

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

τ -régularité des lois, séparation au sens de A. Tulcea et propriété de Radon-Nikodym

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, n° 2 (1976), p. 131-150

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_2_131_0

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

τ -régularité des lois, séparation au sens de A. Tulcea et propriété de Radon-Nikodym

par

A. TORTRAT

SUMMARY. — We give 1) a short survey concerning the τ -regularity of probability-laws, 2) an improvement and applications of a theorem of A. I. Tulcea (a theorem of support and a new aspect of theorems of Phillips and Dunford-Pettis), 3) theorems concerning cylindrical probabilities, vectorial measures associated with, and Radon-Nikodym property. Our definition of this last differs from that of Saab, but is equivalent for a Fréchet-space.

Ce travail est, partiellement, un texte de synthèse (mais aussi d'extension) concernant le domaine des processus linéaires ξ , mesures vectorielles ν (éventuellement) associées et de l'existence d'une fonction ϕ (densité pour ν) les représentant

Le paragraphe 1 concerne la τ -régularité et, avant un théorème de support, donne trois théorèmes fondamentaux. Le second, de Ulam et Varadarajan paraît encore méconnu, le troisième résulte d'un théorème de A. I. Tulcea et permet, au paragraphe 2, un éclairage nouveau concernant le théorème de Phillips et (avec une restriction) celui de Dunford-Pettis *déduit du précédent*. Aux paragraphes 3 à 5 l'accent est mis sur la propriété de séparation au sens de A. I. Tulcea (: au sens du « relèvement »). Le théorème 3.1, d'existence de ϕ ne concerne dans ses hypothèses *que* ξ et simplifie souvent les problèmes de densité (cf. le corollaire). Le paragraphe 4 étudie, dans la ligne de [10] qui est à l'origine de ce texte) les rapports entre ξ et ν (X localement

convexe quelconque, ou complet) avant de définir la propriété de Radon-Nikodym d'une façon différente de celle de Saab et d'étendre des propriétés connues lorsque X est espace de Banach (exemple 1, théorèmes 4.1 et 4.2). Le paragraphe 5 prouve l'équivalence des deux définitions lorsque X est métrisable (: de Fréchet). Les § 2 à 5 nous paraissent « auto-suffisants » (: self-contained), sauf en ce qui concerne le théorème 4.2.

1. LA τ -RÉGULARITÉ DES LOIS

DÉFINITION. — (X, \mathcal{C}) étant un espace topologique, \mathcal{B} la tribu borélienne associée, une loi μ sur \mathcal{B} est dite τ -régulière ⁽¹⁾ si pour toute famille filtrante \uparrow d'ouverts on a

$$(1) \quad \mathcal{O}_\alpha \uparrow \mathcal{O} \Rightarrow \mu \mathcal{O}_\alpha \uparrow \mu \mathcal{O}.$$

Nous commençons ce n° 1 par une mise au point succincte qui nous paraît utile, concernant la τ -régularité, débordant ce qui nous est strictement utile pour la suite.

LEMME 1. — Supposons l'espace X régulier (pour la topologie \mathcal{C}), et μ τ -régulière sur \mathcal{B} . Alors μ est régulière (sous-entendu « par rapport aux fermés ») :

$$(2) \quad \mu B = \sup_{F \in \mathcal{B}} \mu F, \quad B \in \mathcal{B}, \quad F \text{ fermé.}$$

Preuve. — L'espace (X, \mathcal{C}) étant régulier, on peut dans (1) supposer que chaque \mathcal{O}_α est une réunion finie de voisinages dont la fermeture (notée en surlignant) est dans \mathcal{O} . Alors ⁽¹⁾ implique *a fortiori* $\mu \mathcal{O} = \sup \mu \mathcal{O}_\alpha$ (pour ces \mathcal{O}_α). Cela suffit à entraîner la régularité de μ sur \mathcal{B} (cf. [11], p. 263).

LEMME 2. — a) La relation (F désigne un fermé)

$$(3) \quad F_\alpha \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu F_\alpha \downarrow 0$$

implique

$$(4) \quad f_\alpha \downarrow 0 \Rightarrow \mu f_\alpha \downarrow 0, \quad f_\alpha \text{ bornées et s. c. s. } ^{(3)}.$$

b) Si (X, \mathcal{C}) est complètement régulier ⁽²⁾ et μ (loi sur \mathcal{B}) régulière, (3) entraîne (\mathcal{O} ouvert)

$$(5) \quad f_\alpha \uparrow 1_{\mathcal{O}} \Rightarrow \mu \mathcal{O} = \sup \mu f_\alpha, \quad f_\alpha \text{ continues ou s. c. i. } ^{(3)}$$

⁽¹⁾ Ne pas confondre avec le symbole τ de la topologie de Mackey.

⁽²⁾ en abrégé C. R.

⁽³⁾ Semi continue supérieurement, ou inférieurement.

Preuve. — a) On peut se borner à des f_α à valeurs dans $[0, 1]$. Alors on a

$$(6) \quad \frac{1}{N} \sum_1^N \mu F_{Nk}^\alpha \leq \mu f_\alpha \leq \frac{1}{N} \sum_1^N \mu F_{Nk}^\alpha + \frac{1}{N}, \quad F_{Nk}^\alpha = \{x : f(x) \geq k/N\}.$$

(4) suit de (6).

b) Il suffit, vu $\mu\mathcal{O} = \sup_{F \subset \mathcal{O}} \mu F$ de prouver que si $\lim \uparrow f_\alpha \geq 1_F$, on a $\lim \mu f_\alpha \geq \mu F$. Or posant $g_\alpha = 1_F - f_\alpha$ on a, appliquant (4) aux $g_\alpha^+ = \sup(g_\alpha, 0)$ qui sont s. c. s., $\mu g_\alpha^+ \downarrow 0$, donc $\lim \mu g_\alpha \leq 0$, c'est bien $\mu F \leq \lim \mu f_\alpha$.

REMARQUE 1. — (4) contient un principe de prolongement : il suffit que (4) vaille pour un espace vectoriel de fonctions continues bornées, stable pour inf et sup (f, f'), et engendrant suivant (5) tous les ouverts, pour définir univoquement μ τ -régulière sur \mathcal{B} . C'est ainsi que se prouve le théorème fondamental suivant (cf. [4] pour la preuve, elle vaut en fait, en raisonnant dans $X \times X$ jusqu'au bout, aussi pour un demi-groupe, suivant une remarque communiquée par Topsøe) ⁽⁴⁾ :

THÉORÈME 1.1. — Dans l'espace \mathcal{M}^c des lois τ -régulières sur (X, \mathcal{B}) , \mathcal{B} tribu borélienne du demi-groupe C. R. X, la convolution est une opération univoquement définie par prolongement τ -régulier, bicontinue, et la « formule de Fubini » est valide (f \mathcal{B} -mesurable et bornée) :

$$(7) \quad \mu \nu f = \int g(x) \mu(dx) \quad \text{avec} \quad g(x) = \int f(xy) \nu(dy).$$

Plus précisément, dans (7) g est s. c. i. si f l'est (ou s. c. s. si f l'est).

REMARQUE 2. — Si μ est donnée τ -régulière sur \mathcal{B}_0 tribu borélienne pour une topologie \mathcal{C}_0 moins fine que \mathcal{C} , avec X complètement régulier pour \mathcal{C} , et si il existe une base de \mathcal{C} -voisinages ouverts des points de X qui $\in \mathcal{B}_0$, alors la condition (pour toute famille filtrante \uparrow)

$$(8) \quad \sup V_\alpha \supset V \Rightarrow \sup \mu V_\alpha \geq \mu V,$$

V_α, V unions finies de tels voisinages, est nécessaire et suffisante pour que μ admette un prolongement τ -régulier à \mathcal{B} .

