ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. DELODE
O. ARINO
J.-P. PENOT

Champs mesurables et multisections

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 1 (1976), p. 11-42
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_1_11_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 1, 1976, p. 11-42. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Champs mesurables et multisections

par

C. DELODE, O. ARINO, J.-P. PENOT

Pour exprimer qu'un espace E_t dépend d'un paramètre $t \in T$ on a le choix entre différentes formulations. Une première possibilité consiste à considérer E_t comme la valeur en t d'une certaine multi-application, la régularité de la dépendance en t s'exprimant par des propriétés de continuité ou de mesurabilité de la multi-application. Une seconde possibilité consiste à considérer E_t comme la fibre d'un certain espace fibré E au-dessus de T, la régularité de la dépendance en t se traduisant par la nature de la fibration (et l'on sait combien ce concept revêt de parures différentes). Un cas particulier est celui où E_t est indépendant de t : à la multi-application constante de valeur E_{t_0} correspond le fibré trivial $T \times E_{t_0} \to T$.

Dans ce travail nous introduisons la catégorie des champs mesurables séparables d'espaces métriques dans le but de considérer la théorie des multi-applications mesurables et ses applications (cf. par exemple [*2*] [*3*] [*4*] [*9*] [*10*] [*14*] [*15*] [*16*] [*20*] [*23*] [*24*] [*29*]) du point de vue des espaces fibrés. Le résultat principal qui traduit l'existence de sélections mesurables d'une multi-application à valeurs complètes dans un espace métrique séparable s'exprime (sous des conditions que nous ne précisons pas dans cette introduction) sous la forme d'une caractérisation des sous-objets d'un objet de la catégorie des champs mesurables séparables d'espaces métriques.

Notre démarche a pour intérêt de permettre l'utilisation des constructions classiques dans la théorie des espaces fibrés (produit, somme de Whitney, image réciproque...) pour les questions de sélection, d'intégrandes normales, de désintégration de mesures (seul le premier point est abordé ici). Inversement, la grande souplesse des propriétés de mesurabilité permet de conserver une structure d'espace fibré dans des situations (par exemple intersection de deux sous-fibrés d'un fibré) où une structure plus rigide serait exclue.

Nous tenons à remercier MM. Castaing et Valadier pour les remarques, les critiques et les variantes qu'ils nous ont proposées.

1. GÉNÉRALITÉS

1.A. Définitions

1.1. DÉFINITION. — *Un champ d'espaces métriques est la donnée d'un ensemble* T, *et d'une famille* $(E_t, d_t)_{t\in T}$ *d'espaces métriques.*

De manière équivalente un champ d'espaces métriques est la donnée d'une application surjective entre deux ensembles $p : E \to T$ et d'une application

$$d : E \underset{T}{\times} E \to \mathbb{R}_+$$

où $E \underset{T}{\times} E = \{ (e, e') \in E \times E \mid p(e) = p(e') \}$ telle que pour tout $t \in T$ la restriction de d à $E_t \times E_t$ soit une distance sur $E_t = p^{-1}(t)$. On dit que T est la *base*, $E = \bigcup_{t\in T} E_t$ l'*espace total*, p la projection, E_t la *fibre* au-dessus de t. Une *section* de p est une inverse à droite s de $p : p \circ s = \mathrm{Id}_T$ c'est-à-dire une application $s : T \to E$ telle que $s(t) \in E_t$ pour tout $t \in T$.

1.2. DÉFINITION. — *Un champ mesurable d'espaces métriques est la donnée d'un champ d'espaces métriques* (E, T, p, d), *d'une tribu* $\mathcal{T}$ *sur* T *et d'une famille* X *de sections de p, i. e. d'un sous-ensemble* $X \subset \prod_{t\in T} E_t$ *vérifiant les axiomes :*

(CM1) *(Stabilité par limite simple). Si* $x_n \in X$ *pour* $n \geqslant 1$ *et si* x *est une section de* p *telle que* $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ *pour tout* $t \in T$ *alors* $x \in X$.

(CM2) *(Stabilité par recollement). Si* $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ *et si* $A_1 \in \mathcal{T}$, *si* $A_2 = T - A_1$, *la section* x *de* p *définie par* $x \mid A_1 = x_1 \mid A_1$, $x \mid A_2 = x_2 \mid A_2$ *appartient à* X.

(CM3) *(Compatibilité). Pour tout* x *et* y *dans* X *la fonction* $d_{x,y}$ *de* T *dans* $\mathbb{R}_+$ *donnée par* $d_{x,y}(t) = d_t(x(t), y(t))$ *est mesurable.*

(CM4) *(Densité). Pour tout* $t \in T$ *l'ensemble* $X(t) = \{ x(t) \mid t \in T \}$ *des valeurs prises par les éléments de* X *est partout dense dans* E_t.

On pourrait donner une notion analogue, appellée champ mesuré d'espaces métriques dans laquelle (T, $\mathcal{T}$) est remplacé par un espace mesuré

$(T, \mathscr{C}, \mu)$, les axiomes (CM1) et (CM3) étant donnés au sens μ-presque partout.

Cet article se propose d'étendre au cas des champs mesurables d'espaces métriques des propriétés des multi-applications mesurables connues dans le cas d'un champ trivial. Le *champ trivial* (E, T, p, d) de base T et de fibre M un espace métrique est obtenu en prenant $E = T \times F$, $p = \operatorname{proj} T$, $d_t(e, e') = d(m, m')$ si $e = (t, m) \in E$, $e' = (t, m') \in E$, X étant l'ensemble des applications x :

$$x = (Id_T, \bar{x}) \qquad \text{avec} \qquad \bar{x} : T \to M \text{ mesurable}$$

1.3. Remarques. — 1. La famille X est appelée famille des sections mesurables. Cette terminologie, formelle pour l'instant, ne le restera pas longtemps.

2. Chaque fibre a une topologie associée à la distance d_t ; on peut donc parler de limite simple de sections. Par contre on ne peut pas parler de limite simple d'applications de T dans E car E n'a pas de topologie.

3. La famille X est stable par recollement dénombrable : si $(T_n)_{n \geqslant 1}$ est une partition dénombrable avec $T_n \in \mathscr{C}$ pour tout n et si $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de X la section x caractérisée par $x \mid T_n = x_n \mid T_n$ est dans X. C'est une conséquence simple des axiomes (CM1) et (CM2).

1.4. Définition. — *Un champ mesurable séparable d'espaces métriques est un champ mesurable d'espaces métriques qui satisfait l'axiome supplémentaire :*

(CMS) *Il existe une partie dénombrable* X_0 *de* X *telle que pour tout* $t \in T$ $X_0(t) = \{ a(t) \mid a \in X_0 \}$ *soit partout dense dans* E_t.

Toutes les fibres d'un champ mesurable séparable sont donc des espaces métriques séparables. La réciproque est fausse comme le montre un exemple de O. Maréchal [*17*], exemple 5.1.

