ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

YVES DERRIENNIC

Lois « zéro ou deux » pour les processus de Markov. Applications aux marches aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 2 (1976), p. 111-129
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_2_111_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 2, 1976, p. 111-129. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Lois « zéro ou deux » pour les processus de Markov. Applications aux marches aléatoires

par

Yves DERRIENNIC
Laboratoire de Probabilités, U. E. R. de Mathématiques et Informatique,
Université de Rennes, BP 25 A 35031 Rennes Cedex

SUMMARY. — Let P be a transition probability. We show that, for every bounded measure, the sequence of the total variations $\|\mu P^n\|$ converges to the total variation of the measure P_μ on the path space Ω with respect to the tail σ-field $\mathscr{A}_\infty$. Then we show, with the martingale theorem, $\sup_{x \in E} \lim_n \|(\delta_x - \delta_x P)P^n\| = 0$ or 2 and the equality to 0 is equivalent to $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{I}$ ($\mathscr{I}$ is the invariant σ-field; δ stands for Dirac measures). Similar conditions equivalent to the triviality of $\mathscr{A}_\infty$ or $\mathscr{I}$ are also given. Main applications to random walks on locally compact groups are: bounded sequences (f_n) such that $f_{n+1} * \mu = f_n$ are constant with respect to n iff n exists such that μ^{*n} and μ^{*n+1} are not mutually singular; for abelian groups, $\|f * \mu^{*n}\|_1 \to \left| \int_G f \right|$ iff μ is strictly aperiodic; for non compact groups, μ^{*n} goes weakly to 0 if μ is aperiodic.

I. INTRODUCTION

Dans [*12*] Ornstein et Sucheston ont montré comment le théorème d'Orey pour les processus de Markov récurrents au sens de Harris et apériodiques, pouvait être déduit d'un résultat général pour les contractions positives, conservatives et ergodiques, d'un espace L^1. Ils ont appelé ce résultat « loi zéro ou deux ». Dans ce travail, avec un argument différent, on étend cette loi à des processus de Markov quelconques. Il s'agit alors d'une condition nécessaire et suffisante pour l'égalité des tribus asymptotique et stationnaire (ou invariante) du processus. La démonstration repose sur l'identification de la limite de la suite $\| \mu P^n \|$ (variation totale ; μ mesure bornée ; P probabilité de transition du processus) à l'aide de la tribu asymptotique, et sur le théorème de convergence des martingales. On donne aussi des conditions nécessaires et suffisantes analogues pour la trivialité des tribus asymptotique et stationnaire.

Ces résultats s'appliquent aux marches aléatoires sur les groupes localement compacts. Ils impliquent un résultat d'Ismagilov sur les groupes de Lie semi-simples [*4*]. Ils permettent d'étendre de façon très simple aux groupes abéliens, des théorèmes de Stam et Ornstein sur les marches aléatoires « non arithmétiques » sur $\mathbb{R}$. Ils fournissent aussi des résultats sur la convergence vers zéro de la suite μ^n ($n^{\text{ème}}$ puissance de convolution de la loi μ de la marche aléatoire), dans le cas des groupes non compacts.

II. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

On considère un espace mesurable $(E, \mathscr{F})$, une probabilité de transition P de cet espace dans lui-même et le processus de Markov canonique associé $(\Omega, \mathscr{A}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_x)_{x\in E}, \theta)$. On utilisera sans référence les notations, la terminologie et les résultats concernant ces objets donnés dans [*9* ; chap. V]. On utilisera de plus les notations suivantes :

— l'espace des fonctions mesurables par rapport à une tribu $\mathscr{B}$ et bornées est noté $b\mathscr{B}$,

— l'espace des fonctions $h \in b\mathscr{F}$ vérifiant $Ph = h$ est noté H ; ces fonctions sont appelées harmoniques,

— l'espace des fonctions $g \in b\mathscr{F}$ pour lesquelles il existe une suite bornée (g_n) dans $b\mathscr{F}$ vérifiant $g_0 = g$ et $g_n = Pg_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$, est noté D. La partie de D formée des fonctions g pour lesquelles la suite (g_n) vérifie $\| g_n \| \leqslant 1$ pour tout n est notée D^1,

— si $\mu \in \mathscr{M}$ (mesures bornées sur $(E, \mathscr{F})$), P_μ désigne la mesure bornée $\int_E \mu(dx) P_x$ définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$; $\| P_\mu \|_{\mathscr{A}_\infty}$ et $\| P_\mu \|_{\mathscr{S}}$ désignent respectivement les variations totales de cette mesure relativement aux tribus asymptotique $\mathscr{A}_\infty$ et stationnaire $\mathscr{S}$, c'est-à-dire :

$$\| P_\mu \|_{\mathscr{A}_\infty} = \sup \left\{ \int_\Omega Z dP_\mu \mid Z \in b\mathscr{A}_\infty \quad \text{et} \quad |Z| \leqslant 1 \right\}$$

$$\| P_\mu \|_{\mathscr{S}} = \sup \left\{ \int_\Omega Z dP_\mu \mid Z \in b\mathscr{S} \quad \text{et} \quad |Z| \leqslant 1 \right\}$$

— l'ensemble des probabilités sur $(E, \mathscr{F})$ est noté $\mathscr{M}_1$.

On sait que la trivialité de $\mathscr{S}P_x$ p. s. pour tout $x \in E$ n'est pas équivalente à sa trivialité P_μ p. s. pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1$. Une petite difficulté du même type se présente quand on veut comparer $\mathscr{A}_\infty$ et $\mathscr{S}$. La proposition qui suit a pour but d'éclaircir ce point.

PROPOSITION 1. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\forall \mu \in \mathscr{M}_1, \quad \mathscr{A}_\infty = \mathscr{S} \quad P_\mu$ *p. s.*

b) $\forall \mu \in \mathscr{M}_1, \quad \forall Z \in b\mathscr{A}_\infty, \quad Z = Z \circ \theta \quad P_\mu$ *p. s.*

c) $\forall Z \in b\mathscr{A}_\infty, \quad \forall x \in E, \quad P_x[Z \neq Z \circ \theta] = 0$

d) $\forall Z \in b\mathscr{A}_\infty, \quad \exists Z' \in b\mathscr{S}, \quad \forall \mu \in \mathscr{M}_1, \quad Z = Z' \quad P_\mu$ *p. s.*

e) $D = H$

Démonstration. — $c \Leftrightarrow b \Rightarrow a$ est évident.

<u>$a \Rightarrow b$</u> Soit $F \in \mathscr{A}_\infty$ et $\mu \in \mathscr{M}_1$. Par hypothèse il existe $F' \in \mathscr{S}$ tel que $F = F'$ P_μ p. s. Si $\mu P \ll \mu$ alors $\bar{\theta}^1 F = \bar{\theta}^1 F' = F' = F$ P_μ p. s. Sinon en remplaçant μ par $\mu' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \mu P^n$ qui vérifie $\mu' P \ll \mu'$ et $P_\mu \ll P_{\mu'}$ on obtient encore le même résultat. On passe alors aux variables aléatoires bornées par des prolongements évidents.