La preuve est celle donnée dans [13] pour un espace vectoriel.

Aussi bien \mathcal{B}_0 peut être une algèbre (contenant les V), sur laquelle μ vérifie la condition (1) de τ -régularité, sans considération d'une autre topologie \mathcal{C}_0 .

⁽⁴⁾ Cf. la note p. 30 de [4].

DÉFINITION 2. — Nous appelons support S ⁽⁵⁾ (relatif à \mathcal{C}) de la loi μ définie sur la tribu \mathcal{C} -borélienne \mathcal{B} , l'intersection de tous les fermés de μ -mesure 1. Dès que X est C. R. S est défini par les seules valeurs de μ sur \mathcal{B}_a (et même sur l'algèbre de Baire). Rappelons que si \mathcal{C} est métrisable, S est toujours séparable. *A priori* il peut être vide. Au contraire $\mu S = 1$ (suivant (1) : passer aux complémentaires) si μ est τ -régulière ; dans tout ce texte seule cette conséquence de la τ -régularité nous intéressera. Dans le cas métrisable $\mu S = 1$ suffit (équivalent) à la τ -régularité (puisque S , comme sous-espace a une base dénombrable pour \mathcal{C}).

DÉFINITION 3. — Un cardinal λ est dit mesurable si il existe une loi μ (nulle sur les points) sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de toutes les parties d'un espace E de cardinal λ .

Si on admet l'hypothèse faible du continu, l'axiome de Zorn, et l'axiome de forte accessibilité de tout cardinal (cf. [6] ces axiomes sont compatibles), il résulte des travaux de Ulam (1931, cf. [16]) qu'il n'existe pas de cardinal mesurable.

THÉORÈME 1.2. — On suppose que l'espace X , de topologie \mathcal{C} est métrisable ou paracompact. Alors, en admettant les axiomes susdits, toute loi μ définie sur la tribu de Baire \mathcal{B}_a est τ -régulière. Il est équivalent de dire que toute loi sur \mathcal{B} (même non τ -régulière) a un support non vide. Dans le cas métrisable il est équivalent de dire que X est réductible à une partie séparable « portant » μ : $\mu S = 1$, et ($\mathcal{B}_a = \mathcal{B}$) toute loi sur \mathcal{B} est τ -régulière.

Preuve. — Elle se trouve pour l'essentiel (après ce qui précède) en appendice dans [2]. C'est un théorème de Varadarajan : Si μ est, sur \mathcal{B}_a une loi à support vide, il existe dans X un fermé discret F de cardinal mesurable. Or (cf. [5] [12]) toute loi μ non τ -régulière possède une composante (une mesure $\mu' \leq \mu$) à support vide.

REMARQUE 3. — Ce théorème implique qu'avec les axiomes susdits, tout espace X métrisable ou paracompact est réel-compact c'est-à-dire complet pour la structure uniforme définie par toutes les fonctions continues (même non bornées) (cf. [11] p. 278, [5]).

COROLLAIRE. — Soit (X, \mathcal{C}) un espace vectoriel topologique métrisable séparé par son dual Y . Soit μ une loi définie sur la tribu cylindrique (: engen-

⁽⁵⁾ Une partie mesurable B est dite porter μ si $\mu B = 1$. L'expression « S support de μ » a, si $\mu S < 1$, un sens seulement local et remonte à Paul Lévy.

drée par les $y(x)$, $y \in Y$). Si μ admet un prolongement à \mathcal{B} , alors (avec les axiomes susdits) on a

$$(9) \quad \mu_{\mathcal{L}}^* X_0 = 1,$$

avec

$$(10) \quad X_0 = \bigcap_{y \sim 0} \{ x : y(x) = 0 \};$$

dans (10) l'intersection est prise pour toutes les $y(x)$ μ -p. s. nulles. X_0 s'appelle le support linéaire topologique de μ .

Preuve. — X_0 faiblement fermé donc contient S ainsi que les supports S' relatifs à toute topologie intermédiaire (entre $\sigma(X, Y)$ et \mathcal{C}) \mathcal{C}' , si μ se prolonge à \mathcal{B} . $\mu S = 1$ nécessite $\mu X_0 = 1$ donc (9). Il suffit évidemment (*sans axiomes*) que μ ait un prolongement faiblement τ -régulier (à \mathcal{B}_σ), mais nous préférons introduire (9) ainsi, car on va voir que (9) est une condition *suffisante* de prolongement de μ à \mathcal{B} , dans le cas métrisable ici considéré.

THÉORÈME 1.3. — Soit (X, \mathcal{C}) un espace vectoriel localement convexe métrisable, et μ une loi donnée sur \mathcal{L} . Si (9) a lieu, X_0 est \mathcal{C} -séparable donc μ se prolonge trivialement à \mathcal{B} et est τ -régulière sur \mathcal{B} .

Preuve. — Elle est donnée dans [15] pour (X, \mathcal{C}) de Banach, et étendue au cas ci-dessus défini dans [13]. Rappelons qu'elle repose sur le théorème fondamental suivant, appliqué aux fonctions $y(x)$, sur X_0 défini par (10), appartenant au polaire U^0 d'un \mathcal{C} -voisinage U de 0 dans X_0 : si $(X_0, \mathcal{L}_0, \mu_0)$ est un espace de probabilité, tout ensemble convexe et compact pour la convergence ponctuelle sur X_0 , de fonctions (réelles et \mathcal{L}_0 -mesurables) est métrisable pour cette topologie ($\sigma(Y_0, X_0)$ dans notre cas), lorsqu'il est « séparé » en ce sens qu'il ne contient pas deux fonctions distinctes mais μ_0 -équivalentes.

THÉORÈME 1.4. — ⁽⁶⁾ Soit (X, \mathcal{C}) un espace vectoriel localement convexe et μ une loi définie sur la tribu cylindrique \mathcal{L} .

a) Le sous-espace X_0 défini par (10), s'il est non vide, est « limite projective ⁽⁷⁾ » d'espaces normés séparables X_U (les tU , $0 < t \leq 1$ constituant une base de voisinages fermés absolument convexes de 0, dans X_0).

b) Si (9) est vérifiée, les projections μ_U de la trace μ_0 de μ (sur \mathcal{L}_0 trace de \mathcal{L} sur X_0) sont τ -régulières. Leurs supports S_U sont tels que, posant

⁽⁶⁾ Inspiré par la proposition 1 de [7].

⁽⁷⁾ Au sens habituel seulement si X est \mathcal{C} -complet, sinon nous exprimons que tout x de X_0 est défini par ses projections x_u dans les X_u en question.

$\sigma_U = \pi_U^{-1}S_U$ (dans X_0), $S = \cap \sigma_U$ est le \mathcal{C} -support de μ_0 comme de μ (ce support est défini même si μ ou μ_0 ne se prolongent à \mathcal{B} ou $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap X_0$).

Preuve. — a) Considérons, dans X_0 la semi-norme p_U définie par U . Le quotient de X_0 par $\{x : p_U(x) = 0\}$ définit $x_U = \pi_U x$ et X_U , espace normé par $\|x_U\| = p_U(x)$. Son dual se compose de fonctions linéaires $L(x_U) = L(\pi_U x)$ bornées pour $x \in U$, non équivalentes à 0 sur X_0 , donc aussi dans X_U pour la mesure projection μ_U (définie sur la tribu $\mathcal{L}(X_U)$). Alors (vu le théorème 1.3) X_U est séparable.

b) Dans X_0 , $U \in \mathcal{L}_0$. En effet c'est $\pi_U^{-1}B_U$, B_U boule unité de X_U , qui $\in \mathcal{L}(X_U)$ vu la séparabilité, et vu a), $\pi_U^{-1}\mathcal{L}(X_U)$ se compose d'éléments de \mathcal{L}_0 saturés pour π_U . S est nécessairement dans X_0 si (9) vaut puisque si $x \notin X_0$, il existe $y(\cdot)$ nulle sur X_0 , égale à 1 en x , donc $\{x : y(x) > 0\}$ est un ouvert faible μ -nul. Dire que $x \in S$, c'est dire que pour tout U (et $t > 0$, sans préjudice d'une extension de μ hors de \mathcal{L}_0) le « cylindre » $\{x' \in X_0, p_U(x' - x) < t\}$ est μ positif, donc que $x_U \in S_U$, soit $x \in \sigma_U$.