1.5. Proposition. — *Soient* (E, T, p, d) *un champ d'espaces métriques,* $\mathscr{C}$ *une tribu sur* T *et* X *une famille de sections de p vérifiant* (CM3) *et* (CMS). *Alors il existe une plus petite famille* $\tilde{X}$ *qui contient* X *et vérifie* (CM1), (CM2), (CM3), (CM4) *et* (CMS).

Preuve. — Soit $\tilde{X}$ la famille des sections x de p telles que pour tout $a \in X_0$ la fonction $t \to d_{x,a}(t) = d_t(x(t), a(t))$ soit mesurable. Il est clair que $\tilde{X}$ vérifie (CM1), (CM2), et contient X donc X_0, de sorte que (CMS) a lieu. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $\tilde{X}$ vérifie (CM3) car alors X sera la plus petite famille de sections ayant cette propriété et contenant X. Pour cela il suffit d'établir le lemme qui suit.

1.6. LEMME. — *Tout élément de $\tilde{X}$ est limite simple d'une suite de sections obtenues à partir de* X *par recollement dénombrable.*

Preuve. — Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une indexation des éléments de X_0. Pour $y\in\tilde{X}$ posons pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$

$$T_{k,n} = \left\{ t\in T \mid d_t(y(t), a_k(t)) \leqslant \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{T}$$

Pour tout $n \geqslant 1$ fixé on a $T = \bigcup_{k\geqslant 1} T_{k,n}$. Posons

$$S_{k,n} = T_{k,n} - \bigcup_{j<k} T_{j,n}$$

et définissons une section y_n de p par $y_n \mid S_{k,n} = a_k \mid S_{k,n}$ pour $k \geqslant 1$. Alors y est limite simple de la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ car pour tout $t\in T$ on a

$$d_t(y(t), y_n(t)) \leqslant \frac{1}{n}. \qquad \square$$

1.7. COROLLAIRE. — *Si* $(E, T, p, d, \mathscr{T}, X, X_0)$ *est un champ mesurable séparable d'espaces métriques l'axiome suivant est vérifié.*

(CM5) *Toute section x de p telle que pour tout $a\in X$ la fonction $t \to d_{a,x}(t) = d_t(a(t), x(t))$ soit mesurable appartient à* X.

En fait il suffit que $d_{a,x}$ soit mesurable pour tout $a\in X_0$ pour que x soit dans X.

Inversement (CM5) entraîne (CM1) et (CM2) si (CM3) et (CMS) sont vérifiées.

Dans toute la suite de ce travail tous les champs mesurables seront séparables.

1.8. DÉFINITION. — *Le tube de centre $x\in X$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble*

$$B(x, r) = \{ e\in E \mid d_{p(e)}(x(p(e)), e) < r \}$$

Un bout de tube est une intersection $p^{-1}(S) \cap B(x, r)$ avec $S\in\mathscr{T}$, $r > 0$, $x\in X$. On notera $\mathscr{E}$ la tribu sur E *engendrée par les bouts de tubes, $\mathscr{A}$ la famille des tubes, $\mathscr{B}$ la famille des bouts de tubes.*

Remarquons que la tribu $\mathscr{E}$ induit sur chaque fibre E_t la tribu borélienne $\mathscr{B}(E_t)$ en vertu de (CM4).

La proposition suivante justifie *a posteriori* la terminologie.

1.9. PROPOSITION. —1) *L'application $p : (E, \mathscr{E}) \to (T, \mathscr{T})$ est mesurable.*

2) *L'ensemble* X *est exactement l'ensemble des sections de* p *qui sont mesurables pour* $\mathscr{T}$ *et* $\mathscr{E}$.

Preuve. — L'assertion 1) est immédiate. Si $x \in X$, pour tout bout de tube $B = p^{-1}(S) \cap B(y, r)$ avec $S \in \mathscr{T}$, $y \in X$, $r > 0$ nous avons

$$x^{-1}(B) = S \cap d_{x,y}^{-1}([0, r[)$$

donc $x^{-1}(B) \in \mathscr{T}$ d'après (CM3). Inversement, toute section de p, mesurable pour $\mathscr{E}$ et $\mathscr{T}$ est dans X ; c'est une conséquence directe du corollaire 1.7. □

1.10. Proposition. — *Si toutes les fibres de* p *contiennent plus d'un élément,*

1) $\mathscr{E}$ *est la tribu engendrée par la famille* $\mathscr{A}$ *des tubes,*

2) $\mathscr{E}$ *est la plus petite famille stable par intersection dénombrable et union dénombrable qui contienne* $\mathscr{A}$,

3) $\mathscr{E}$ *est la tribu engendrée par la famille* $\mathscr{A}'$ *des tubes de rayons variables i. e. la famille des* $A_{x,\alpha}$ *avec* $x \in X$, $\alpha : T \to \mathbb{R}_+^*$ *étant une fonction mesurable et*

$$A_{x,\alpha} = \{ c \in E \mid d_{p(e)}(x(p(e)), e) < \alpha(p(e)) \}$$

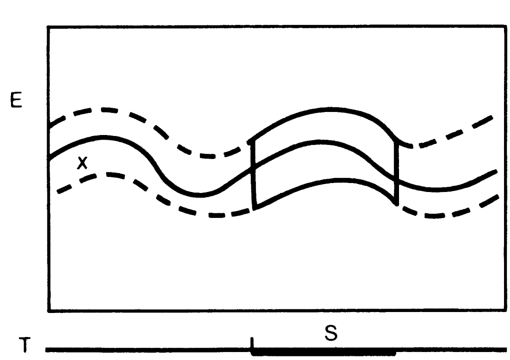
Bien entendu, $\mathscr{E}$ est aussi dans ce cas la tribu engendrée par les tubes fermés.

Lorsque $p = (E, T, p, d, \mathscr{T}, X, X_0)$ est le champ trivial de fibre M un espace métrique séparable (M, d) la tribu $\mathscr{E}$ est la tribu $\mathscr{T} \oplus \mathscr{B}(M)$ où $\mathscr{B}(M)$ est la tribu borélienne de M. Ce n'est la tribu engendrée par les tubes que si card $M > 1$, ce qui montre la nécessité de l'hypothèse de la proposition 1.10.

Pour la démonstration, nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant.

1.11. Lemme. — *Pour tous* $S \in \mathscr{T}$, $r > 0$, $x \in X$ *l'ensemble*

$$C = [p^{-1}(S) \cap B(x, r)] \cup x(T)$$



est dans la plus petite famille $\mathscr{C}$ contenant $\mathscr{A}$ et stable par intersection dénombrable et union dénombrable.