<u>$d \Rightarrow b$</u> Si $\mu P \ll \mu$, $Z = Z' P_\mu$ p. s. implique $Z \circ \theta = Z' \circ \theta = Z' = Z$ P_μ p. s. Sinon on raisonne comme ci-dessus.

<u>$e \Rightarrow d$</u> Soit $Z \in b\mathscr{A}_\infty$. Les fonctions $g_n(x) = \int_\Omega Z \circ \theta_{-n} dP_x$ vérifient $Pg_{n+1} = g_n$ et $\lim_n g_n(X_n) = Z$ P_μ p. s. pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1$, ceci d'après le théorème de convergence des martingales bornées.

Si $D = H$, $g_n = g_{n+1} = g$ pour tout n. Il suffit alors de poser $Z'(\omega) = Z(\omega)$ si $\lim_n g(X_n(\omega))$ existe, 0 sinon pour avoir $Z' = Z$ P_μ p. s. pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1$ et $Z' \in b\mathscr{S}$.

<u>$b \Rightarrow e$</u> Soit $g \in D$. Il existe $Z \in b\mathscr{A}_\infty$ tel que $g(x) = \int_\Omega Z dP_x$. Soit $\mu \in \mathscr{M}_1$ tel que $\mu P \ll \mu$. La condition $Z \circ \theta = Z$ P_μ p. s. entraîne $Pg = g$ μ p. p. Ceci étant vrai pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1$ vérifiant $\mu P \ll \mu$, on obtient $Pg = g$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Dans de nombreuses situations une mesure m est donnée sur $(E, \mathscr{F})$ qui vérifie $mP \ll m$ et on cherche à établir des résultats modulo m. On va donner dans ce cadre un analogue du résultat précédent. En plus des données initiales on a donc :

— m mesure positive σ-finie sur $(E, \mathscr{F})$ vérifiant $mP \ll m$,

— T et T^* les contractions positives duales de $L^1(m)$ et $L^\infty(m)$ définies par P,

— H_m et D_m les sous-espaces de $L^\infty(m)$ correspondant à H et D ; H_m est le sous-espace de L^∞ formé des points fixes sous T^* ; D_m est le sous-espace de L^∞ formé des g pour lesquels il existe une suite bornée (g_n) de L^∞ vérifiant $g_0 = g$ et $T^*g_{n+1} = g_n$. La partie de D_m formée des g pour lesquels la suite (g_n) vérifie $\| g_n \|_\infty < 1$ pour tout n, est notée D_m^1.

PROPOSITION 2. — *H_m est l'espace des classes modulo m des fonctions de* H. *De même D_m est l'espace des classes des fonctions de* D.

Démonstration. — 1) Soit $h \in H_m$; en identifiant l'élément h de L^∞ à un de ses représentants bornés on peut écrire $Ph = h\ m$ p. p. Considérons alors la suite (h_n) définie par $h_0 = h$ et $h_{n+1} = \inf(h_n, Ph_n)$. Cette suite est décroissante bornée et vérifie $Ph_n \geqslant h_{n+1}$, $h_n = h\ m$ p. p. Soit $h_\infty = \lim_n h_n$. On a $h_\infty = h\ m$ p. p. et $Ph_\infty \geqslant h_\infty$. La fonction $h' = \lim_n P^n h_\infty$ est donc un élément de H vérifiant $h' = h\ m$ p. p. ce qui prouve la première assertion.

2) La seconde assertion se ramène à la première en considérant le processus espace-temps ([*10*] [*13*]). Ce processus est associé à la donnée de l'espace $(E \times \mathbb{N}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ et de la probabilité de transition $Q((x, n), .) = P(x, .) \otimes \delta_{n+1}$ (δ désigne les mesures de Dirac). La mesure $m \otimes l$, où l est la mesure de dénombrement sur $\mathbb{N}$ vérifie $(m \otimes l)Q \ll m \otimes l$. Si $g \in D_m$, et si (g_n) est la suite bornée vérifiant $g_0 = g$, $g_n = T^*g_{n+1}$, la fonction $\bar{g}(x, n) = g_n(x)$ définie sur $E \times \mathbb{N}$ modulo $m \otimes l$ vérifie $Q\bar{g} = \bar{g}$, $m \otimes l$ p. p. La première partie de la proposition prouve alors qu'il existe $\bar{g}'$ tel que $\bar{g}' = \bar{g}\ m \otimes l$ p. p. et $Q\bar{g}' = \bar{g}'$. La fonction $g'(x) = \bar{g}'(x, o)$ vérifie bien $g' = g\ m$ p. p. et $g' \in D$.

PROPOSITION 3. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{S} \qquad P_m$ *p. s.*

b) $\forall Z \in b\mathscr{A}_\infty, \quad Z = Z \circ \theta \qquad P_m$ *p. s.*

c) $\forall Z \in b\mathscr{A}_\infty, \quad P_x[Z \neq Z \circ \theta] = 0 \qquad m$ *p. p.*

d) $D_m = H_m$

Démonstration. — A l'aide de la proposition 2, on se ramène facilement à la démonstration de la proposition 1.

Dans la suite on sera encore amené à énoncer des résultats sous deux formes différentes, l'une « modulo P_μ » pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1$, l'autre « modulo P_m ».

Étant donné $\mu \in \mathscr{M}$, les suites $\| \mu P^n \|$ (variation totale) et

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \mu P^i \right\|$$

sont convergentes. La première suite est décroissante. On a de plus pour tout n, k

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+k} \mu P^i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} \mu P^i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{k} \mu P^i \right\|$$

ce qui implique, d'après un résultat bien connu, la convergence de la seconde vers $\inf_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \mu P^i \right\|$. Les limites s'identifient aisément à l'aide des tribus $\mathscr{A}_\infty$ et $\mathscr{S}$.

THÉORÈME 1. — *Pour tout* $\mu \in \mathscr{M}$ *on a*

$$\lim_n \| \mu P^n \| = \| P_\mu \|_{\mathscr{A}_\infty} = \sup \left\{ \int_E g d\mu \mid g \in D^1 \right\}$$

et

$$\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \mu P^i \right\| = \| P_\mu \|_{\mathscr{S}} = \sup \left\{ \int_E h d\mu \mid h \in H, \| h \| \leqslant 1 \right\}.$$

Ce théorème est en fait un cas particulier d'un résultat portant sur une contraction quelconque d'un espace de Banach.