2. LA PROPRIÉTÉ DE DUNFORD-PETTIS DE $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

THÉORÈME DE PHILLIPS (extension légère). — (X, \mathcal{C}) étant un espace vectoriel localement convexe métrisable, soit μ une loi sur \mathcal{B}_σ vérifiant (9) et parfaite c'est-à-dire approchée par une classe compacte (au sens abstrait) sur toute sous-tribu à base dénombrable. Alors μ est \mathcal{C} -de Radon.

Preuve. — L'hypothèse μ parfaite et définie sur \mathcal{B}_σ ramène (vu $X_0 \in \mathcal{B}_0$) au cas de la trace μ_0 parfaite sur X_0 métrique séparable, la conclusion est alors celle d'un théorème de Sazonov (cf. p. ex. [11] p. 273).

THÉORÈME DE DUNFORD-PETTIS. — Soit u une application linéaire faiblement compacte de $X = L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans (Z, \mathcal{C}) espace vectoriel localement convexe métrisable. Alors l'image de toute partie C faiblement compacte de X est \mathcal{C} -compacte dans Z .

Preuve. — i) Soit B une boule de X , centrée, contenant C , et considérons la fermeture $\bar{uB} = K$ faiblement compacte dans Z . Suivant le corollaire du théorème 3 ci-après, $\nu_A = u1_A$ est l'intégrale sur A d'une application $\phi(\omega)$ à valeurs dans K , \mathcal{B}_{σ_a} mesurable. L'image μ de P est dans K et \mathcal{C} -de Radon suivant le théorème qui précède. Soit $\Omega_\alpha \in \mathcal{A}$, image par ϕ^{-1} d'un K_α \mathcal{C} -compact $\subset K$, tel que $\mu K_\alpha > 1 - \alpha$.

Soit f_β un filtre d'éléments de C , suivant lequel uf_β converge faiblement :

$$(12) \quad uf_\beta \xrightarrow{\sigma} z \in K, \quad f_\beta \in C.$$

Les f_β sont (avec tous les éléments de C) équi-intégrables. Si on tronque ces f_β à $M(|f_\beta| > M \Rightarrow g_\beta = 0)$, obtenant les g_β , on a donc

$$(13) \quad \|f_\beta - g_\beta\| \leq \varepsilon(M) = \varepsilon.$$

ii) Si U est un \mathcal{C} -voisinage fermé équilibré contenant K , choisissant $\alpha M = \varepsilon$, on a, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant la dualité entre L^1 et L^∞ et y un élément du dual Y de Z ,

$$(14) \quad \left| \int_{\Omega} y(\phi)g_\beta dP - \langle y \circ \phi, f_\beta \rangle \right| \leq 2\varepsilon, \quad \text{tout } y \in U^0.$$

Mais la trace de la topologie σ sur U^0 équivaut à celle définie par les semi-normes $p_{K\alpha}$ relatives à des $K\mathcal{C}$ -compacts dans Z , tel K_α . C'est dire qu'il existe $\{y_i\}$ partie finie de U^0 telle que pour chaque y de U^0 il y ait un i avec :

$$\begin{aligned} \sup_{K_\alpha} |y - y_i| < \eta &\Rightarrow \sup_{\Omega_\alpha} |y \circ \phi - y_i \circ \phi| < \eta \\ &\Rightarrow \left| \int_{\Omega_\alpha} (y_i - y)(\phi) \cdot g_\beta dP \right| < \eta M. \end{aligned} \tag{15}$$

iii) Si donc E est un élément du filtre des β dans lequel, vu (12), l'oscillation des $\langle y_i(\phi), f_\beta \rangle$ est $< \varepsilon$, celle des $\langle y(\phi), f_\beta \rangle$ de U^0 est $< 9\varepsilon + 2\eta M$ vu (13), (14) et (15). C'est constater l'uniforme convergence des $\langle y \circ \phi, f_\beta \rangle$, pour $y \in U^0$, c'est-à-dire la convergence de uf_β au sens de chaque p_U donc au sens de \mathcal{C} . Dans uC les topologies σ et \mathcal{C} sont identiques et uC est \mathcal{C} -compact.

Nous avons en fait on le voit prouvé le

COROLLAIRE. — Si u est une application linéaire faiblement compacte de $X = L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans Z vectoriel localement convexe, et si, $\phi(\omega)$ étant la densité correspondante de $\gamma A = u1_A$, la loi μ image de P par ϕ est \mathcal{C} -de Radon, alors l'image uC de tout compact faible C de X est \mathcal{C} -compacte dans Z .

REMARQUE 4. — On sait que cette restriction concernant μ est inutile, mais la preuve donnée ici ne suppose pas Ω compact (cf. [I]), donc ne passe pas par le théorème d'isométrie entre $L^1(\Omega)$ et un $L^1(S)$ avec S espace stonien.

3. EXISTENCE D'UNE DENSITÉ ϕ POUR UNE LOI μ

Au n° 4 nous examinerons le problème de la densité d'une mesure ν , définie sur un espace (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs vectorielles. Dans le cas d'un espace X de Banach ou de Fréchet, la formulation habituelle équivaut à

l'existence d'une fonction $\phi(\omega)$ à valeurs dans X , dont la loi μ dans X soit la loi associée à ν (suivant le lemme qui suit) et soit faiblement de Radon. Le théorème 3 montrera que l'existence de ϕ suit automatiquement de la seule exigence μ faiblement de Radon.

LEMME 3. — Soit ν une fonction définie sur \mathcal{A} , à valeurs dans l'espace vectoriel l. c. séparé (X, σ) , qui soit (faiblement) σ -additive.

Les densités ξ_y des mesures réelles signées $\nu_y(\cdot) = (y, \nu(\cdot))$ définissent un processus linéaire de Y dans $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donc, c'est équivalent, une probabilité cylindrique μ , associée, dans X .

La preuve est immédiate. Rappelons que les ν_y étant bornées, les ξ_y appartiennent en fait à L^1 (sont intégrables) et que l'image $\nu\mathcal{A}$ est faiblement bornée dans X donc bornée pour toute topologie compatible (avec la dualité entre X et Y).

REMARQUE 5. — Si $\phi(\omega)$ est une application de (Ω, \mathcal{A}) dans X , on la dit scalairement (ou cylindriquement) mesurable si elle l'est pour la tribu cylindrique \mathcal{L} dans X , faiblement mesurable si \mathcal{B}_σ remplace \mathcal{L} . En raccourci nous pourrions écrire $\phi \in \mathcal{L}$ ou \mathcal{B}_σ (ou une autre tribu). Cet espace Ω étant toujours non défini, il y a intérêt à le remplacer par le complété faible $\hat{X} = R^T$ (T est une base algébrique de Y) lorsqu'on veut étudier des propriétés intrinsèques de X (cf. [3] où on étudie la possibilité de remplacer (Ω, \mathcal{A}, P) par la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$:

PROPOSITION 3.1. — Soit un couple (X, Y) d'espaces vectoriels en dualité séparante et μ une probabilité cylindrique dans X . Alors le processus cylindrique ξ_y associé, supposé défini sur un espace (Ω, \mathcal{A}, P) , se réalise dans \hat{X} par une application $\phi_0(\omega)$ $\hat{\mathcal{L}}$ -mesurable et séparant les y (*).