Preuve. — Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une indexation des éléments de X_0. Introduisons la famille $(x_{m,n})_{m \geqslant 1, n \geqslant 1}$ des éléments de X donnés par

$$x_{m,n}(t) = \begin{cases} a_n(t) & \text{si} \quad t \in S \quad \text{et si} \quad d_t(a_n(t), x(t)) < r - \dfrac{1}{m} \\ x(t) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$B_t(e, r)$ désignant la boule ouverte de (E_t, d_t) de centre $e \in E_t$ et de rayon r. Le lemme sera conséquence de l'égalité $C = C'$ avec

$$C' = \bigcup_{k \geqslant 1} \bigcap_{m \geqslant k} \bigcup_{n \geqslant 1} B\left(x_{m,n}, \frac{1}{m}\right).$$

Soit $e \in C'$ et soit $t = p(e)$. Si $t \notin S$ nous avons $x_{m,n}(t) = x(t)$ pour tous m et n et il existe $k \geqslant 1$ avec $e \in \bigcap_{m \geqslant k} B_t\left(x(t), \frac{1}{m}\right)$ donc $e = x(t)$.

Si $t \in S$ prenons $m \geqslant \frac{1}{r}$ assez grand et $n \geqslant 1$ avec $e \in B_t\left(x_{m,n}(t), \frac{1}{m}\right)$. Nous avons :

soit $x_{m,n}(t) = x(t)$ donc $B_t\left(x_{m,n}(t), \frac{1}{m}\right) \subset B_t(x(t), r)$,

soit $d_t(x_{m,n}(t), x(t)) < r - \frac{1}{m}$

donc $e \in B_t(x(t), r)$. Ainsi $e \in C$.

Inversement, prenons $e \in C$, et posons $t = p(e)$. Si $t \notin S$ nous avons $e = x(t)$ et $e \in \bigcap_{m \geqslant 1} B_t\left(x_{m,n}(t), \frac{1}{m}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$ donc $e \in C'$. Si $t \in S$, $d(e, x(t))$ est strictement plus petit que r car $e \in B_t(x(t), r)$ et en choisissant $k \geqslant 1$ tel que $d(e, x(t)) < r - \frac{2}{k}$, nous voyons que l'axiome (CMS) assure que pour tout $m \geqslant k$ il existe $a_n \in X_0$ tel que $d_t(a_n(t), e) < \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{k}$ de sorte que $d(a_n(t), x(t)) < r - \frac{1}{k} \leqslant r - \frac{1}{m}$. Ainsi $x_{m,n}(t) = a_n(t)$,

$$e \in B_t\left(a_n(t), \frac{1}{m}\right) = B_t\left(x_{m,n}(t), \frac{1}{m}\right) \quad \text{et} \quad e \in C'. \qquad \square$$

Preuve de 1.10. — 1) Montrons que pour tout $S \in \mathscr{T}$, $r > 0$, $x \in X$ l'ensemble

$$B = p^{-1}(S) \cap B(x, r)$$

est dans $\mathscr{C}$. Pour cela, si nous introduisons la famille dénombrable

$$Y = \{ y \in Y \mid \exists n \geqslant 1, y \mid T - S = x_n \mid T - S, y \mid S = x \mid S \}$$

et montrons que

$$B = \bigcap_{y \in Y} C_y \qquad \text{avec} \qquad C_y = [p^{-1}(S) \cap B(y, r)] \cup y(T)$$

soit $C_y = [p^{-1}(S) \cap B(x, r)] \cup y(T)$. Pour cela il suffit de montrer que

$$\bigcap_{y \in Y} p^{-1}(T - S) \cap y(T) = \bigcap_{y \in Y} y(T - S) = \emptyset$$

Mais si pour tout $t \in T - S$ la fibre E_t contient deux éléments distincts e et e', il existe d'après (CMS) deux éléments y et y' de Y avec

$$d_t(e, y(t)) < \frac{1}{2} d_t(e, e'), \qquad d_t(e', y'(t)) < \frac{1}{2} d_t(e, e')$$

donc

$$E_t \cap y(T - S) \cap y'(T - S) = \emptyset$$

d'où le résultat.

2) Il suffit de montrer que le complémentaire d'un tube fermé $\bar{B}(x, r)$ appartient à $\mathscr{C}$. Mais si pour $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ nous posons

$$T_{n,k} = \left\{ t \in T \mid d_t(x(t), a_n(t)) > r + \frac{1}{k} \right\}$$

nous voyons que

$$E - \bar{B}(x, r) = \bigcup_{n,k \geqslant 1} \left(B\left(a_n, \frac{1}{k}\right) \cap p^{-1}(T_{n,k}) \right).$$

3) Si α est une fonction étagée il est clair que $A_{x,\alpha}$ est dans $\mathscr{E}$. Si α est mesurable, α est la limite d'une suite décroissante de fonctions mesurables étagées α_n et $A_{x,\alpha} = \bigcap_{n \geqslant 1} A_{x,\alpha_n}$. Comme $\mathscr{E}$ est engendrée par $\mathscr{A}$ d'après 1) le résultat s'ensuit. □

1.12. Remarques. — 1) Si T_1 est l'ensemble des $t \in T$ tels que E_t contienne un seul élément, T_1 est mesurable car

$$T_1 = \{ t \mid \sup_{m,n} d_t(a_m(t), a_n(t)) = 0 \}.$$

Dans ce qui suit nous pourrions donc nous placer au-dessus de $T_0 = T - T_1$, avec $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C} \mid T_0$. Les problèmes de sélections de multisections n'offrent pas de difficulté (!) au-dessus de T_1 et l'on pourra recoller.

2) $\mathscr{E}$ est aussi engendrée par les bouts de tubes

$$B(a, r) \cap p^{-1}(S)$$

avec $a \in X_0$, $r \in Q_+$, $S \in \mathscr{C}$, de sorte que $\mathscr{E}$ est dénombrablement engendrée si $\mathscr{C}$ l'est. La preuve de cette assertion reprend la démonstration du lemme 1.6.

1.13. Définition. — *Un sous-champ d'un champ mesurable séparable d'espaces métriques* $(E, T, p, d, \mathscr{C}, X, X_0)$ *est un champ* $(E', T', p', d', \mathscr{C}', X', X'_0)$ *avec* $T' \subset T$, $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \mid T'$, $E' \subset E$, $d' = d \mid E' \underset{T'}{\times} E'$, $p' = p \mid E'$,

$$X' = \{ x \mid T' \mid x \in X,\ x(t) \in E' \ \forall t' \in T' \}$$

Les notions de restriction introduites dans cette définition sont les notions usuelles : $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \mid T'$ signifie que $\mathscr{C}'$ est la tribu induite par $\mathscr{C}$ sur T', etc. Le plus souvent nous considérerons des sous-champs de même base.

1.14. Définition. — *Soient* $p = (E, T, p, d, \mathscr{C}, X, X_0)$, $p' = (E', T, p', d', \mathscr{C}', X', X'_0)$ *deux champs mesurables séparables d'espaces métriques de même base. Un morphisme (de Carathéodory) de p dans p' est une application* $f : E \to E'$ *telle que :*

1) f *est fibrée* (*i. e.* $p' \circ f = p$),
2) *pour tout* $t \in T$ $f \mid E_t$ *est continue de* E_t *dans* E'_t,
3) *pour tout* $x \in X$ $f \circ x \in X'$.