THÉORÈME 2. — *Soient* B *un espace de Banach,* B* *son dual,* S* *la boule unité de* B*, T *une contraction de* B. *Alors pour tout* $x \in B$ *on a*

$$\lim_n \| T^n x \| = \sup \left\{ | \langle x, x^* \rangle | \, ; \, x^* \in \bigcap_n T^{*n} S^* \right\}$$

et

$$\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} T^i x \right\| = \sup \{ | \langle x, x^* \rangle | \, ; \, x^* \in S^* \cap I \}$$

où

$$I = \{ x^* \in B^* \mid x^* = T^* x^* \}$$

Démonstration. — 1) La suite $\| T^n x \|$ est décroissante donc converge. On a

$$\| T^n x \| = \sup_{x^* \in S^*} | \langle T^n x, x^* \rangle | = \sup_{x^* \in T^{*n} S^*} | \langle x, x^* \rangle |$$
$$\geqslant \sup \left\{ | \langle x, x^* \rangle | \, ; \, x^* \in \bigcap_n T^{*n} S^* \right\}$$

donc

$$\lim_n \| T^n x \| \geqslant \sup \left\{ | \langle x, x^* \rangle | \, ; \, x^* \in \bigcap_n T^{*n} S^* \right\}.$$

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour tout n il existe $x_n^* \in S^*$ tel que $|\langle T^n x, x_n^* \rangle| = |\langle x, T^{*n} x_n^* \rangle| \geqslant \|T^n x\| - \varepsilon$. Soit alors $y^* \in S^*$ un point adhérent à la suite $(T^{*n} x_n^*)$ pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ pour laquelle S^* est compact. Comme T^* est continu pour cette topologie, $T^{*n}S^*$ est compact; comme $T^{*(n+1)}S^* \subset T^{*n}S^*$ on a donc $y^* \in \bigcap_n T^{*n}S^*$. Il existe une sous-suite (n_i) telle que

$$|\langle x, y^* \rangle| = \lim_i |\langle x, T^{*n_i} x_{n_i}^* \rangle| \geqslant \lim_n \|T^n x\| - \varepsilon$$

d'où le résultat. (Cette démonstration s'inspire d'un argument donné dans [*6*])

Pour tout n, k

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+k} T^i x \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} T^i x \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{k} T^i x \right\|$$

donc la suite $\frac{1}{n}\left\| \sum_{i=1}^{n} T^i x \right\|$ converge. Si $x^* \in S^* \cap I$,

$$|\langle x, x^* \rangle| = \left| \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i x, x^* \right\rangle \right| \leqslant \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} T^i x \right\|$$

donc $\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} T^i x \right\| \geqslant \sup \{ |\langle x, x^* \rangle| \,;\, x^* \in S^* \cap I \}$.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour tout n il existe $x_n^* \in S^*$ tel que

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} T^i x \right\| - \varepsilon \leqslant \left| \left\langle x, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^{*i} x_n^* \right\rangle \right|$$

Soit alors z^* un point adhérent à la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^{*i} x_n^*$ pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.

Comme pour tout $y \in B$, $|\langle y - Ty, z^* \rangle|$ est adhérent à la suite $\left| \left\langle y - Ty, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^{*i} x_n^* \right\rangle \right|$, on a $z^* \in S^* \cap I$. Il existe une sous-suite (n_j) telle que

$$|\langle x, z^* \rangle| = \lim_j \left| \left\langle x, \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} T^i x_{n_j}^* \right\rangle \right| \geqslant \lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} T^i x \right\| - \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Démonstration du théorème 1. — Considérons d'abord le cas où $\mu \ll m$. Soit $f = \dfrac{d\mu}{dm}$; $\| \mu P^n \| = \| T^n f \|_1$ (norme dans $L^1(m)$). Le théorème 2 donne donc

$$\lim_n \| \mu P^n \| = \sup \left\{ \int_E fgdm \mid g \in \bigcap_n T^{*n} S^* \right\}$$

S^* étant la boule unité de L^∞. Si $g \in D^1_m$, la suite associée (g_n) vérifiant $\| g_n \| \leqslant 1$ pour tout n, $g \in \bigcap_n T^{*n} S^*$. Réciproquement si $g \in \bigcap_n T^{*n} S^*$, il existe $g_1 \in \bigcap_n T^{*n} S^*$ tel que $g = T^* g_1$ car T^* est surjectif de $\bigcap_n T^{*n} S^*$ sur lui-même (cf. [6] ; cela résulte de la compacité de S^* pour $\sigma(E^*, E)$). Par récurrence on construit une suite (g_n) dans $\bigcap_n T^{*n} S^*$ vérifiant $g = g_0$ et $g_n = T^* g_{n+1}$, donc $g \in D^1_m$ et

$$\lim_n \| \mu P^n \| = \sup \left\{ \int_E gd\mu \mid g \in D^1_m \right\} .$$

D'après la proposition 2, D^1_m peut être remplacé par D^1. L'égalité à $\| P_\mu \|_{\mathscr{A}_\infty}$ résulte de la correspondance canonique entre les suites bornées (g_n) vérifiant $g_n = Pg_{n+1}$ et les variables aléatoires asymptotiques bornées.

La seconde série d'égalités se démontre de la même façon en utilisant la correspondance canonique entre les fonctions harmoniques bornées et les variables aléatoires stationnaires bornées. Enfin l'hypothèse faite sur μ au début n'est pas restrictive car toute mesure bornée est dominée par une mesure positive ν vérifiant $\nu P \ll \nu$.

Il peut être intéressant d'indiquer aussi comment la première série d'égalités peut être déduite directement du théorème de convergence des martingales. On pose encore $\mu \ll m$ et $f = \dfrac{d\mu}{dm}$. On a

$$\| \mu P^n \| = \sup \left\{ \int_\Omega (g \circ X_n)(f \circ X_0) dP_m \mid g \in b\mathscr{F}, \| g \| \leqslant 1 \right\}$$
$$= \int_\Omega | E_{P_m}[f \circ X_0 \mid X_n] \mid dP_m .$$

D'après la propriété de Markov $E_{P_m}[f \circ X_0 \mid X_n] = E_{P_m}[f \circ X_0 \mid X_n, X_{n+1} \dots]$ D'après le théorème des martingales $E_{P_m}[f \circ X_0 \mid X_n, X_{n+1} \dots]$ converge dans L^1 vers $E_{P_m}[f \circ X_0 \mid \mathscr{A}_\infty]$ donc

$$\lim_n \int_\Omega | E_{P_m}[f \circ X_0 \mid X_n] \mid dP_m = \int_\Omega | E_{P_m}[f \circ X_0 \mid \mathscr{A}_\infty] \mid dP_m = \| P_\mu \|_{\mathscr{A}_\infty}$$

(dans tout ceci on suppose $m(E) = 1$, ce qui n'est pas une restriction).