Preuve. — Choisissons T_μ (maximal) $\subset T$ telle que les ξ_t pour $t \in T_\mu$ soient linéairement distinctes dans L^0 . Il suffit ensuite de choisir arbitrairement (dans leur classe) les $\xi_t(\omega) = (t, \phi_0(\omega))$, pour fonctions coordonnées

de $\phi_0(\omega)$, pour $t \in T_\mu$. Si $t' \in T - T_\mu$, $\xi_{t'}$ équivaut à $\sum_1^I c_i \xi_{t_i}$ ($t_i \in T_\mu$), on

choisit $\xi_{t'} = \sum_1^I c_i \xi_{t_i}$ pour tout ω . Cela définit ϕ_0 dans R^T et les

$\xi_y = (y, \phi_0)$: si $\xi_y = 0$ dans L^0 , ξ_y s'écrit $\sum c_i \xi_{t_i}$ en tout ω ($t_i \in T_\mu$) donc égale 0 partout, c'est la séparation des y (*).

(*) Au sens, rappelons-le, que chaque (y, ϕ_0) est ou identiquement nulle, ou non équivalente à 0 (modulo μ) sur Ω .

THÉORÈME 3.1. — ⁽⁸⁾ Si au processus linéaire ξ_y , à valeurs dans $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est associée une loi μ de Radon pour (X, σ) et des compacts *convexes*, alors ce processus se réalise par une application $\phi(\omega)$ \mathcal{L} -mesurable (pour \mathcal{A} complète), et séparant les y (μ est la loi de ϕ). Plus précisément, sur des $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{A}$, on a $\phi \in K_\varepsilon$ compact faible convexe ($\mu K_\varepsilon^c < \varepsilon$) et ϕ est \mathcal{B}_{σ_a} -mesurable.

Preuve. — Dans \hat{X} les K_ε sont compacts et μ induit la probabilité de Radon \hat{P} . Il existe $L_\varepsilon \in \hat{\mathcal{L}}$ tel que $L_\varepsilon \supset K$ et $\hat{P}L_\varepsilon$ égale la probabilité extérieure $\hat{P} * K_\varepsilon$ relative à \mathcal{L} . Pour $y \in K^0$, polaire de K_ε et $L_y = \{x : (y, \hat{x}) \leq 1\}$, on a $L_y \supset K_\varepsilon$ donc $\hat{P}(L_\varepsilon - L_y) = 0$.

Prenons $\Omega_\varepsilon = \phi_0^{-1}L_\varepsilon$ pour la fonction ϕ_0 de la proposition 3.1. Pour $L \subset L_\varepsilon$ et chaque y de K_ε^0 , on a

$$\left| \int_L (y, \hat{x}) d\hat{P} \right| \leq \hat{P}L \Rightarrow |\xi_y(\omega)| \leq 1 \text{ p. s. dans } \Omega_\varepsilon.$$

Le théorème de relèvement fournit alors $\tilde{\xi}_y(\omega) \leq 1$ pour tout y de K_ε^0 et tout ω de Ω_ε . C'est dire que $\tilde{\xi}_y(\omega) = (y, \phi(\omega))$ avec $\phi(\omega) \in K_\varepsilon$ (car K_ε est supposé convexe). On prend $\phi = 0$ hors d'une $\lim \uparrow \Omega_{1/n}$. Les $y \circ \phi$ sont séparées (puisque ce sont les $\tilde{\xi}_y(\omega)$). $\phi \in \mathcal{B}_{\sigma_a}$ puisque \mathcal{L} et \mathcal{B}_{σ_a} ont même trace sur les K_ε ; dans le cas métrisable, cette séparation des y implique que $\phi \in X_0$ défini par (10). $X_0 \in \mathcal{B}_\sigma$, tribu à laquelle se prolonge μ . (9) vaut donc, X_0 est \mathcal{C} -séparable suivant le théorème 1.3, et ϕ est Bochner-mesurable pour X_0 donc pour X .

COROLLAIRE (DUNFORD-PETTIS). — Soit u une application linéaire faiblement compacte de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans X l. c. La mesure $\nu A = u1_A (A \in \mathcal{A})$ se réalise par une densité $\phi(\omega) \in K$ (K étant la fermeture de l'image uB de la boule unité de L^1), séparant toutes les fonctions h continues sur X et mesurable pour la tribu de Baire faible.

Preuve. — La relation $\nu A / PA \in K$ implique la concentration cylindrique de μ dans K : $\xi_y = d\nu_y / dP$, $\nu_y A = (y, \nu A)$ assurent que chaque cylindre projetant K est de μ mesure 1, quelle que soit sa dimension (la concentration cylindrique se réduit à la concentration scalaire : à la dimension 1).

4. MESURES ν A VALEURS VECTORIELLES ET PROPRIÉTÉ DE RADON-NIKODYM

Nous posons le problème de l'existence d'une densité ϕ pour une mesure vectorielle ν , dans le cas général, en des termes un peu différents de ceux

⁽⁸⁾ Nous avons retrouvé ce théorème, dû à Kwapien, indépendamment. Notre énoncé est peut-être plus général et plus précis.

de [8] (mais équivalents lorsque X est de Fréchet ⁽⁹⁾), en nous inspirant largement de [10] qui concerne X de Banach. Nous supposons, avec tous les auteurs, que l'espace $(X, \tilde{\mathcal{C}})$ de dual Y (\mathcal{B} sera la tribu borélienne associée à la topologie $\tilde{\mathcal{C}}$) est complet, car il paraît raisonnable de ne poser en termes généraux le problème que dans ce cas (cette hypothèse peut être ôtée de certaines des propositions qui suivent).

Soit (X, Y) un couple en dualité séparante et B une partie bornée fermée absolument convexe ⁽¹⁰⁾ de X . X_B désigne l'espace $\cup nB$ de boule unité B (de Banach si X est complet ou quasi-complet pour une topologie $\tilde{\mathcal{C}}$ compatible) et (Y, B^0) le dual Y de X , normé par la boule unité B^0 polaire de B dans Y (noter que le dual de X_B est plus grand que Y).

LEMME 4. — Si le processus linéaire ξ_y (de Y dans un $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$) est borné, c'est-à-dire continu de (Y, fort) dual fort de X , dans L^∞ (soit $|\xi| \leq 1$ p. s. pour chaque $y \in B^0$ convenable), la mesure $\nu A (A \in \mathcal{A})$ faiblement σ -additive, définie par

$$(15) \quad (\nu A, y) = \int_A \xi_y dP$$

existe dans le Banach Y' dual de (Y, B^0) , *a fortiori* dans le bidual X'' et dans \tilde{X} .

Preuve. — On a

$$\sup_{y \in B^0} \left| \int_A \xi_y dP \right| \leq PA.$$

LEMME 5. — Il est équivalent de dire, μ étant la probabilité cylindrique associée à ξ_y relatif à (Ω, \mathcal{A}, P) , que

a) μ est cylindriquement concentré sur les nB homothétiques d'un même B borné a. c.,

ou

b) $\theta(\omega) = \sup_{B^0} \text{ess} |\xi_y(\omega)|$ est p. s. fini (c'est aussi le sup pris sur une partie dénombrable convenable de B^0)

ou

c) L'image de B^0 dans $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est latticiellement bornée : l'ensemble des

$$(16) \quad \xi_I = \sup_I |\xi_y(\omega)|, \quad I \text{ partie finie de } B^0,$$

est borné en probabilité.

⁽⁹⁾ Localement convexe, métrique, complet.

⁽¹⁰⁾ a. c. c'est-à-dire équilibré et convexe.

