0$-mesurable, $x \to \mathrm{E}_x(\mathrm{Z})$ est universellement mesurable sur E et

b) pour tout Z, $\mathbf{F}^0$-mesurable et tout temps d'arrêt T de la famille $(\mathbf{F}_t^0)$,

$$\mathrm{E}[\mathrm{Z} \circ \theta_\mathrm{T} ; \mathrm{T} < \zeta] = \mathrm{E}[\mathrm{E}_{\mathrm{X}_\mathrm{T}}(\mathrm{Z}) ; \mathrm{T} < \zeta] \tag{40}$$

(E espérance mathématique associée à $\mathbb{P}$, E_x à $\mathbb{P}_x$).

Si m est une probabilité sur E, on définit $\mathbb{P}_m = \int_\mathrm{E} \mathbb{P}_x m(dx)$; on dira que le processus est *fortement markovien* si, quelle que soit la loi m, il est $\mathbb{P}_m$-fortement markovien.

P_t défini par $\mathrm{P}_t f(x) = \mathrm{E}_x[f(\mathrm{X}_t)]$ est un semi-groupe sous markovien sur E.

Nous supposerons dans la suite que $(\Omega, \mathbf{F}^0, k, \theta, \mathrm{X}, \mathbb{P}_x)$ est un processus fortement markovien, vérifiant les hypothèses II *i*) *ii*), III *iii*) et *iv*), que (Ω, k) est projectivement clos et que :

Si u est une fonction (P_t)*-excessive, nulle en* ∂*, pour toute loi initiale m,* $u(\mathrm{X})$ *est* $\mathbb{P}_\mu$ *indistinguable d'un processus continu à droite.*

(Ces hypothèses sont en particulier vérifiées si $(\Omega, \mathbf{F}^0)$ est la réalisation canonique d'un semi-groupe droit sur E co-souslinien, munie des opérateurs de membre et de translation canoniques).

(44) *Remarques.* — Nous allons préciser quelques questions de mesurabilité.

1) Pour toute variable aléatoire H, **F**-mesurable, $\omega \to \theta_H(\omega)$ est mesurable sur $0 \leq H < +\infty$ de **F** dans **F**.

2) Si S et T sont deux $\mathbf{F}_t$-temps d'arrêt, soit

$$U = T + S \circ \theta_T (U = +\infty \quad \text{sur} \quad T = +\infty).$$

U *est un* $\mathbf{F}_t$*-temps d'arrêt*

(il est clair que U est **F**-mesurable et on vérifie facilement

$$k_t^{-1}(U < t) = (U < t)).$$

3) On déduit de 2) que si Z est $\mathbf{F}^*$-mesurable et si T est un $\mathbf{F}_t$-temps d'arrêt, $\omega \to Z \circ \theta_T(\omega) 1_{(T<\zeta)}(\omega)$ est $\mathbf{F}^*$-mesurable.

En particulier si f est universellement mesurable sur E, $f \circ X_T$ est $\mathbf{F}^*$-mesurable.

4) Si Z est **F**-mesurable, $x \to E_x(Z)$ est $\mathbf{E}^*$-mesurable

5) La relation (40) reste vraie pour un $\mathbf{F}_t$-temps d'arrêt, par suite $(\Omega, \mathbf{F}^*, X, \mathbb{P}_x)$ est un processus fortement markovien.

(42) *Remarque.* — Toutes les informations données portent sur $(\zeta > 0)$; on a supposé (Ω, k) projectivement clos; voici un moyen de s'y ramener si k *est mesurable de* $\mathbf{F}^0 \times B(\bar{\mathbb{R}}_+)$ *dans* $\mathbf{F}^0$:

Soit ω_0 un point de $(\zeta = 0)$; définissons k' et θ' sur $\Omega' = (\zeta > 0) \cup \{ \omega_0 \}$ comme suit :

$$\begin{array}{llll} k'_t(\omega) = k_t(\omega) & \text{si} \quad t > 0\,, & k'_0(\omega) = \omega_0 & \\ \theta'_t(\omega) = \theta_t(\omega) & \text{si} \quad t < \zeta(\omega) & \theta'_t(\omega) = \omega_0 & \text{si} \quad t \geq \zeta(\omega) \end{array}$$

$\mathbf{F}^0 \mid \Omega$, sera toujours notée $\mathbf{F}^0$.