Les résultats du théorème 1 ne semblent figurer jusqu'ici dans la littérature que dans le cas où les limites sont nulles, c'est-à-dire où les tribus $\mathscr{A}_\infty$ et $\mathscr{S}$ sont triviales ([*6*] [*10*] [*13*]). Par exemple on a le corollaire suivant ([*10*]) :

COROLLAIRE 1. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathscr{A}_\infty$ *est triviale* P_μ *p. s.*

ii) *pour tout* $B \in \mathscr{A}$, $\lim_n \sup_{A \in \mathscr{A}_\infty^n} | P_\mu(A \cap B) - P_\mu(A)P_\mu(B) | = 0$.

III. LOIS « ZÉRO OU DEUX »

Dans ce paragraphe on donne des conditions nécessaires et suffisantes soit pour l'égalité des tribus $\mathscr{A}_\infty$ et $\mathscr{S}$, soit pour leur trivialité. On introduit les fonctions suivantes :

$$— \quad \alpha(x) = \lim_n \| (\delta_x - \delta_x P)P^n \| \qquad (x \in E)$$

$$— \quad \beta(x, y) = \lim_n \| (\delta_x - \delta_y)P^n \| \qquad ((x, y) \in E \times E)$$

$$— \quad \gamma(x, y) = \lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} (\delta_x - \delta_y)P^i \right\| \qquad ((x, y) \in E \times E).$$

THÉORÈME 3. —

$$\sup \{ \lim_n \| (\mu - \mu P)P^n \| \, ; \, \mu \in \mathscr{M}_1 \} = \sup_{x \in E} \alpha(x) = 0 \textit{ ou } 2.$$

L'égalité à 0 *est une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{S}$ P_μ *p. s. pour tout* $\mu \in \mathscr{M}_1$.

Démonstration. — Supposons $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{S} P_\mu$ p. s. pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1$. La proposition 1 et la propriété de Markov entraînent l'égalité des mesures P_μ et $P_{(\mu P)}$ en restriction à la tribu $\mathscr{A}_\infty$. Alors le résultat cherché résulte du théorème 1.

Réciproquement supposons qu'il existe $\nu \in \mathscr{M}_1$ tel que $\mathscr{A}_\infty \neq \mathscr{S}$ P_ν p. s. Sans restreindre la généralité on peut supposer $\nu P \ll \nu$. Alors il existe $F' \in \mathscr{A}_\infty$ tel que $F' \neq \bar{\theta}^1 F'$ P_ν p. s. En posant $F = F' - \bar{\theta}^1 F'$ ou $F = F' - \theta F'$ si $P_\nu(F' - \bar{\theta}^1 F') = 0$ on définit un élément non négligeable de $\mathscr{A}_\infty$ tel que $F \cap \bar{\theta}^1 F = \emptyset$ P_ν p. s.

Soit $Z = 1_F - 1_{\bar{\theta}^1 F}$ et $g_n(x) = \int_\Omega Z \circ \theta_{-n} dP_x$ $(x \in E)$. On a d'après le théorème de convergence des martingales

$$\lim_n g_n(X_n) = Z \quad P_\nu \text{ p. s.} \quad \text{et aussi} \quad \lim_n g_{n+1}(X_n) = Z \circ \theta_{-1} \quad P_\nu \text{ p. s.}$$

Comme $|Z \circ \theta_{-1} - Z| = 2$ sur F, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in E$ et l entier tels que $|g_{l+1}(a) - g_l(a)| > 2 - \varepsilon$. Comme la suite (g_n) vérifie

$$\| g_n \| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad P^k g_{n+k} = g_n$$

on obtient, pour tout entier k,

$$\| (\delta_a - \delta_a P)P^k \| \geqslant | g_{l+1}(a) - g_l(a) | > 2 - \varepsilon$$

Donc $\sup_{x \in E} \alpha(x) = 2$.

THÉORÈME 4. —

i) $\sup \{ \lim_n \| (\mu_1 - \mu_2)P^n \| \; ; \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1 \} = \sup_{(x,y) \in E \times E} \beta(x, y) = 0$ *ou* 2

L'égalité à 0 *est une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathcal{A}_\infty$ *soit triviale* P_μ *p. s. pour tout* $\mu \in \mathcal{M}_1$.

ii) $\sup \left\{ \lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} (\mu_1 - \mu_2)P^i \right\| \; ; \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1 \right\} = \sup_{(x,y) \in E \times E} \gamma(x, y) = 0$ *ou* 2

L'égalité à 0 *est une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathcal{S}$ *soit triviale* P_μ *p. s. pour tout* $\mu \in \mathcal{M}_1$.

Démonstration. — 1) Si $\mathcal{A}_\infty$ est triviale P_μ p. s. pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1$ on a $\| P_{\mu_1 - \mu_2} \|_{\mathcal{A}_\infty} = 0$ et le théorème 1 donne $\lim_n \| (\mu_1 - \mu_2)P^n \| = 0$.

Réciproquement s'il existe $\nu \in \mathcal{M}_1$ et $F \in \mathcal{A}_\infty$ tels que $0 < P_\nu(F) < 1$ on pose $Z = 1_F - 1_{F^c}$ et

$$g_n(x) = \int_\Omega Z \circ \theta_{-n} dP_x \qquad (x \in E).$$

On a

$$\lim_n g_n(X_n) = Z \quad P_\nu \text{ p. s.}, \qquad P^k g_{n+k} = g_n \quad \text{et} \quad \| g_n \| \leqslant 1$$

donc, pour tout $a, b \in E$

$$\lim_n \| (\delta_a - \delta_b)P^k \| \geqslant | g_n(a) - g_n(b) |$$

d'où

$$\sup_{(x,y) \in E \times E} \beta(x, y) = 2 .$$

2) La seconde assertion se démontre de façon identique en utilisant $\mathscr{S}$ au lieu de $\mathscr{A}_\infty$.

Un entier $k > 1$ étant donné on peut considérer aussi la fonction

$$\alpha_k(x) = \lim_n \| (\delta_x - \delta_x P^k)P^n \| \qquad (x \in E)$$

ainsi que la tribu des événements invariants sous θ^k que l'on note $\mathscr{S}_k$. On obtient alors, en adaptant la démonstration du théorème 3 :

THÉORÈME 5. —

$$\sup \{ \lim_n \| (\mu - \mu P^k)P^n \| ; \mu \in \mathscr{M}_1 \} = \sup_{x \in E} \alpha_k(x) = 0 \textit{ ou } 2 .$$

L'égalité à 0 est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{S}_k$ P_μ *p. s. pour tout* $\mu \in \mathscr{M}_1$.