Tout élément $x \in X$ étant limite simple de sections obtenues par recollement d'éléments de X_0 (lemme 1.6) on peut remplacer 3) par la condition 3'). 3') Pour tout $a \in X_0$, $f \circ a \in X'$.

Une autre notion de morphismes (monométries) consisterait à remplacer la condition 2) par la condition que pour tout $t \in T$, f_t est une isométrie de E_t dans E'_t. Cette notion nous servira peu. Notons cependant que l'injection d'un sous-champ de même base est une monométrie.

1.15. Proposition. — *Pour que* $f : E \to E'$ *soit un morphisme de p dans p' il faut et il suffit que les conditions* 1), 2) *et* 4) *soient vérifiées avec* 4) $f : (E, \mathscr{E}) \to (E', \mathscr{E}')$ *est mesurable.*

Preuve. — Si 4) est vérifiée 3) a lieu car les éléments de X (resp. X') sont précisément les sections de p (resp. p') qui sont mesurables (proposition 1.9).

Supposons 3) vérifiée et montrons que f est mesurable. Il suffit de montrer que pour tout $x' \in X'$ et tout $r > 0$ l'ensemble

$$F = f^{-1}(B(x', r))$$

est dans $\mathscr{E}$. Si $X_0 = \{ a_n \mid n \geqslant 1 \}$ et si

$$T_{k,n} = \left\{ t \in T \mid d'_t(f \circ a_n(t), x'(t)) < r - \frac{1}{k} \right\}$$

il nous suffit de montrer que $F = F'$ avec

$$F' = \bigcup_{m \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant m} \bigcup_{n \geqslant 1} B\left(a_n, \frac{1}{k}\right) \cap p^{-1}(T_{k,n}),$$

car $T_{k,n} \in \mathscr{T}$.

Si $e \in F$ et si $t = p(e)$, il existe $m_0 \geqslant 1$ tel que $d_t(f(e), x') < r - \dfrac{2}{m_0}$ et comme f est continue, il existe $m \geqslant m_0$ tel que $d(f(\bar{e}), f(e)) < \dfrac{1}{m_0}$ pour tout $\bar{e} \in B_t\left(e, \dfrac{1}{m}\right)$. Ainsi pour tout $k \geqslant m$ il existe $a_n \in X_0$ avec $a_n(t) \in B_t\left(e, \dfrac{1}{k}\right)$ et $d'_t(f(a_n(t)), x'(t)) < r - \dfrac{2}{m_0} + \dfrac{1}{k} \leqslant r - \dfrac{1}{k}$ donc $e \in p^{-1}(T_{k,n})$ et $e \in B\left(a_n, \dfrac{1}{k}\right)$. Ainsi $e \in F'$.

Inversement si $e \in F'$ il existe $m \geqslant 1$ et une application $k \to n_k$ de $\{ m, m+1, \dots \}$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$e \in B\left(a_{n(k)}, \frac{1}{k}\right) \cap p^{-1}(T_{k,n(k)}).$$

Ainsi $a_{n(k)}(t) \to e$ et $f(a_{n(k)}(t)) \to f(e)$. Comme nous avons $d'_t(f \circ a_{n(k)}(t), x'(t)) \leqslant r - \dfrac{1}{m}$ pour tout $k \geqslant m$ nous obtenons

$$d'_t(f(e), x'(t)) < r$$

donc $e \in F$. $\square$

1.16. COROLLAIRE. — *Si p et p' sont des champs triviaux, $p = pr_1 : E = T \times M \to T$, $p' = pr_1 : T \times M' \to T$, les morphismes de p dans p' sont de la forme $f(t, m) = (t, \bar{f}(t, m))$ où $\bar{f}$ est une application de Carathéodory de* $T \times M$ *dans* M' *(i. e. $\bar{f}$ est mesurable de* $T \times M$ *dans* M' *et pour tout $t \in T$, $m \to \bar{f}(t, m)$ est continue).*

La proposition 1.15 suggère une définition naturelle pour les morphismes de champs mesurables au-dessus de bases différentes. On prendra un couple d'applications mesurables $f : (\mathrm{E}, \mathscr{E}) \to (\mathrm{E}', \mathscr{E}')$, $g : (\mathrm{T}, \mathscr{T}) \to (\mathrm{T}', \mathscr{T}')$ tel que $p' \circ f = g \circ p$ et que pour tout $t \in \mathrm{T}$, $f_t = f \mid \mathrm{E}_t$ soit une application continue de E_t dans $\mathrm{E}'_{g(t)}$.

1.17. Remarque. — Observons que si $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{T}$ est un sous-champ mesurable d'un champ $p : \mathrm{E} \to \mathrm{T}$, la tribu $\mathscr{E}'$ sur E′ associée à X′, d' et $\mathscr{T}'$ n'est autre que la tribu induite $\mathscr{E} \mid \mathrm{E}'$ par $\mathscr{E}$ sur E′. L'inclusion $\mathscr{E}' \supset \mathscr{E} \mid \mathrm{E}'$ découle de la mesurabilité de l'injection $i : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$. Inversement, tout bout de tube

$$\mathrm{B}' = \mathrm{B}(x', r) \cap p'^{-1}(\mathrm{S}) \qquad x' \in \mathrm{X}',\ r > 0,\ \mathrm{S} \in \mathscr{T}$$

dans E′ est la trace sur E′ du bout de tube

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}(x', r) \cap p^{-1}(\mathrm{S})$$

donc $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E} \mid \mathrm{E}$.

On a le même résultat $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \mid \mathrm{E}'$ si $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{T}'$ est un sous-champ de $p : \mathrm{E} \to \mathrm{T}$ dont la base T′ diffère de T. L'inclusion $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E} \mid \mathrm{E}$ se montre comme précédemment. Pour obtenir l'inclusion inverse il suffit de montrer que si $\mathrm{B} = \mathrm{B}(x, r)$ est un tube de E, $\mathrm{B} \cap \mathrm{E}' \in \mathscr{E}'$. Soit $\{ a'_n \}$ une indexation de X'_0 et soit $a_n \in \mathrm{X}$ avec $a_n \mid \mathrm{T}' = a'_n$. Il suffit de voir que

$$\mathrm{B} \cap \mathrm{E}' = \bigcup_{n,m} \mathrm{B}\left(a_n, \frac{1}{\mathrm{m}}\right) \cap p^{-1}(\mathrm{S}_{n,m}) \cap \mathrm{E}'$$

avec $\mathrm{S}_{n,m} = \left\{ t \in \mathrm{T} \mid d_t(a_n(t), x(t)) < r - \frac{1}{m} \right\}$. Chaque terme de cette réunion est un bout de tube dans $p' = (\mathrm{E}', p', \mathrm{T}', \ldots)$ donc $\mathrm{B} \cap \mathrm{E}' \in \mathscr{E}'$. De plus E′ est dans $\mathscr{E}$ si $\mathrm{T}' \in \mathscr{T}$ (en particulier si $\mathrm{T}' = \mathrm{T}$) et si E'_t est fermé dans E_t pour tout $t \in \mathrm{T}$ car $\mathrm{E}' = \bigcap_m \bigcup_n \mathrm{B}\left(a'_n, \frac{1}{m}\right)$.