Lorsque X est normé (de boule B), a) est nécessaire à la σ -additivité de μ sur l'algèbre cylindrique α , cela suffit si X est le Banach dual de Y normé (μ est alors de Radon pour $\sigma(X, Y)$).

Preuve. — Soit B_M la boule MB dans X et $1-\varepsilon'$ (ε' dépend de M) sa mesure extérieure μ^* relative à α . Soit $\varepsilon = \varepsilon(M) = \sup_I P \{ \zeta_I > M \}$. On a $\varepsilon \leq \varepsilon'$ puisque $\{ \zeta_I \leq M \}$ est un cylindre contenant B_M . Si C_J est un cylindre projetant B_M (suivant les y d'une partie J finie de Y), \bar{C}_J est intersection d'une suite \downarrow de $\{ \zeta_I \leq M \}$, d'où $1-\varepsilon' \geq 1-\varepsilon$, soit $\varepsilon = \varepsilon'$, et l'équivalence de a) et c) (exactement $1 - \varepsilon'(\lambda M) \geq 1 - \varepsilon(M)$ pour tout $\lambda > 1$).

b) traduit c) compte tenu du fait bien connu (dans la preuve du théorème ordinaire de Radon-Nicodym) que $\sup \text{ess} |\xi_y|$ est celui d'une famille dénombrable.

Pour terminer prouvons ce fait (dû à H. Sato) : si μ est σ -additive sur \mathcal{L} , tribu (quelconque) dans $X = \lim \uparrow B_n$ (B_n quelconques), alors $\mu_{\mathcal{L}}^* B_n \uparrow 1$. Il existe en effet des $L_n \supset B_n$, $L_n \in \mathcal{L}$, tels que

$$\mu L_n = \mu^* B_n \Rightarrow \mu L'_n = \mu L_n \text{ pour } L'_n = L_n L_{n+1} \dots \supset B_n.$$

Ainsi $L'_n \uparrow X$ d'où la conclusion (*).

PROPOSITION 4.1. — Pour tout processus linéaire ξ_y borné (cf. le lemme 4) les propriétés suivantes, où τ désigne la topologie de Mackey pour (Y, X) ou (L^∞, L^1) , et L^p l'espace de Banach $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sont équivalentes.

- i) $\nu A \in X$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ (νA définie par (15)),
- ii) ξ est continu de (Y, τ) dans (L^∞, τ) , *a fortiori* dans tout L^p , $0 \leq p < \infty$,
- iii) ξ est continu de (Y, τ) dans L^0 ⁽¹¹⁾.

Alors ν se prolonge en un opérateur linéaire continu de L^1 dans X (en fait dans un Banach X_B), et cette propriété contient celles qui précèdent, y compris « ξ borné ».

Preuve. — Supposons que

$$(17) \quad |\xi_y| \leq 1 \text{ p. s., tout } y \in B^0.$$

f donnée, de L^1 , est limite au sens de L^1 , de fonctions simples

$$g = \sum_I^1 c_i 1_{A_i}.$$

(*) C'est la continuité connue de la mesure extérieure.

⁽¹¹⁾ Pour X de Banach, *iii*) \Rightarrow *ii*) pour tout p fini est dans [9].

Suivant (15) et (17) on a, lorsque i) vaut,

$$|(y, vA)| \leq PA \Rightarrow (y, ug) \leq \|g\|, \quad \text{tout } y \in B^0,$$

soit

$$(18) \quad p_B(ug) \leq \|g\|.$$

(18) assure donc la dernière assertion, qui elle-même implique i) et ii) ainsi que le caractère borné de ξ : soit B l'image, après fermeture, de la boule unité de L^1 . Cela définit $vA = u1_A \in B$, avec $p_B(vA) \leq PA$ ($vu \|1_A\| = PA$), donc (17) est assuré. Si K est un compact faible de L^1 (pour $\sigma(L^1, L^\infty)$), posant $uK = K'$ (faiblement compact dans X) on a

$$y \in K'^0 \Rightarrow |(\xi_y, f)| \leq 1,$$

tout $f \in K \Rightarrow \xi_y \in K^0$: la continuité $(Y, \tau) \xrightarrow{\xi} (L^\infty, \tau)$.

— Que, *a fortiori* $(Y, \tau) \xrightarrow{\xi} L^p$ soit continu résulte de ce que, si $p \geq 1$, $L^\infty \rightarrow L^p \rightarrow L^1$ (plongements continus pour les normes) et $L^q \rightarrow L^1$ ($1/p + 1/q = 1$). Alors, pour $g \in L^\infty$ et $f \in L^q$,

$$\sup_{\|f\|_q=1} \int |fgdP| = \|g\|_p \leq 1$$

définit dans L^∞ le polaire de la boule B_q plongée dans L^1 . Cette boule étant faiblement compacte dans L^q pour $\sigma(L^q, L^p)$ l'est *a fortiori* dans L^1 pour $\sigma(L^1, L^\infty)$, son polaire est donc un τ -voisinage de 0 dans L . Pour $p < 1$ la continuité de ξ vaut *a fortiori*.

Il est alors clair que ii) implique iii) et il reste seulement à prouver que :

— iii) \Rightarrow i).

Il suffit de prouver (critère de Banach-Grothendieck, X étant complet pour \mathcal{C}), que dans U^0 polaire d'un \mathcal{C} -voisinage de 0, $(y, vA) = \int_A \xi_y dP$

est faiblement continue en y , ou encore petit dans un K^0 (K compact faible dans X). Mais $U^0 \subset MB^0$ et $P\{|\xi_y| > \eta\} < \varepsilon$, dans un K^0 convenable suivant l'hypothèse iii) donne le résultat :

$$\left| \int_A \xi_y dP \right| \leq \eta + \varepsilon M \quad \text{dans } U^0 \cap K^0 \Rightarrow vA \in X, \quad \text{tout } A \in \mathcal{A}.$$

Dans le cas de ξ non borné l'hypothèse a) ci-dessous assure encore $v\mathcal{A} \subset X$. Inversement dès que $\mathcal{A} \xrightarrow{v} X$ existe, est faiblement σ -additive, et nulle avec P, ξ , de Y dans L^1 , lui est associé.

LEMME 6. — Il est équivalent, pour un couple (X, Y) quelconque en dualité séparante que

a) le processus linéaire ξ_y soit continu de (Y, τ) dans un $(L^p, \|\cdot\|)$, $1 \leq p < \infty$,

ou que

b) (15) définisse sur \mathcal{A} une fonction v à valeurs dans X qui se prolonge en un opérateur linéaire u (adjoint de ξ) continu de (L^q, σ) dans (X, σ) (pour les dualités (L^q, L^p) , (X, Y)) ⁽¹²⁾.

Alors l'image $v\mathcal{A}$ est faiblement (relativement) compacte dans X et v faiblement σ -additive (*a fortiori* dans les conditions de la proposition 4.1).

Preuve. — a) définit clairement par

$$(19) \quad (\xi_y, g) = (y, ug), \quad g \in L^q,$$

l'adjoint de u de ξ , continu de L^q dans X pour les topologies faibles susdites. La boule unité B_q de L^q étant faiblement compacte, son image par u l'est dans X .

b) Si inversement u est donnée avec cette faible continuité, posant $uB_q = K$, (19) donne

$$\|\xi_y\| = \sup_{B_q} (g, \xi_y) \leq 1 \quad \text{pour } y \in K^0.$$

C'est la τ -continuité de ξ .

Si $A_n \uparrow A$, $1_{A_n} \rightarrow 1_A$ au sens de (L^q, σ) , donc $vA_n \rightarrow vA$ faiblement dans X .