Ces théorèmes admettent le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. — i) *Si* $\sup_{(x,y) \in E \times E} \beta(x, y) < 2$ *alors pour tout* $\lambda \in \mathscr{M}$

$$\lim_n \| \lambda P^n \| = | \lambda(E) |$$

ii) *Si* $\sup_{(x,y) \in E \times E} \gamma(x, y) < 2$ *alors pour tout* $\lambda \in \mathscr{M}$

$$\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda P^i \right\| = | \lambda(E) |$$

iii) *Si* $\sup_{x \in E} \alpha_k(x) < 2$ *alors pour tout* $\lambda \in \mathscr{M}$

$$\lim_n \| \lambda P^n \| = \sup \left\{ \int_E h d\lambda \mid h \in b\mathscr{F}, P^k h = h, \| h \| \leqslant 1 \right\}$$

Pour $k = 1$, *en posant* $\alpha = \alpha_1$, *on a*

$$\lim_n \| \lambda P^n \| = \sup \left\{ \int_E h d\lambda \mid h \in H, \| h \| \leqslant 1 \right\}$$

Donnons maintenant les analogues des résultats précédents relativement à la mesure m introduite au paragraphe précédent. Considérons les fonctions :

— $\bar{\alpha} = \sup \{ g - T^* g \mid g \in D_m^1 \}$ (sup dans L^∞)

— $\bar{\alpha}_k = \sup \{ g - T^{*k} g \mid g \in D_m^1 \}$ (sup dans L^∞) $(k > 1)$

— $\bar{\beta} = \sup \{ g \otimes 1 - 1 \otimes g \mid g \in D_m^1 \}$ (sup dans L^∞ $(E \times E, m \otimes m)$;

$$f \otimes f'(x, y) = f(x) f'(y)$$

— $\bar{\gamma} = \sup \{ h \otimes 1 - 1 \otimes h \mid h \in H_m, \| h \|_\infty \leqslant 1 \}$
(sup dans L^∞ $(E \times E, m \otimes m)$).

THÉORÈME 6 (2^{de} *forme des lois* « 0 *ou* 2 »). —

i) $\sup \{ \lim_n \| T^n(f - Tf) \|_1 \,; f \in L^1_+, \| f \|_1 = 1 \} = \| \bar{\alpha} \|_\infty = 0$ *ou* 2.

L'égalité à 0 *est une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{S}$ P_m *p. s.*

ii) $\sup \{ \lim_n \| T^n(f_1 - f_2) \|_1 \,; f_1, f_2 \in L^1_+, \| f_1 \|_1 = \| f_2 \|_1 = 1 \}$
$= \| \bar{\beta} \|_\infty = 0$ *ou* 2

L'égalité à 0 *est une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{A}_\infty$ *soit triviale* P_m *p. s.*

iii) $\sup \left\{ \lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} T^i(f_1 - f_2) \right\|_1 ; f_1, f_2 \in L^1_+, \| f_1 \|_1 = \| f_2 \|_1 = 1 \right\}$
$= \| \bar{\gamma} \|_\infty = 0$ *ou* 2

L'égalité à 0 *est une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{S}$ *soit triviale* P_m *p. s.*

iv) $\sup \{ \lim_n \| T^n(f - T^k f) \|_1 \,; f \in L^1_+, \| f \|_1 = 1 \} = \| \bar{\alpha}_k \|_\infty = 0$ *ou* 2.

L'égalité à 0 *est une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{S}_k$ P_m *p. s.*

Démonstration. — Les démonstrations sont analogues à celles des théorèmes 3, 4 et 5. Donnons à titre d'exemple celle de la première assertion.

Si $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{S}$ P_m p. s. $D_m = H_m$ donc $\bar{\alpha} = 0$ et

$$\lim_n \| T^n(f - Tf) \|_1 = \sup \left\{ \int_E f(g - T^*g)dm \mid g \in D^1_m \right\} = 0$$

Réciproquement si $\mathscr{A}_\infty \neq \mathscr{S}$ P_m p. s. il existe $F \in \mathscr{A}_\infty$ tel que $P_m(F) > 0$ et $P_m(F \cap \bar{\theta}^1 F) = 0$. Soit $Z = 1_F - 1_{\bar{\theta}^1 F}$ et $g_n(x) = \int_\Omega Z \circ \theta_{-n} dP$ $(x \in E)$.

D'après le théorème de convergence des martingales

$$\lim_n | g_n(X_n) - g_{n+1}(X_n) | = | Z \circ \theta_{-1} - Z | = 2 \quad \text{sur} \quad F \qquad P_m \text{ p. s.}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc $B \in \mathscr{F}$ et l entier tels que

$$| g_l - g_{l+1} | > 2 - \varepsilon \qquad m \text{ p. p. sur } B.$$

En identifiant g_l et sa classe dans L^∞ on obtient donc $| g_l - T^*g_l | \geqslant 2 - \varepsilon$ m p. p. sur B. Comme $g_l \in D^1_m$ on obtient $\| \bar{\alpha} \|_\infty \geqslant 2 - \varepsilon$, et en prenant

$f \in L^1_+$ tel que $\| f \|_1 = 1$, $f = 0$ m p. p. sur B^c, $\int_E (f - Tf) g_l dm \geqslant 2 - \varepsilon$. Comme $g_l = T^{*k} g_{l+k}$ pour tout k et $\| g_k \|_\infty \leqslant 1$ on obtient

$$\lim_n \| T^n(f - Tf) \|_1 \geqslant 2 - \varepsilon .$$

COROLLAIRE 3. — i) *Si* $\| \bar{\beta} \|_\infty < 2$, *pour tout* $f \in L^1$

$$\lim_n \| T^n f \|_1 = \left| \int_E f dm \right|$$

ii) *Si* $\| \bar{\gamma} \|_\infty < 2$, *pour tout* $f \in L^1$

$$\lim_n \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^n T^i f \right\|_1 = \left| \int_E f dm \right|$$

iii) *Si* $\| \bar{\alpha}_k \|_\infty < 2$, *pour tout* $f \in L^1$

$$\lim_n \| T^n f \|_1 = \sup \left\{ \int_E h f dm \mid h \in L^\infty, T^{*k} h = h, \| h \|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

Pour $k = 1$, *en posant* $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}$, *on a*

$$\lim_n \| T^n f \|_1 = \sup \left\{ \int_E f h dm \mid h \in H_m, \| h \|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

En général les deux formes des lois « 0 ou 2 » ne sont pas équivalentes. Par exemple sur $\mathbb{R}$ la marche aléatoire définie par la mesure $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-a})$ avec a irrationnel > 0 est « non arithmétique », donc en prenant pour m la mesure de Lebesgue on a pour tout $f \in L^1(m)$ tel que $\int f dm = 0$ $\lim_n \| T^n f \|_1 = 0$, ce qui implique $\bar{\beta} = \bar{\alpha} = 0$ m p. p., alors que $\alpha = \beta = 2$ (voir paragraphe IV). La proposition suivante donne un cas important où les deux formes de chacune des lois « 0 ou 2 » sont équivalentes.