1.18. — Donnons quelques constructions classiques en théorie des espaces fibrés.

a) Produit. — Si $p' = (\mathrm{E}', \mathrm{T}', p', d', \mathscr{T}', \mathrm{X}', \mathrm{X}'_0)$ et $p'' = (\mathrm{E}'', \mathrm{T}'', p'', d'', \mathscr{T}'', \mathrm{X}'', \mathrm{X}''_0)$ sont deux champs mesurables séparables, leur produit $p = p \times p'$ a pour base $\mathrm{T} = \mathrm{T}' \times \mathrm{T}''$, pour tribu $\mathscr{T}$ la tribu produit $\mathscr{T}' \otimes \mathscr{T}''$, pour espace total $\mathrm{E} = \mathrm{E}' \times \mathrm{E}''$, pour projection $p = p' \times p''$. Pour famille X_0 on prend $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}'_0 \times \mathrm{X}''_0 = \{ a' \times a'' \mid a' \in \mathrm{X}'_0,\ a'' \in \mathrm{X}''_0 \}$ et pour famille X la famille $\tilde{\mathrm{X}}$ donnée par la proposition 1.5. Pour

$$d_t(e, f) = \max \left(d'_{t'}(e', f'), d''_{t''}(e'', f'')\right)$$

si $t = (t', t'')$, $e = (e', e'')$, $f = (f', f'')$, il est clair que les axiomes sont vérifiés.

b) PRODUIT FIBRÉ. — Si p' et p'' ont même base $(\mathrm{T}, \mathscr{T})$ leur produit fibré a pour espace total

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}' \underset{\mathrm{T}}{\times} \mathrm{E}'' = \{ (e', e'') \in \mathrm{E}' \times \mathrm{E}'' \mid p'(e') = p''(e'') \}$$

pour projection l'application p donnée par $p(e', e'') = p'(e') = p''(e'')$ si $(e', e'') \in \mathrm{E}$.

On prend $\mathrm{X}_0 = (\mathrm{X}'_0, \mathrm{X}''_0) = \{ (a', a'') : t \to (a'(t), a''(t)) \mid a' \in \mathrm{X}'_0, a'' \in \mathrm{X}''_0 \}$ $\mathrm{X} = (\mathrm{X}', \mathrm{X}'')$ et

$$d(e, f) = \max (d'(e', f'), d''(e'', f''))$$

pour $e = (e', e'')$, $f = (f', f'')$ dans E. On vérifie facilement les axiomes.

On observe que $\mathrm{E}' \underset{\mathrm{T}}{\times} \mathrm{E}''$ est un sous-champ mesurable du champ produit $\mathrm{E}' \times \mathrm{E}''$ et qu'il satisfait la propriété universelle d'un produit fibré.

Si $p : \mathrm{E} \to \mathrm{T}$ un champ mesurable séparable on voit facilement que $\tilde{d} : \mathrm{E} \underset{\mathrm{T}}{\times} \mathrm{E} \to \mathrm{T} \times \mathbb{R}$ donnée par $\tilde{d} = (\tilde{p}, d)$ où $\tilde{p} : \mathrm{E} \underset{\mathrm{T}}{\times} \mathrm{E} \to \mathrm{T}$ est le champ produit fibré de p par lui-même, vérifie les conditions 1), 2), 3) de la définition 1.14. Ainsi $d : \mathrm{E} \underset{\mathrm{T}}{\times} \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est mesurable pour la tribu induite par $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ sur $\mathrm{E} \underset{\mathrm{T}}{\times} \mathrm{E}$ qui n'est autre que la tribu $\tilde{\mathscr{E}}$ associée à $\tilde{p}$.

c) CHAMP INDUIT. — Si $p = (\mathrm{E}, \mathrm{T}, p, d, \mathscr{T}, \mathrm{X}, \mathrm{X}_0)$ est un champ mesurable séparable d'espaces métriques, si $(\mathrm{T}^*, \mathscr{T}^*)$ est un espace mesurable et si $g : (\mathrm{T}^*, \mathscr{T}^*) \to (\mathrm{T}, \mathscr{T})$ est une application mesurable, le champ p^* induit par g a pour base $(\mathrm{T}^*, \mathscr{T}^*)$, pour espace total

$$\mathrm{E}^* = \mathrm{T}^* \underset{\mathrm{T}}{\times} \mathrm{E} = \{ (t^*, e) \mid g(t^*) = p(e) \},$$

pour projection la restriction p^* de la première projection de $\mathrm{T}^* \times \mathrm{E}$ sur T^*. Si $f = p^*(g) : \mathrm{E}^* \to \mathrm{E}$ est la restriction de la seconde projection de $\mathrm{T}^* \times \mathrm{E}$ sur E, on pose $d_{t^*}(e_1^*, e_2^*) = d_{g(t^*)}(f(e_1^*), f(e_2^*))$ on prend

$$\mathrm{X}_0^* = \{ a^* : \mathrm{T}^* \to \mathrm{E}^*, a^*(t^*) = (t^*, a \circ g(t^*)), a \in \mathrm{X}_0 \}$$

et l'on prend pour X^* la famille des sections mesurables de p^*, E^* étant muni de la tribu $\mathscr{E}^*$ induite par $\mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$ sur $\mathrm{E}^* = \mathrm{T}^* \underset{\mathrm{T}}{\times} \mathrm{E} \subset \mathrm{T}^* \times \mathrm{E} : \mathrm{X}^*$ est l'ensemble des applications de la forme $x^* = (\mathrm{I}d_{\mathrm{T}^*}, y)$ où $y : \mathrm{T}^* \to \mathrm{E}$ est mesurable et se projette sur $g : p \circ y = g$. On vérifie la stabilité de X^* par limite simple en notant que si $x^* = (\mathrm{I}_{d_{\mathrm{T}^*}}, y)$ est limite simple d'une suite $x_n^* \in X^*$ alors y se projette sur g et est mesurable : si B est un tube ouvert de E

$$y^{-1}(B) = \bigcup_m \bigcap_{n \geqslant m} y_n^{-1}(B) \in \mathscr{T}^*$$

pour $y_n = f \circ x_n^*$. La stabilité par recollement est immédiate. La compatibilité provient du fait que $d : E \underset{T}{\times} E \to \mathbb{R}$ est mesurable et la densité du fait que X_0^* est contenu dans X^* et d'image dense.

Un cas particulier important de cet exemple concerne le cas où g est l'injection canonique d'une partie T* de T (munie de la tribu induite) ; on écrit $p^* = p \mid T^*$, $E^* = E \mid T^*$ dans ce cas.