$(W, \bar{\zeta}, \bar{k}, \bar{\mathbf{F}}^0)$ désignant la clôture projective de $(\Omega', \zeta', k', \mathbf{F}^0)$ (voir III.2)), on peut prolonger θ' en θ à W par :

$$\theta_t(w) = \omega_0 \quad \text{si} \quad t \geq \bar{\zeta}(w);$$

si $t < \bar{\zeta}(w)$, $\bar{\theta}_t(w)$ désigne l'unique élément x de W tel que $\bar{\zeta}(x) = \bar{\zeta}(w) - t$ et $\bar{k}_s x = \theta_t \circ \bar{k}_{s+t}(w)$ pour tout $s < \zeta(w) - t$.

(Rappelons que $\bar{k}_u w$ est dans Ω pour $u < \zeta(w)$).

On peut alors montrer que $\bar{\theta}$ est mesurable de $\bar{\mathbf{F}}^0 \otimes B(\mathbb{R}_+)$ dans $\bar{\mathbf{F}}^0$ et que $\bar{\theta}$ est un opérateur de translation en dualité avec $\bar{k}$.

X se prolonge à W par $\bar{X}_t(w) = \partial \quad \text{si} \quad t \geq \bar{\zeta}(w)$

$$\bar{X}_t(w) = X_t \circ \bar{k}_s(w) \quad \text{si} \quad t < s < \zeta(w).$$

le III 2) e) nous autorise à considérer les probabilités $\mathbb{P}_x$ comme des mesures sur $(W, \mathbf{F}^0)$, portées par Ω'. Enfin $(W, \bar{\mathbf{F}}^0, \bar{k}, \bar{X}, \mathbb{P}_x)$ est un processus fortement markovien vérifiant les hypothèses de (39).

(43) Soit u une fonction excessive, m une loi initiale, telle que u soit intégrable pour la mesure m ; $(u(X_t), \mathbf{F}_t^m, \mathbb{P}_m)$ est une surmartingale continue à droite, positive, nulle après $\zeta((\mathbf{F}_t^m)$ obtenue en complétant de manière « habituelle » la famille $(\mathbf{F}_t^0))$. Grâce au III, on associera à u les mesures suivantes :

(44) $\tilde{\mu}_m$ mesure de Föllmer sur $\mathscr{P}^*$ associée à $(u(X), \mathbb{P}_m)$, μ_m la mesure associée sur $\mathbf{F}^*$; dans le cas où $u(x)$ est fini, on notera $\tilde{\mu}_x$, μ_x les mesures correspondant à ε_x.

$$\text{Enfin } \bar{\mu}_m = \frac{1}{\langle m, u \rangle} \mu_m, \quad \bar{\mu}_x = \frac{1}{u(x)} \mu_x \quad \text{si} \quad 0 < u(x) < +\infty$$

$$\bar{\mu}_x = \varepsilon_{\omega_0} \quad \text{sinon} \quad (\omega_0 \text{ point fixé dans } (\zeta = 0)).$$

Remarquons que, si C est $\mathbf{F}^*$-mesurable, $x \to 1_{(0<u<+\infty)}(x)\mu_x(C)$ est $\mathbf{E}^*$-mesurable (il suffit de le vérifier pour $C = 1_{(T<\zeta)}$, T temps d'arrêt, ce qui est facile).