PROPOSITION 4. — *Soit* $P^n_s(x, .)$ *la partie singulière avec m de la mesure* $P^n(x, .)$. *Si pour tout* $x \in E$ $\lim_n P^n_s(x, E) = 0$ *alors on a*

i) $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{S}$ P_m *p. s. si et seulement si pour tout* $\mu \in \mathcal{M}_1$, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{S}$ P_μ *p. s.*

ii) $\mathscr{A}_x$ *est triviale* P_m *p. s. si et seulement si pour tout* $\mu \in \mathscr{M}_1$, $\mathscr{A}_x$ *est triviale* P_μ *p. s.*,

iii) $\mathscr{S}$ *est triviale* P_m *p. s. si et seulement si pour tout* $\mu \in \mathscr{M}_1$, $\mathscr{S}$ *est triviale* P_μ *p. s.*

Démonstration. — *i)* Soit $P^n(x, dy) = p_n(x, y)m(dy) + P_s^n(x, dy)$ la décomposition de $P^n(x, .)$ relativement à m. On a alors

$$\begin{aligned} \|(\delta_x - \delta_x P)P^{n+k}\| &< \|T^k(p_n(x, .) - Tp_n(x, .))\|_1 \\ &+ \|T^k(Tp_n(x, .) - p_{n+1}(x, .))\|_1 + \|(P_s^n(x, .) - P_s^{n+1}(x, .))P^k\| \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse on a pour tout k

$$\lim_n \|(P_s^n(x, .) - P_s^{n+1}(x, .))P^k\| = 0$$

D'après $\|Tp_n(x, .) - p_{n+1}(x, .)\|_1 \leqslant P_s^n(x, E)$ on a aussi

$$\lim_n \|T^k(Tp_n(x, .) - p_{n+1}(x, .))\|_1 = 0 .$$

Si $\mathscr{A}_x = \mathscr{S}$ P_m p. s. le théorème 6 appliqué à $p_n(x, .)$ donne donc

$$\lim_n \|(\delta_x - \delta_x P)P^n\| = 0$$

ii) On a

$$\|(\delta_x - \delta_y)P^{n+k}\| \leqslant \|T^k(p_n(x, .) - p_n(y, .))\|_1 + \|(P_s^n(x, .) - P_s^n(y, .))P^k\|$$

Si $\mathscr{A}_x$ est triviale P_m p. s. le corollaire 3 donne

$$\lim_k \|T^k(p_n(x, .) - p_n(y, .))\|_1 = |P_s^n(x, E) - P_s^n(y, E)|$$

donc

$$\lim_n \|(\delta_x - \delta_y)P^n\| = 0$$

iii) D'après le résultat de [*14*] toutes les mesures P_μ vérifient $P_\mu \ll P_m$ sur $\mathscr{S}$ ($\mu \in \mathscr{M}_1$).

Dans [*12*], en supposant l'espace (E, $\mathscr{F}$) séparable, il est démontré que α est mesurable. En supposant T conservatif et ergodique il est aussi démontré que $\|\alpha\|_x < 2$ entraîne $\lim_n \|T^n f\|_1 = 0$ pour tout $f \in L^1$ tel que $\int_E f dm = 0$, et que $\alpha = 0$ ou 2 m p. p. ; le premier résultat résulte du théorème 6 *i)* car on voit immédiatement que $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$ m p. p. ; le second repose sur l'inégalité $T^*\alpha \geqslant \alpha$ et l'invariance des fonctions surinvariantes dans le cas conservatif. De même on a $T^*\bar{\alpha} \geqslant \bar{\alpha}$, donc sous les mêmes hypothèses $\bar{\alpha}$ est constante m p. p. égale à 0 ou 2. Mais, comme le montre l'exemple donné plus haut, même avec ces hypothèses supplémentaires on peut avoir $\bar{\alpha} \neq \alpha$ m p. p. Notons aussi que le théorème 1.1 de [*12*] est une conséquence du théorème 3 dans le cas d'un opérateur défini par une probabilité de transition ; le cas général peut alors être atteint par une méthode classique.

Le théorème d'Orey ([*10*] [*13*]) pour les processus récurrents au sens de Harris et apériodiques peut être déduit des résultats précédents, comme il est indiqué dans [*12*]. (La récurrence entraîne la trivialité de $\mathscr{S}$, l'apériodicité entraîne $\sup_{x\in E} \alpha(x) < 2$ donc la trivialité de $\mathscr{A}_\infty$). En même temps ces résultats montrent dans quelle mesure il est possible d'affaiblir les hypothèses de ce théorème :

— la récurrence au sens de Harris peut être remplacée par l'hypothèse : T est conservatif et ergodique. Dans ce cas $\mathscr{S}$ est triviale P_m p. s. et $\bar{\alpha}$ est constante m p. p. Pour obtenir $\bar{\alpha} < 2$, l'apériodicité peut être remplacée par la condition suivante : il existe $A \in \mathscr{F}$, $m(A) > 0$, et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $B \subset A$

$$\lim_n \| T^n(1_B - T1_B) \|_1 \leqslant (2 - \varepsilon) m(B)$$

— si l'hypothèse de conservativité est supprimée, celle d'ergodicité maintenue, donc aussi la trivialité de $\mathscr{S}$, l'hypothèse d' « apériodicité » qui conduit à $\| \bar{\alpha} \|_\infty < 2$ doit être renforcée. En effet il existe des chaînes (états dénombrables) irréductibles, apériodiques, pour lesquelles $\mathscr{S}$ est triviale P_μ p. s. pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1$, mais pour lesquelles la conclusion du théorème d'Orey est fausse. Par exemple la chaîne dont l'espace des états est $\mathbb{N}$ et la probabilité de transition vérifie :

$P(n, n) = r_n > 0$, $P(n, n+1) = p_n > 0$, $P(n, 0) = q_n > 0$ avec $r_n + p_n + q_n = 1$ et

$$\prod_{n=0}^{\infty} p_n > 0 .$$

$$\left(\text{dans ce cas } \| \delta_n P^k - \delta_n P^{k+1} \| \geqslant 2 \prod_{i=n}^{n+k} p_i \text{ pour tout } k \right).$$

L'apériodicité d'une chaîne peut être renforcée d'une condition d'uniformité. Si une chaîne est irréductible, a une tribu $\mathscr{S}$ triviale P_μ p. s. pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1$ (i. e. n'admet que les constantes pour harmoniques bornées), et vérifie la condition d' « uniforme apériodicité » suivante : « il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in E$ $\sup_{n \geqslant 0} (\inf (P^n(x, x), P^{n+1}(x, x))) > \varepsilon$ » alors la conclusion du théorème d'Orey est encore valable. Le passage de l'apériodicité à l' « uniforme apériodicité » est immédiat dans le cas récurrent, mais aussi dans bien d'autres cas. Par exemple celui des marches aléatoires sur les groupes ou espaces homogènes.