DÉFINITION 4. — On dit que l'espace X (l. c. complet) a la propriété de Radon-Nikodym : $X \in R. N. P.$ (sous-entendu vis-à-vis de son dual fort) si tout processus linéaire ξ , répondant aux conditions de la proposition 4.1 (c'est-à-dire « borné » et associé à $\mathcal{A} \xrightarrow{v} X$), est représentable par une fonction $\phi(\omega)$ de (Ω, \mathcal{A}) dans X , \mathcal{L} -mesurable et séparant les y :

$$(18') \quad (y, vA) = \int_A y \circ \phi dP,$$

$$(19') \quad \xi_y = 0 \text{ p. s. } \Rightarrow y \circ \phi(\omega) = 0 \text{ en tout } \omega.$$

En fait $vA \in B$ (du lemme 4). La condition (19') équivaut à : $\phi \in X_0$, X_0 étant défini par (10) pour la loi μ sur \mathcal{L} , image de P par ϕ ; (9) est donc satisfaite et $v\mathcal{A} \subset X_0$.

⁽¹²⁾ Pour $q = \infty$ ce prolongement vaut dès que v est définie sur \mathcal{A} , à valeurs dans X , faiblement σ -additive et nulle avec P (si X est quasi complet pour \mathcal{C}), et est aussi continu de $(L^\infty, \|\cdot\|)$ dans X_B , avec $v\mathcal{A} \subset B$.

REMARQUE 6. — Cette définition est intrinsèque : il suffit de la poser avec $(\Omega, \mathcal{A}) = (X, \mathcal{L})$, puis de composer la fonction $\phi(x)$ obtenue avec la fonction ϕ_0 de la proposition 3.1 (où la séparation des y n'est pas nécessaire).

REMARQUE 7. — L'existence de $\phi \in \mathcal{L}$, implique, nous venons de le dire, que μ , probabilité cylindrique associée à ξ_y et ν , est (se prolonge en) une loi sur \mathcal{L} . Si X est métrisable ($\tau(X, Y)$ est telle), le théorème 1.3 montre que μ est trivialement prolongeable à \mathcal{B} , et τ -régulière sur \mathcal{B} . C'est dire que pour X de Fréchet, en particulier de Banach, l'existence d'une densité (scalairement mesurable et séparant les y) équivaut au caractère faiblement (donc fortement) de Radon de μ . Plus précisément, μ a une restriction telle dans X_0 , donc μ cylindrique a un prolongement tel à \mathcal{B} (unique en tant que loi τ -régulière, ou que loi sur \mathcal{B} suivant le théorème 1.2).

REMARQUE 8. — Il est immédiat que tout sous-espace fermé dans X (muni de la topologie trace) \in R. N. P. avec X .

PROPOSITION 4.2. — a) La densité ϕ de la définition 4, $\in \tilde{X}$ fermeture de X_B dans X (et $\phi \in X_0$).

b) Lorsque X est espace de Fréchet, on a (peut choisir) $\phi \in B$.

Preuve. — a) résulte de $(y, \phi) \sim dv_y/dP$. Si en effet $y \neq 0$ est nulle sur B donc sur \tilde{X} , $\nu_A y$ est identiquement nulle, donc aussi (y, ϕ) , vu la séparation des $y \circ \phi$. Mais nous ne pouvons dire plus, bien que, suivant le théorème 3.1. il existe une densité $\phi' \in B'$ boule unité du Banach Y' dual de (Y, B^0) , qui, dans Y' , représente ξ_y , et équivaut à ϕ en ce sens que $(y, \phi) \sim (y, \phi')$ pour tout y de Y .

b) Si X est de Fréchet, μ est de Radon (si $X \in$ R. N. P.), suivant des K_ε convexes qu'on peut prendre dans B (puisque μ est cylindriquement concentrée dans B). Le théorème 3.1. assure alors $\phi \in B$.

REMARQUE 9. — On notera que $X \in$ R. N. P. n'implique pas du tout que $X_B \in$ R. N. P., même si $\phi \in B$, car cela n'assure pas que $\xi_y = d(y', \nu(\cdot))/dP(\cdot)$ équivale à (y', ϕ) pour y' du dual de X_B (dual plus grand que Y). Si cela était, il faudrait encore que ϕ sépare les y' . La première condition implique la mesurabilité de ϕ pour la tribu \mathcal{L}' engendrée par ces y' . Cette mesurabilité est assurée (par $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$) lorsque X_B est séparable (cf. [14], théorème 2), et alors $\phi \in B$.

LEMME 7. — ν étant une fonction faiblement σ -additive, définie sur la tribu \mathcal{A} et nulle avec P , à valeurs dans X , il est équivalent de dire que

a) ν est à p_B -variation bornée : $\sup_{\sum A_i = \Omega} p_B(\nu A_i) = C < \infty$,

ou que

b) Le processus linéaire associé ξ_y est « majoré par θ », au sens du lemme 5 et θ est intégrable ; alors $C \leq \int \theta dP \leq 2C$.

Preuve. — Supposons C fini. θ est la densité de la mesure $\sigma = \sup_{B^0} |\nu_y|$ ($|\nu_y|$ de densité $|\xi_y|$).

On sait qu'une telle borne supérieure est définie par

$$\sigma A = \sup_{A = \sum_1^I A_i} \sum_1^I |\nu_{y_i}| A_i \leq 2 \sup_{\sum A_i \subset A} \sum_1^I p_B(A_i) \quad (y_i \in B^0)$$

On a bien $\sigma \Omega \leq 2C$.

Réciproquement, $p_B(\nu A) = \sup_{B^0} \nu_y A \leq \int_A \theta(\omega) dP = \sigma A$, soit $C \leq \sigma \Omega$.

Alors la fonction $\rho A = \sup_{B^0} |\nu_y| A$, de Pettis, est bornée car on a

$$\rho A \leq 2 \sup_{A' \subset A} p_B(\nu A').$$

THÉORÈME 4.1. — Soit ξ un processus linéaire sur Y , « majoré par θ » au sens du lemme 5, $d\sigma/dP = \theta$, et $X \in R. N. P.$ Alors

1) Si νA définie par (15) $\in X$ pour A de l'anneau $\mathcal{A} = \{A : \sigma A < \infty\}$, ou si ξ est continu de (Y, τ) dans L^0 (13), alors ξ est représentable par ϕ \mathcal{L} -mesurable et séparant les y . ν est σ -additive sur \mathcal{A} au sens de la semi-norme p_B (indépendamment de l'hypothèse $X \in R. N. P.$), avec \mathcal{A} réunion des \mathcal{A}_n ci-après, dans le 2^e cas.

2) Si ξ est continu de (Y, τ) dans L^1 , νA est définie et faiblement σ -additive sur \mathcal{A} .

3) Lorsque (X, \mathcal{C}) est métrisable (donc de Fréchet), la probabilité cylindrique μ associée à ξ , est de Radon (propriété équivalente à la représentation par ϕ séparant les y).

Preuve de 1). — Soit $\Omega_n = \{\omega : n-1 < \theta(\omega) \leq n\} \in \mathcal{A}$, et \mathcal{A}_n la trace de \mathcal{A} sur Ω_n ($n = 1, 2, \dots$). Sur \mathcal{A}_n les conditions de la définition 4 sont satisfaisantes, et définissent ϕ_n . Dans $\Omega_0 = \{\omega : \theta = 0\}$, les ξ_y sont ~ 0 donc $A \subset \Omega_0 \Rightarrow \nu A = 0$. Alors la fonction ϕ nulle dans Ω_0 et égale à ϕ_n dans Ω_n ,

(13) Pour X de Banach, les affirmations 1) et 3) sont dans [9]. Notre preuve, indépendante de celle de [9], est en fait la même, à partir de la proposition 4.1.

est la densité cherchée, de ν . Si $(y, \phi) \sim 0$, $(y, \phi_n) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega_n$, donc $(y, \phi) = 0$ partout.