On alors le résultat suivant :

(45) Proposition. — Soit u-excessive, il existe une famille de probabilité $\bar{\mu}_x$ sur $(\Omega, \mathbf{F}^*)$ telles que :

a) Pour tout C $\mathbf{F}^*$-mesurable, $x \to \bar{\mu}_x(C)$ est $\mathbf{E}^*$-mesurable

b) Pour tout temps d'arrêt T et tout x tel que

$$0 < u(x) < +\infty \quad \bar{\mu}_x(T < \zeta) = \frac{1}{u(x)} P_T u(x).$$

c) Pour toute loi initiale m sur E telle que

$$0 < \int u dm < +\infty, \; \bar{\mu}_m = \frac{1}{\langle m, u \rangle} \int u(x) \mu_x m(dx)$$

et pour C $\mathbf{F}^*$-mesurable, T temps d'arrêt,

$$\bar{\mu}_m(C \circ \theta_T ; T < \zeta) = \bar{\mu}_m(\bar{\mu}_{X_T} C) ; T < \zeta).$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer les résultats pour $C = 1_{(S<\zeta)}$, S temps d'arrêt. On a alors

$$\bar{\mu}_m(1_{(S<\zeta)} \circ \theta_T, 1_{(T<\zeta)}) = \bar{\mu}_m(T + S \circ \theta_T < \zeta) = \frac{1}{\langle m, u \rangle} E_m(u(X_{T+S\circ\theta_T}))$$

$$= \frac{1}{\langle m, u \rangle} E_m[E_{X_T}(u(X_S))] = \frac{1}{\langle m, u \rangle} E_m[\mu_{X_T}(S < \zeta)]$$

$$(P_T u \leq u \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}_m(u(X_T) = +\infty) = 0)$$

or $$E_m[\mu_{X_T}(C)] = E_m(u(X_T)\bar{\mu}_{X_T}(C)) = \mu_m(\bar{\mu}_{X_T}(C) ; T < \zeta).$$

(46) CONSÉQUENCES. — Si $0 < u(x) < +\infty$,

$$\bar{\mu}_x(f(X_t)) = \frac{1}{u(x)} E_x[u(X_t)f(X_t)]$$

Pour tout x de $E_u = (0 < u < +\infty)$, $(\Omega, \mathbf{F}^*, X, \bar{\mu})$ est donc $\bar{\mu}_x$ fortement markovien et c'est une réalisation du u-processus.

La méthode de construction des $\bar{\mu}_x$, $\bar{\mu}_m$, montre que si le semi-groupe (P_t) est réalisable sur un espace de trajectoire *projectivement clos* (stable pour le meurtre et la translation) il en est de même des u-processus.

Dans le cas d'un espace canonique d'applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E, à durée de vie, on a $\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}^0_{\zeta-}$; les mesures $\bar{\mu}_x$ se prolongent lors à la complétée universelle $\mathbf{F}$ de $\mathbf{F}^0$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. AZEMA, Quelques applications de la théorie générale des processus I. *Inventiones Math.* Vol. t. **18**, 1972, p. 293-336.

[*2*] J. AZEMA, Théorie générale des processus et retournement du temps. *Annales scientifiques de l'E. N. S.*, 4e série, t. **6**, fasc. 4, 1973.

[*3*] H. FÖLLMER, The exit measure of a supermartingale. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, vol. **21**, 1972, p. 154-166.

[*4*] H. FÖLLMER et H. AIRAULT, Relative densities of semi-martingales. *Inventiones Math.* Vol. **27**, 1974, p. 299-327.

[*5*] P. A. MEYER, La mesure de Föllmer en théorie des surmartingales. Séminaire de Strasbourg VI, *Lecture Notes in Math.*, 258, Springer-Verlag.

[*6*] P. A. MEYER, Résultats d'Azéma en théorie générale des processus. Séminaire de Strasbourg VII, *Lecture Notes*, 321, Springer.

[*7*] P. A. MEYER, Les travaux d'Azéma sur le retournement du temps. Séminaire de Strasbourg VIII, *Lecture Notes*, 381, Springer.

[*8*] P. A. MEYER, Une note sur la compactification de Ray. Séminaire de Strasbourg VIII, *Lecture Notes*, 381, Springer.

[*9*] C. STRICKER, Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales. Séminaire de Strasbourg IX, *Lecture Notes*, n° 465, Springer.

(Manuscrit reçu le 11 juin 1976)