IV. APPLICATIONS AUX MARCHES ALÉATOIRES SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

Soit G un groupe localement compact et μ une mesure de probabilité sur G. On va appliquer les résultats précédents à la marche aléatoire droite définie par μ sur G, c'est-à-dire au processus de Markov de probabilité de transition $\delta_x * \mu$ $(x \in G)$. Désormais m désignera une mesure de Haar à droite ; c'est une mesure invariante pour ce processus.

Comme, pour tout $\lambda \in \mathcal{M}$, $\| \delta_x * \lambda \| = \| \lambda \|$, la fonction α est constante, égale à $\lim_n \| \mu^n - \mu^{n+1} \|$, les fonctions β et γ vérifient $\beta(x, y) = \beta(e, x^{-1}y)$ et $\gamma(x, y) = \gamma(e, x^{-1}y)$ (les notations sont celles de III ; e désigne l'élément neutre de G). De même, comme D_m est globalement invariant par translations à gauche, $\bar{\alpha}$ est constante m p. p. et $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$; $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sont invariantes m p. p. par translations à gauche.

Dans la suite on supposera toujours l'hypothèse suivante satisfaite :

— la mesure μ n'est pas portée par un sous-groupe fermé propre de G.

Si G est abélien la loi « zéro ou un » de Hewitt et Savage entraîne que, pour tout $x \in G$, $\mathcal{A}_x$ est triviale pour P_x ; le théorème de Choquet-Deny selon lequel les fonctions harmoniques bornées sont constantes m p. p. s'en déduit facilement ([*8*]). En combinant ce fait avec les résultats précédents on va montrer qu'on obtient très simplement les résultats connus sur l'équirépartition (dans le cas de $\mathbb{R}$ voir [*15*] [*11*] ; dans le cas général [*5*] ; dans [*3*] des résultats du même type sont donnés pour des classes de groupes non abéliens).

PROPOSITION 5. — *Si* G *est abélien, on a, pour tout* $x, y \in G$

$$\lim_n \| (\delta_x - \delta_y) * \mu^n \| = 0 \quad ou \quad 2$$

Démonstration. — D'après le théorème 1,

$$\lim_n \| (\delta_x - \delta_y) * \mu^n \| = \| P_x - P_y \|_{\mathcal{A}_\infty} .$$

D'après la loi de Hewitt et Savage, les lois P_x sont dégénérées sur $\mathcal{A}_\infty$; P_x et P_y sont donc soit égales, soit étrangères.

PROPOSITION 6. — *Si* G *est abélien, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *μ n'est pas portée par une classe d'un sous-groupe fermé propre,*

ii) *pour tout* $f \in L^1(m)$, $\lim_n \| f * \mu^n \|_1 = \left| \int_G f dm \right|$.

iii) *pour tout* $f \in L^1(m)$ *tel que* $\int_G f dm = 0$, $\lim_n \| f * \mu^n \|_1 = 0$.

Démonstration. — Si μ est portée par la classe aH d'un sous-groupe fermé H, alors la loi $\mu \otimes \delta_1$ de la marche « espace-temps » sur $G \times \mathbb{Z}$, est portée par le sous-groupe fermé de $G \times \mathbb{Z}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (a^n H \times \{ n \})$. Réciproquement si $\mu \otimes \delta_1$ est portée par le sous-groupe fermé K de $G \times \mathbb{Z}$, alors μ est portée par une classe du sous-groupe $K \cap (G \times \{ 0 \})$ de G.

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Si $g \in D_m$, avec $g = g_n * \mu^n$, $g_{n+1} * \mu = g_n$, la fonction h définie sur $G \times \mathbb{Z}$ par $h(x, n) = g_n(x)$ est bornée, harmonique pour $\mu \otimes \delta_1$; elle est donc constante p. p. car $\mu \otimes \delta_1$ n'est pas portée par un sous-groupe fermé propre de $G \times \mathbb{Z}$. Donc g est constante m p. p. sur G et le corollaire 3 donne *ii)*.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Évident.

iii) $\Rightarrow$ *i)*. D'après le théorème 6, *iii)* entraîne que D_m ne contient que les constantes p. p. Les harmoniques bornées pour $\mu \otimes \delta_1$ sont donc constantes p. p. et $\mu \otimes \delta_1$ ne peut pas être portée par un sous-groupe fermé propre de $G \times \mathbb{Z}$, d'où *i)*.

PROPOSITION 7. — *Si* G *est abélien les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) μ *est étalée et n'est pas portée par une classe d'un sous-groupe fermé propre de* G,

ii) *pour tout* $\lambda \in \mathcal{M}$, $\lim_n \| \lambda * \mu^n \| = | \lambda(G) |$,

iii) *pour tout* $x \in G$, $\lim_n \| (\delta_e - \delta_x) * \mu^n \| = 0$.

Démonstration. — *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Si μ est étalée l'hypothèse de la proposition 4 est satisfaite ([*13*]), et on se ramène aussitôt à la proposition 6.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Évident.

iii) $\Rightarrow$ *i)*. On est dans le cas $\beta = 0$ donc $\mathcal{A}_\infty$ est triviale P_μ p. s. pour tout $\mu \in \mathcal{M}$; d'après le théorème 6 et la proposition 6, μ n'est donc pas portée par une classe d'un sous-groupe fermé. Le fait que μ soit étalée résulte d'un résultat général pour les processus de Markov : si $\beta = 0$, $P_x = P_m$ sur $\mathcal{A}_\infty$ et donc sur $\mathcal{S}$, pour tout $x \in E$; cela implique que la partie non singulière de P^n, par rapport à m, tend vers 1 ([*14*]).

Si G n'est pas abélien, il peut exister des fonctions harmoniques bornées non constantes et $\mathcal{S}$ n'est pas triviale P_m p. s. Il peut être cependant intéressant de caractériser les mesures pour lesquelles α ou $\bar{\alpha}$ est < 2, autrement dit pour lesquelles les seules suites bornées (f_n) vérifiant $f_{n+1} * \mu = f_n$

sont constantes en n. La condition donnée dans le cas abélien ne semble pas se généraliser, même pour des mesures étalées : dans [*16*] une mesure très simple est construite sur le groupe libre à deux générateurs, qui n'est pas portée par une classe d'un sous-groupe distingué propre, mais dont les puissances sont étrangères deux à deux et donc pour laquelle $\alpha = 2$. Remarquons quand même que si μ a une partie absolument continue strictement positive au voisinage de e, alors $\alpha < \| \mu - \mu^2 \| < 2$; ceci suffit pour démontrer un résultat de [*4*] relatif aux groupes de Lie semi-simples.

Pour terminer nous allons donner quelques résultats relatifs à la convergence de μ^n vers 0.