Puisque $p_B(\nu A) = \sup_{B^\sigma} \int_A \xi_y dP \leq \theta dP = \sigma A$, la σ -additivité de ν pour

cette norme est claire.

2) En ce cas, le lemme 6 assure $\nu A \in X$, pour tout A de \mathcal{A} , et ν est manifestement σ -additive au sens faible (on la sait alors aussi σ -additive au sens de la topologie $\tilde{\mathcal{C}}$ de X , X complet). Mais nous avons dû garder l'hypothèse « θ fini » pour assurer l'existence de ϕ .

Alors $(y, \nu A) = \int_A y \circ \phi dP$.

3) Suit de la remarque 7.

EXEMPLE 1. — Tout espace X semi-réflexif $\in R. N. P.$

Preuve. — Les bornés B sont, par définition de « semi-réflexif », faiblement compacts, en fait faiblement compacts (car fermés et bornés dans R^T). Alors l'hypothèse de « majoration par θ » équivaut à « μ est faiblement de Radon » suivant les nB . On est ramené au théorème 3.1. Alors νA est automatiquement dans B pour σA fini. Dans [8] est donné l'exemple encore plus particulier de $(X, \tilde{\mathcal{C}})$ espace de Fréchet *et* nucléaire. On voit aisément qu'alors les B sont $\tilde{\mathcal{C}}$ -compacts (donc tout compact faible est $\tilde{\mathcal{C}}$ -compact!).

EXEMPLE 2 (classique). — On suppose que X Banach dual de Y_0 de Banach est séparable (donc Y_0 l'est aussi). Alors $X \in R. N. P.$ En effet $\mathcal{B}(X) = \mathcal{L}(X, Y_0)$, vu la séparabilité de Y_0 ⁽¹⁴⁾, et tout B est compact pour $\sigma(X, Y_0) = \sigma_0$. Alors il n'y a pas de distinction entre les lois de Radon pour $\sigma(X, Y_0)$ et les lois sur \mathcal{B} , fortement de Radon.

EXEMPLE 3. — Si (Y, τ) est nucléaire, $X \in R. N. P.$

Preuve. — *iii)* de la proposition 4.1. équivaut à la τ -continuité en 0 de $\phi(y) = \int e^{i\xi_y(\omega)} P(d\omega)$. Donc (suivant la théorie de Fourier) à ξ_y est associée μ faiblement de Radon : suivant des K_ϵ (a. c.) hilbertiens (X_K est de Hilbert pour la norme p_K). On est encore ramené au théorème 3.1.

DÉFINITION 5. — Nous dirons qu'une martingale (à valeurs dans X),

⁽¹⁴⁾ et celle de X , car les boules de $X \in \mathcal{B}_{\sigma_0}$ et $\mathcal{B}_{\sigma_0} = \mathcal{L}(X, Y_0)$.

relative à une famille croissante de tribus $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}$, est discrète, s'il s'agit d'une suite, que nous notons alors \mathcal{A}_n . Nous dirons une martingale simple si les tribus \mathcal{A}_x sont finies.

ω désignant un partage fini $\Omega = \Sigma A_i$ de Ω (en fait on enlève les A_i qui seraient P-nuls, c'est donc $\Sigma A_i \subset \Omega$ et $\Sigma P A_i = 1$), nous définissons la martingale associée à la mesure ν (ν définie sur \mathcal{A} , faiblement σ -additive) et à une famille (filtrante) de partages ω par

$$(20) \quad \chi_\omega = \nu A_i / P A_i \quad \text{pour } \omega \in A_i, \quad \omega = \{ A_i \}.$$

THÉORÈME 4.2. — Pour que $X \in R. N. P.$

1) Il suffit que toutes les martingales simples et discrètes (suivant les définitions 5) associées aux mesures vectorielles ν de la définition 4, soient de Cauchy pour la semi-norme p_B :

$$(21) \quad p_B(\chi_\omega - \chi_{\omega'}) dP \rightarrow 0.$$

Alors $\phi(\omega) \in B$ et $\chi_\omega \rightarrow \phi$ au sens de L^1 (habituel) relatif à l'espace X_B de Banach, et au filtre de tous les partages finis de \mathcal{A} : ces espaces $X_B \in R. N. P.$

2) Lorsque X est espace de Fréchet, cette condition (21), relative à chaque p_i d'une famille dénombrable de semi-normes, ou à la distance

$$(o, x) = \sum_1^\infty 2^{-i} p_i(x) / 1 + p_i(x) \quad (\text{au lieu de } p_B) \text{ est nécessaire et suffisante.}$$

COROLLAIRE (cf. la remarque 8). — Pour que X de Fréchet $\in R. N. P.$, il suffit (et faut) que ses sous-espaces fermés séparables (munis de la topologie trace) $\in R. N. P.$

Pour que $X \in R. N. P.$, il suffit que tout Banach X_B (: on peut le plonger continûment dans X) séparable $\in R. N. P.$

Preuve de 1). — Soit χ_ω défini par (20). Si (21) n'avait pas lieu, suivant le filtre de tous les partages finis de Ω , il existerait $\eta > 0$ et des couples $\omega_n < \omega'_n \dots < \dots$ (: de partages de plus en plus fins) laissant (21) supérieur à η , contredisant l'hypothèse. Choisisant alors ω_n de sorte que (21) avec $\omega = \omega_n < \omega' = \omega_{n+1}$, soit $< 2^{-n}$, la suite $\chi'_n = \chi_{\omega_n}$ converge p. s. au sens de p_B , donc vers $\phi \in B$ et Bochner-mesurable au sens de X_B (puisque limite en ce sens de fonctions à un nombre fini de valeurs). On a donc $(y, \chi'_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} (y, \phi)$, et on sait que chaque (y, χ_ω) converge aussi au sens de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P, R)$ vers ξ_y (puisque $|(y, \chi_\omega)| \leq 1$ si $y \in B^0$). Ainsi $\xi_y \stackrel{p.s.}{=} (y, \phi)$

et ϕ représente bien ξ et $\nu : (\nu A, y) = \int_A (y, \phi) dP$. De plus on peut prendre

ϕ dans $X_0 \subset X_B$, réduit au sens de (10) pour le dual de X_B , *a fortiori* au sens de Y . On voit que l'hypothèse plus forte prise ici (cf. la remarque 9) entraîne, puisque $\chi_{\omega} = E^{\sigma} \phi$ (espérance conditionnelle) au sens de X_B comme de X , la convergence vers ϕ au sens de $L^1(\Omega, X_B) : X_B \in R. N. P.$

2) Soit X de Fréchet, muni d'une distance invariante *du type susdit* (notée (a, b)). La preuve ci-dessus vaut toujours lorsque la distance $(\chi_{\omega}, \chi_{\omega'})$ remplace $p_B(\chi_{\omega} - \chi_{\omega'})$ dans (21).

En ce qui concerne la réciproque : la nécessité de $\int (\chi_{\omega_n}, \chi_{\omega_m}) dP \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, donnons nous $\mathcal{A} \xrightarrow{\nu} X$, suivant la définition 4, avec $X \in R. N. P.$ Soit ϕ la densité $(\phi(\omega) \in B$ suivant la proposition 5.2) représentant ξ et ν . Du fait que ϕ est Bochner-mesurable (cf. le théorème 3.1) et bornée pour chaque p_i , les χ_{ω} qui sont ici les $E^{\sigma} \phi$ convergent vers $\phi_0 = E^{\mathcal{A}_0} \phi$ (\mathcal{A}_0 tribu engendrée par les ω_n) au sens de L^1 , pour la distance dans X , ou chaque p_i , c'est équivalent. La preuve est celle de [3] (théorème 1).