Un autre cas particulier concerne le produit fibré de $p : E \to T$ et $p' : E' \to T$ qui n'est autre que le champ induit de $p \to p'$ par l'application diagonale $T \to T \times T$.

d) PLONGEMENT DANS UN CHAMP TRIVIAL. — Le résultat suivant est inspiré du procédé de plongement d'un espace métrique dans un espace de Banach (théorèmes d'Eilenberg-Wojdyslanski [*30*] (cf. aussi Hu [*12*], p. 81) et d'Arens-Eells [*1*]). Un analogue dans la catégorie des submersions différentiables existe (J. P. Penot [*21*], th. 3.1.1, p. 80).

1.19. PROPOSITION. — *Soit* $p = (E, T, p, d, \mathscr{T}, X, X_0)$ *un champ mesurable séparable d'espaces métriques. Il existe un espace de Banach séparable* F *et un isomorphisme* h *de* p *sur un sous-champ du champ trivial* p_1 *de base* $(T, \mathscr{T})$ *et de fibre* F *qui induit sur chaque fibre une isométrie. De plus, pour tout* $t \in T$ $h_t(E_t)$ *est fermé dans l'espace vectoriel qu'il engendre et* $h_t(E_t)$ *est libre.*

Preuve. — Désignons par I l'ensemble des parties finies de X_0 ordonné par inclusion. Soit $F = c_0(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $Z \in I$ avec $|f(W)| < \varepsilon$ pour tout $W \in I$, $W \supset Z$. C'est un espace de Banach séparable (car I est dénombrable) pour la norme

$$|f|_F = \sup_{Z \in I} |e(Z)| .$$

Définissons $g : E \to F$ par

$$g(e)(Z) = d_t(e, Z(t)) \qquad \text{avec} \qquad t = p(e),\ e \in E,$$

et $h : E \to T \times F$ par

$$h(e) = (p(e), g(e)) .$$

On vérifie facilement que g prend ses valeurs dans F : pour tout $e \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in X_0$ avec $d_t(e, a(t)) < \varepsilon$ pour $t = p(e)$ et pour tout $Z \in I$ avec $Z \supset \{a\}$ on a $|g(e)(z)| < \varepsilon$.

Montrons que g induit une isométrie sur les fibres. Pour e, e' dans la même fibre E_t de p nous avons

$$| g(e) - g(e') |_F = \sup_{Z \in I} | g(e)(Z) - g(e')(Z) | \leq d_t(e, e') .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $b \in X_0$ avec $d_t(e, b(t)) < \varepsilon/2$, de sorte que pour $Z = \{ b \}$ nous avons

$$\begin{aligned} g(e')(Z) - g(e)(Z) &= d_t(e', b(t)) - d_t(e, b(t)) \\ &\geqslant d(e, e') - 2d_t(e, b(t)) \geqslant d(e, e') - \varepsilon , \end{aligned}$$

donc $| g(e') - g(e) |_F \geqslant d(e, e') - \varepsilon$. Ainsi $g_t = g \mid E_t$ est une isométrie.

Vérifions maintenant que pour tout $x \in X$, $g \circ x$ est une application mesurable de T dans F. Comme F est séparable il revient au même de montrer que $g \circ x$ est scalairement mesurable. Or pour tout $f' \in F' = l_1(I)$, $f' = (f'_Z)_{Z \in I}$, la fonction $t \to \langle f', g \circ x(t) \rangle = \sum_{Z \in I} f'_Z d_t(x(t), Z(t))$ est mesurable comme somme d'une famille dénombrable de fonctions mesurables. Nous avons ainsi prouvé que h est un morphisme.

Montrons ensuite que pour tout $t \in T$, $g_t(E_t)$ est fermé dans le sous-espace F_t de F engendré par $g_t(E_t)$. Pour cela, montrons que si une suite $f_n = g_t(e_n)$, avec $e_n \in E_t$ converge vers un point f de F_t alors $f_t \in g_t(E_t)$. Nous pouvons écrire

$$f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_t(a_i) \qquad \text{avec} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R},\ a_i \in E_t .$$

Posons $c = \max \left(\sum_{i=1}^{r} | \lambda_i | , 1 \right)$, $A = \{ a_1, \ldots, a_r \}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $Z \in I$ avec

$$\max_{i=1,\ldots,k} d_t(a_i, Z(t)) < \varepsilon/c$$
$$\max_{z \in Z} d_t(z(t), A(t)) < \varepsilon/c .$$

Nous avons

$$| f(Z) | = \sum_{i=1}^{r} | \lambda_i | d_t(a_i, Z(t)) \leq \varepsilon .$$

Il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n(\varepsilon)$ nous ayons

$$| f_n(Z) - f(Z) | \leqslant | f_n - f |_F \leq \varepsilon$$

donc $d_t(e_n, Z(t)) = | f_n(Z) | \leq 2\varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n(\varepsilon)$ nous avons

$$d_t(e_n, A(t)) \leqslant d_t(e_n, Z(t)) + \max_{z \in Z} d_t(z(t), A(t)) \leqslant 3\varepsilon .$$

La suite (e_n) converge donc vers un point $a \in A$. La suite $(f_n) = (g_t(e_n))$ converge donc vers $g_t(a)$. Ainsi $f = \lim f_n = g_t(a) \in g_t(E)$.

L'argument qui précède, appliqué à la suite constante de valeur e montre que si $g_t(e) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_t(a_i)$ avec $a_i \in E_t$, $e \in E_t$ alors $e \in \{ a_1, \ldots, a_r \}$. On en déduit par récurrence sur r que tous les λ_i sauf un sont nuls, ce qui montre que $g_t(E_t)$ est libre.

Soit ψ la famille des sections mesurables de p_1 et soit ψ' la famille des éléments $y \in Y$ d'image contenue dans $h(E)$. Comme Y' contient les sections de la forme $h \circ x$ avec $x \in X$ dont les valeurs en t sont denses dans $h_t(E_t)$ pour tout $t \in T$, Y' fait de $h(E)$ un sous-champ mesurable de p_1, les conditions (CM1), (CM3) étant facilement vérifiées. De plus h^{-1} est un morphisme de $h(E)$ sur E car si $y \in Y'$, $x = h^{-1} \circ y$ est dans X d'après la condition (CM5) du corollaire 1.7 et le fait que h induit une isométrie sur les fibres. Ainsi h est bien un isomorphisme de E sur $h(E)$. □

1.B. Exemples

1.20. Graphe d'une multi-application. — Soient $(T, \mathscr{T})$ un espace mesurable, M un espace métrique séparable, $\Gamma : T \to M$ une multi-application à valeurs complètes non vides. Le graphe E' de Γ et la restriction p' de la projection canonique $p : T \times M \to T$ forment un sous-champ mesurable du champ trivial. C'est en effet un champ mesurable séparable, le théorème 3 de Valadier [*28*] assurant l'existence d'une famille dénombrable de sections mesurables de p' dont les valeurs sont partout denses dans chaque fibre.