THÉORÈME 7. — *Si* G *n'est pas compact, si* $\bar{\alpha} < 2$ *(en particulier s'il existe n tel que* μ^n *et* μ^{n+1} *ne sont pas étrangères) alors pour tout* $f \in L^p(m)$ $(1 < p < \infty)$,

$$\lim_n \| f * \mu^n \|_p = \lim \| f * \check{\mu}^n \|_p = 0$$

($\check{\mu}$ *est la mesure symétrique de* μ*).*

Démonstration. — Si G n'est pas compact, il n'existe pas de fonction harmonique non nulle dans L^q $(1 \leqslant q < \infty)$ (sinon en régularisant par des fonctions continues à support compact, on construirait des fonctions harmoniques, continues, tendant vers 0 à l'infini, non nulles, ce qui est impossible).

Cela implique que les ensembles de $\mathscr{S}$ sont de mesure P_m nulle ou infinie. L'hypothèse $\bar{\alpha} < 2$, entraîne, d'après le théorème 6, la même propriété pour $\mathscr{A}_\infty$, donc

$$L^q(\Omega, \mathscr{A}_\infty, P_m) = \{ 0 \} \qquad (1 \leqslant q < \infty).$$

Comme

$$\| f * \check{\mu}^n \|_p \leqslant \| V^n(f \circ X_0) \|_{L^p(\Omega, \mathscr{A}, P_m)}$$

où V est l'adjoint de l'opérateur $Z \to Z \circ \theta$, pour obtenir $\lim \| f * \check{\mu}^n \|_p = 0$ il suffit d'appliquer le théorème 2 à V ; l'autre égalité s'en déduit aussitôt car $\bar{\alpha} < 2$ entraîne la même propriété pour la marche duale induite par $\check{\mu}$ (la fin de cette démonstration est valable pour un processus de Markov ayant une mesure invariante infinie [7]).

Le dernier résultat n'utilise pas les résultats précédents, mais repose sur les mêmes idées.

THÉORÈME 8. — *Si* G *n'est pas compact la suite* μ^n *converge vaguement vers* 0.

Démonstration. — Observons d'abord que la convergence vague de μ^n

vers 0 est équivalente à la convergence faible dans $L^2(m)$; ceci se démontre aisément par approximation. D'autre part si la marche est transitoire le résultat est évident, on peut donc la supposer récurrente. D'après [2] (chap. VIII), si P est une contraction positive d'un espace L^2, la convergence faible vers 0 des suites $P^n f$ et $P^{*n}f$ a lieu si f est orthogonal au sous-espace $\{ g \in L^2 ; \| g \|_2 = \| P^n g \|_2 = \| P^{*n} g \|_2, n \in \mathbb{N} \}$; de plus $\| P^n g \|_2 = \| g \|_2$ si et seulement si $P^{*n}P^n g = g$. Nous allons montrer dans le cas présent que, si G n'est pas compact, ce sous-espace est nul. Supposons qu'il existe $f \in L^2(m)$, $f \neq 0$ tel que $f * \mu^n * \check{\mu}^n = f$ pour tout n. Par régularisation par une fonction continue à support compact, on peut construire une fonction g continue, tendant vers 0 à l'infini, telle que $g(e) \neq 0$ et $g * \mu^n * \check{\mu}^n = g$ pour tout n. Cela implique que le support W_n de la mesure $\mu^n * \check{\mu}^n$ engendre un sous-groupe compact H_n qui vérifie $H_n = \overline{\bigcup_{k \geqslant 0} W_n^k}$ (car les marches aléatoires sur les groupes compacts sont récurrentes). On a de plus $H_n \subset \{ x ; g(yx) = g(y) \ \forall y \}$ qui est compact, et $xW_n x^{-1} \subset W_{n+1}$ donc $xH_n x^{-1} \subset H_{n+1}$ pour tout $x \in S_\mu$, le support de μ. Le sous-groupe fermé K engendré par $\bigcup_n H_n$ est donc compact et vérifie $xKx^{-1} \subset K$ pour tout $x \in S_\mu$. La marche aléatoire de loi μ étant supposée récurrente, $G = \overline{\bigcup_{k \geqslant 0} S_\mu^k}$, et K est un sous-groupe distingué. Puisqu'il porte $\mu * \check{\mu}$, une de ses classes porte μ. La marche aléatoire projetée sur le groupe G/K est donc définie par une mesure de Dirac et récurrente. Cela implique que G/K est abélien et compact. Donc G est compact.

Remarque. — Ce résultat a aussi été obtenu récemment par Mukherjea avec une démonstration différente. Dans le cas où le support d'une puissance μ^n contient e en particulier dans le cas d'une marche récurrente sur un groupe discret, la démonstration précédente se simplifie. En effet, en raison de l'uniforme convexité de la boule unité de L^2, l'égalité $\| f * \mu^n \|_2 = \| f \|_2$ entraîne alors $f * \mu^n = f$, donc $f = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. R. FOGUEL, *The ergodic theory of Markov processes*. Van Nostrand New York, 1969.

[2] S. R. FOGUEL, On the « Zero-Two » Law. *Israel J. Math.* vol. **10**, 1971, p. 275-280.

[3] Y. GUIVARC'H, Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math. France*, t. **101**, 1973, p. 333-379.

[4] R. S. ISMAGILOV, On the tail algebra for random sequences. *Theory of Proba. (translation)*, vol. **18**, n° 1, 1973, p. 180-186.

[5] G. LETAC, Groupe de Stam d'une probabilité. *Ann. Inst. H. Poincaré B*, vol. VIII, nº 2, 1972, p. 175-181.
[6] M. LIN, Mixing for Markov operators. *Z. Wahrschein*, t. **19**, 1971, p. 231-242.
[7] M. LIN, Convergence of the iterates of a Markov operator. *Z. Wahrschein*, t. **29**, 1974, 153-163.
[8] P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*. Hermann Act. Scient. Indus., 1318, 1966.
[9] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, Paris, 1964.
[10] S. OREY, *Limit theorems for Markov chain transition probabilities*. Van Nostrand, New York, 1971.
[11] D. S. ORNSTEIN, Random Walks I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **138**, 1969, p. 1-43.
[12] D. S. ORNSTEIN and L. SUCHESTON, An operator theorem on L^1-convergence to zero with applications to Markov kernels. *Ann. Math. Stat.*, vol. **41**, nº 5, 1970, p. 1631-1639.
[13] D. REVUZ, *Markov chains*. North Holland Pub. Comp. 1975.
[14] J. ROUDIER, Chaîne de Markov μ-continue à l'infini. *Ann. Inst. H. Poincaré B*, vol. VIII, nº 3, 1972, p. 241-248.
[15] A. J. STAM, On shifting iterated convolutions I. *Compositio Mathematica*, t. **17**, 1966, p. 268-280.
[16] S. GLASNER, *On Choquet-Deny measures*. preprint.

(Manuscrit reçu le 22 mars 1976)