5. COMPARAISON DE LA DÉFINITION 4 AVEC CELLE DE SAAB

DÉFINITION 6. — X l. c. complet $\in R. N. P.$ au sens de Saab, si, p_i étant une famille filtrante \uparrow de semi-normes définissant la topologie de X , et $\mathcal{A} \xrightarrow{\nu} X$ une mesure vectorielle à p_i -variations bornées (chaque i fixé), nulle avec P , il existe une densité $\phi(\omega)$ telle que les $\pi_i \circ \phi$ soient des densités Bochner-mesurables des $\pi_i \circ \nu$ dans les espaces de Banach X_i quotients de X par $\{x : p_i(x) = 0\}$. Cf. les notations du théorème 1.4.

LEMME 8. — Supposons \mathcal{A} complète pour P , dans Ω . Dans la définition 6, ϕ est \mathcal{L} -mesurable.

Preuve. — Si $\mathcal{L}_i = \pi_i^{-1} \mathcal{L}(X_i)$, on voit que $\alpha \subset \bigcup_i \mathcal{L}_i$, α étant l'algèbre cylindrique de X , et $\cup \mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$. Ainsi $\cup \mathcal{L}_i$ engendre \mathcal{L} . Dans X_i les tribus \mathcal{L}_i et boréliennes sont équivalentes, et, au moins après complétion de \mathcal{A} , $\pi_i \circ \phi$ est mesurable pour ces deux tribus, donc ϕ l'est pour \mathcal{L} .

REMARQUE 9. — Noter que chaque $\pi_i \circ \phi$ équivaut à $\phi_i(\cdot) \in X_i$, séparante au sens de A. I. Tulcea. Cela permet d'affirmer (l'existence de) ϕ « séparante » dans X , seulement si la famille $\{p_i\}$ est dénombrable (cf. le théorème ci-après).

LEMME 9. — Soit X de Fréchet, et ν une mesure à valeurs dans X , nulle avec P et à p_i -variations bornées, alors il existe un borné B dans X conforme au lemme 5 : $\sup_{B^0} \text{ess } \xi_y$ est fini.

Preuve. — A chaque voisinage de 0, $U_i = \{x : p_i(x) \leq 1\}$ dans X , correspond une fonction

$$(23) \quad \theta_i(\omega) = \sup_{U_i^0} |\xi_y(\omega)|,$$

dont l'intégrale C_i égale la p_i -variation totale de ν , suivant le lemme 7.

Choisissons des nombres M_i tels que $\Sigma C_i/M_i < \infty$, et $B = \bigcap_i M_i U_i$.

B^0 est la fermeture de $\{y : y = \Sigma q_i y_i/M_i, \sum_i q_i = 1, y_i \in U_i^0\} = D$.
On a

$$\sup_D \text{ess } |\xi_y| \leq \sup_i \theta_i(\omega)/M_i = \theta(\omega).$$

θ est fini p. s. car $\Sigma P\{\theta_i > M\} \leq \Sigma C_i/MM_i$, implique que $\sup \theta_i/M_i$ égale la borne d'un nombre p. s. fini de ces ν . a.

Enfin si $y \in B^0$, on a $y_\alpha \rightarrow y$ (au sens faible), avec $y_\alpha \in D$, donc $\nu_{y_\alpha} A = \lim \nu_{y_\alpha} A \leq \sigma A = \int_A \theta dP$ (σ mesure σ -finie) assure $\xi_y \stackrel{\text{p.s.}}{\leq} \theta$, ce qu'il fallait vérifier.

THÉORÈME 5.1. — Lorsque X est espace de Fréchet, les définitions 4 et 6 de la propriété de Radon-Nikodym sont équivalentes.

1) Supposons que X réponde à la définition 4, et soit ν (au sens de Saab) à p_i -variations bornées. Suivant le lemme 9, θ (fini) existe ; ν est définie sur \mathcal{A} (et pas seulement sur les $A \in \int_A \theta dP$ fini) donc suivant le théorème 5.1.

est représentée par une densité ϕ \mathcal{L} -mesurable et séparant les y . Suivant le théorème 1.4 (et la fin de la « définition 4 »), les $\pi_i \circ \phi$ sont Bochner-mesurables (équivalent à des ϕ_i mesurables pour $\mathcal{B}(X_i) \sim \mathcal{L}(X_i)$), répondent à la définition de Saab.

2) Soit maintenant $X \in R. N. P.$ au sens de Saab, et $|\xi_y| \leq 1$ p. s. pour tout $y \in B$. La p_B -variation totale de ν est ≤ 1 , donc chaque p_i -variation totale est $\leq 1/M_i$, si $B \subset M_i U_i$. Alors $U_i^0 \subset M_i B^0$ et θ_i (défini par (23)) est $\leq M_i$. Ainsi $\phi \in \mathcal{L}$ existe suivant la définition 6 et le lemme 8. Suivant ce même lemme ϕ appartient p. s. à l'espace X réduit (cf. (10)) relativement

aux y bornées (dans chaque U_i). Ces U_i étant dénombrables, on a donc $\phi \in X_0$ p. s., ϕ' existe séparante (faire $\phi' = 0$ si $\phi \notin X_0$).

REMARQUE 10. — On voit que lorsque X n'est pas métrisable, les définitions 4 et 6 ne se « comparent » pas. Dans le cas 1) de la preuve qui précède, c'est θ fini qui n'existe pas, la définition de Saab est plus restrictive que la nôtre par l'hypothèse plus large concernant ξ . Dans le cas 2), c'est la conclusion qui est plus faible, la définition de Saab n'assure pas que ϕ est séparante.

La propriété qui constitue l'exemple 1 au n° 4, ne vaut plus (semble-t-il) avec la définition de Saab. De même pour l'exemple 3, puisqu'on ne peut se ramener à ξ_y borné, pour assurer la continuité *iii*) de la proposition 4.1.

REFERENCES

- [1] A. BADRIKIAN, Fonctions aléatoires linéaires. *Lecture notes*, n° 139.
- [2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*. Wiley, 1968.
- [3] S. D. CHATTERJI, Martingale convergence and the Radon-Nicodym theorem in Banach Spaces. *Math. Scand.*, t. 22, 1968, p. 21-41.
- [4] I. CSISZAR, On the weak continuity of convolutions. *Studia Sci. Math. Hung.*, t. 6, 1971, p. 27-40.
- [5] J. D. KNOWLES, Measures on topological spaces. *Proc. Lond. Math. Soc.*, t. 17, 1967, p. 139-156.
- [6] J. L. KRIVINE, *Théorie axiomatique des ensembles*. Presses Univ. de France, 1972.
- [7] RAJPUT et VAKHANIA, *On the support of Gaussian probability measures on Locally convex topological vector spaces*. (Conférence on Multivariate Analysis, June 1975).
- [8] E. SAAB, *Dentabilité, points extrémaux et propriété de Radon-Nicodym*, preprint.
- [9] W. SCHACHERMAYER, Mesures cylindriques sur les espaces de Banach qui ont la propriété de Radon-Nicodym. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 282 (A), p. 227-229 (26-1-76).
- [10] L. SCHWARTZ, *Séminaire Maurey-Schwartz, 1974-1975* (École Polytechnique, Paris).
- [11] A. TORTRAT, *Calcul des Probabilités et Introduction aux processus stochastiques*. Masson, 1971.
- [12] A. TORTRAT, « Sur les lois τ -régulières, dans un groupe ou un demi-groupe topologique ». *C. R. Acad. Sci.*, t. 273, 1971, p. 1160-1163.
- [13] A. TORTRAT, « Prolongements τ -réguliers, application aux probabilités gaussiennes ». (Rome 1975, à paraître dans *Symposia Mathematica*).

(Manuscrit reçu le 8 avril 1976)