1.21. Champ mesurable d'espaces de Banach ou de Hilbert. — C'est d'après Dixmier [*7*], p. 142 par exemple, un champ d'espaces métriques qui ont une structure d'espace de Banach (resp. de Hilbert) et tel que les axiomes (CM3), (CMS), (CM5) sont vérifiés (donc tous les autres aussi), X étant un espace vectoriel, et la distance d_t étant la distance associée à une norme qui fait de E_t un espace de Banach (resp. de Hilbert). Dans ce cas pour tout $x \in X$ la fonction $t \to \| x(t) \|_{E_t} = d_t(x(t), 0)$ est mesurable et X est un module sur l'anneau des fonctions mesurables de T dans $\mathbb{R}$.

1.22. Champ continu d'espaces métriques. — Les axiomes suivants sont inspirés de Dixmier-Douady [*8*]. Un champ d'espaces métriques

(E, T, p, d) est dit continu si T est muni d'une topologie $\mathcal{O}$ et si l'on s'est donné une famille Y de sections de p qui vérifie les axiomes suivants :

(CC1) (Stabilité par limite uniforme locale). Si x est une section de p telle que pour tout $t \in \mathrm{T}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in \mathrm{Y}$ et $\mathrm{V} \in \upsilon_{\mathrm{T}}(t)$ (ensemble des voisinages de t dans T) avec $d(x(s), y(s) < \varepsilon$ pour tout $s \in \mathrm{V}$ alors $x \in \mathrm{Y}$.

(CC2) (Compatibilité). Pour tous y et z dans Y la fonction

$$d_{y,z} : t \rightarrow d_t(y(t), z(t)) \qquad \text{est continue.}$$

(CC3) (Densité). Pour tout $t \in \mathrm{T}$ l'ensemble $\mathrm{Y}(t) = \{\, y(t) \mid y \in \mathrm{Y} \,\}$ est partout dense dans E_t.

(CCS) (Séparabilité). Il existe une sous-famille dénombrable Y_0 de Y telle que $\mathrm{Y}_0(t)$ soit partout dense dans $\mathrm{E}(t)$ pour tout $t \in \mathrm{T}$.

On voit facilement que (CC1) équivaut à dire que Y est exactement l'ensemble des sections z de p telles que $d_{y,z}$ soit continue pour tout $y \in \mathrm{Y}_0$.

Prenons sur T la tribu borélienne $\mathcal{T}$ associée à $\mathcal{O}$. La famille Y vérifie alors les axiomes (CM3) et (CMS). Il existe donc une famille X contenant Y qui fait de (E, T, p, d, $\mathcal{T}$, X, Y_0) un champ mesurable séparable d'espaces métriques dit champ mesurable sous-jacent au champ continu (E, T, p, d, $\mathcal{O}$, Y, Y_0).

Il serait intéressant d'examiner si les résultats liant mesurabilité et continuité approchée (cf. Schaerf [*25*], Sion [*26*]) subsistent dans ce cadre (T étant de plus muni d'une mesure de Radon).

1.23. Champ de Hausdorff-Effros. — Soient (M, d) un espace métrique séparable, T l'ensemble des parties complètes non vides de M muni de la tribu engendrée par les ensembles

$$\mathrm{I}^-(0) = \{\, \mathrm{A} \in \mathrm{T} \mid \mathrm{A} \cap 0 \neq \emptyset \,\}$$

où 0 parcourt l'ensemble des ouverts de M (*). Soit E le sous-ensemble de T × M constitué des couples (A, m) $\in$ T × M où $m \in \mathrm{A}$ et soit p la restriction à E de la projection $\mathrm{T} \times \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{T}$. Pour X nous prenons la famille des applications mesurables de la forme $t \rightarrow x(t) = (t, \bar{x}(t))$ où $\bar{x}$ est une fonction de choix ($\bar{x}(t) \in t$ pour tout $t \in \mathrm{T}$) c'est-à-dire une sélection de la multi-application mesurable $\mathrm{I} : \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{M}$ donnée par $\mathrm{I}(t) = t \subset \mathrm{M}$. La vérification des axiomes repose sur des résultats classiques de sélection

(*) ou de toute autre tribu contenant celle-ci, par exemple la tribu borélienne associée à la distance de Hausdorff sur T.

mesurable (par exemple M. Valadier [28], th. 3, p. 5). Notons que le champ de Hausdorff n'est pas trivial.

1.24. CHAMP DE STIEFEL. — Soit N un espace vectoriel normé séparable et soit T l'ensemble des sous-espaces de Banach de N. Considérons l'ensemble E des couples (A, n) où $A \in T$ et $n \in N$ et prenons encore pour p la restriction de la projection. Faisons pour $\mathcal{T}$ et X des choix analogues à ceux de l'exemple 1.16. Notons qu'il s'agit là d'un sous-champ du champ de Hausdorff de N (définition 1.13).

1.25. CHAMP TRIBALEMENT TRIVIAL. — C'est un champ mesurable séparable d'espaces métriques $(E, T, p, d, \mathcal{T}, X, X_0)$ tel qu'il existe un recouvrement $(T_i)_{i\in I}$ dénombrable de T par des éléments de $\mathcal{T}$, et des isomorphismes $f_i : E \mid T_i \to T_i \times M_i$ sur un fibré trivial $p_i : T_i \times M_i \to T_i$ de fibre un espace métrique séparable M_i. Nous dirons que les applications

$$f_{ij} : T_{ji} \times M_j \to M_i$$

où $T_{ij} = T_i \cap T_j$, $f_{ij} = \bar{f}_i \circ (f_j \mid T_{ji})^{-1}$, $\bar{f}_i = p_{M_i} \circ f_i$ sont les cocycles du champ. Ces applications vérifient

$$(c) \qquad f_{ik}(t, m) = f_{ij}(t, f_{jk}(t, m))$$

pour tout $t \in T_i \cap T_j \cap T_k$ et tout $m \in M_k$.

La distance d_i sur p_i donne une distance paramétrée d_i sur M_i par

$$d_{i,t}(m, m') = d_t(f_i^{-1}(t, m), f_i^{-1}(t, m')) .$$

Inversement, la donnée de $(T, \mathcal{T})$, $(T_i)_{i\in I}$, $(M_i)_{i\in I}$, $(d_i)_{i\in I}$ et de cocycles f_{ij} satisfaisant les relations (c) et

$$(d) \qquad d_{i,t}(f_{ij}(t, m), f_{ij}(t, m')) = d_{j,t}(m, m')$$

pour tous $(i, j) \in I \times I$, $t \in T_i \cap T_j$, $(m, m') \in M_j \times M_j$ permet de construire un champ mesurable tribalement trivial.

On voit facilement que pour qu'un champ mesurable séparable d'espaces métriques soit tribalement trivial il faut et il suffit qu'il existe une partition dénombrable (T_n) de T par des éléments de T telle que $p \mid T_n$ soit trivialisable (i. e. isomorphe à un champ trivial).

Si p est le fibré induit par une application mesurable $f : T \to S$ et si $q : F \to S$ est une fibration topologique localement triviale, de fibres des espaces métriques séparables, p est tribalement triviale.

1.26. CHAMP DE SOBOLEV. — Il s'agit d'un exemple de la situation précédente. On se donne des variétés différentielles T et Y, $q : Y \to T$

une submersion, $\xi : F \to Y$ une fibration localement triviale dont les fibres sont paracompactes et séparables. On suppose T compacte, Y et F paracompactes et modelées sur des espaces de Banach séparables. Si $g : T \to Y$ est une application de Sobolev, $g \in W_r^k(T, Y)$ avec $k \in \mathbb{N}$, $r \in [1, \infty[$, $kr > \dim T$ on peut définir (J. P. Penot [*22*]) une application mesurable $f : T \to S = J^k Y$ qui représente le $k-jet$ de g. L'introduction du champ mesurable $f^*\xi : E = T \underset{S}{\times} F \to T$ et de ses sections mesurables s'impose naturellement pour l'étude des opérateurs différentiels non-linéaires, en particulier lorsque $\xi : F \to Y$ est le fibré tangent vertical (ou fibré tangent aux fibres de q).

1.27. CHAMPS GLOBALEMENT SOUSLINIENS. — Soient E et T des espaces sousliniens, E étant muni d'une distance d compatible avec sa topologie. Soit $\mathscr{T}$ la tribu sur T engendrée par les sousliniens. Nous verrons que si $p : E \to T$ est une application continue surjective on définit un champ mesurable en prenant pour X la famille des sections (inverses à droites) de p mesurables pour $\mathscr{T}$ et la tribu borélienne sur E (voir aussi Valadier [*28*], th. 0.6).

En particulier, si E et T sont des variétés différentielles paracompactes modelées sur des espaces de Banach séparables et si $p : E \to T$ est une submersion surjective on obtient un champ mesurable. En effet E et T peuvent être munis de distances compatibles avec leur topologie pour lesquelles E et T sont complètes et séparables (Palais [*19*], th. 3).

II. SÉLECTIONS DE MULTISECTIONS MESURABLES

2.1. DÉFINITION. — *Une multisection* Γ *d'un champ mesurable* (E, T, p) *d'espaces métriques est une multi-application* $\Gamma : T \multimap E$ *telle que pour tout* $t \in T$ $\Gamma(t)$ *soit un sous-ensemble de* E_t.

Si pour tout $t \in T$, $\Gamma(t)$ est non vide, il revient au même de dire que Γ est une multi-application inverse à droite de $p : p \circ \Gamma = Id_T$. Remarquons qu'une multisection Γ est déterminée par son image (qui correspond à son graphe dans le cas trivial) $\Gamma(T)$ car $\Gamma(t) = \Gamma(T) \cap E_t$.

Nous supposerons implicitement dans toute la suite que Γ est à valeurs non vides. Le cas échéant on remplacerait T par

$$T_0 = dom\Gamma = \{ t \in T, \Gamma(t) \neq \emptyset \}$$

pour se placer dans cette situation, T_0 étant muni de la tribu induite.

Pour $F \subset E$ posons

$$\Gamma^{-}(F) = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap F \neq \emptyset \} = p(\Gamma(T) \cap F).$$

2.2. DÉFINITION. — *Une multisection* Γ *d'un champ mesurable séparable* $(E, T, p, d, \mathcal{T}, X, X_0)$ *d'espaces métriques est dite :*

— *mollement mesurable si pour tout* $x \in X$ *et tout* $r > 0$ $\Gamma^{-}(B(x, r)) \in \mathcal{T}$,

— *mesurable si pour toutes familles finies* $(x_i)_{i \in I} \in X$ *et* $(r_i)_{i \in I} \subset]0, +\infty[$ $\Gamma^{-}\left(\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i)\right) \in \mathcal{T}$,

— *fermement mesurable si pour toutes familles finies* $(x_i)_{i \in I}$ *de* X *et* $(r_i)_{i \in I}$ *de* $]0, +\infty[$ *on a* $\Gamma^{-}\left(\bigcap_{i \in I} \bar{B}_i(x_i, r_i)\right) \in \mathcal{T}$ *où* $\bar{B}(x, r)$ *désigne le tube fermé de rayon* r *centré en* x.

Les adverbes sont justifiés : si Γ est fermement mesurable Γ est mesurable car

$$\Gamma^{-}\left(\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i)\right) = \bigcup_{n \geqslant k} \Gamma^{-}\left(\bigcap_{i \in I} \bar{B}\left(x_i, r_i - \frac{1}{n}\right)\right)$$

avec $k \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{k} < \min_{i \in I} (r_i)$.

2.3. EXEMPLE. — Un tube ouvert $B(x_0, r_0)$ est l'image d'une multisection mesurable Γ. En effet, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'éléments de X, si $(r_i)_{i \in I}$ est une famille finie de réels positifs et si nous posons $J = \{ 0 \} \cup I$,

$$T_{j,n} = \{ t \mid d_t(x_j(t), a_n(t)) < r_j \} \qquad (j, n) \in J \times \mathbb{N}^*$$

où $X_0 = \{ a_n \mid n \geqslant 1 \}$, nous avons

$$\Gamma^{-}\left(\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i)\right) = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{j \in J} T_{j,n}$$

car

$$\left(\bigcap_{j \in J} B_t(x_j(t), r_j) \neq \emptyset\right) \Leftrightarrow (\exists n \geq 1) \qquad a_n(t) \in \bigcap_{j \in J} B_t(x_j(t), r_j).$$

Si dans chaque fibre les boules fermées de rayon positif sont les adhérences des boules ouvertes de même centre et de même rayon alors tout tube fermé est l'image d'une multisection mesurable. C'est le cas si les fibres sont des sous-espaces convexes d'espaces vectoriels normés ou des variétés riemaniennes de dimension finie. Par contre un tube (ou même tout l'espace) n'est en général pas l'image d'une multisection fermement mesurable.

2.4. REMARQUE. — Pour un champ mesurable séparable trivial $p = pr_1 : E = T \times M \to T$, une multisection Γ est mesurable si et seulement si la multi-application $\tilde{\Gamma} : T \to M$ donnée par

$$\Gamma(t) = \{ t \} \times \tilde{\Gamma}(t)$$

est telle que $\tilde{\Gamma}^{-}(O) \in \mathscr{T}$ pour tout ouvert O de M (on dit parfois [9] que $\tilde{\Gamma}$ est faiblement mesurable). En effet tout ouvert O de M est réunion dénombrable de boules ouvertes B_n et

$$\tilde{\Gamma}^{-}(O) = \bigcup_n \tilde{\Gamma}^{-}(B_n) = \bigcup_n \Gamma^{-}(T \times B_n)$$

et $T \times B_n$ est un tube du champ trivial.

Réciproquement, montrons que si $\tilde{\Gamma}(O) \in \mathscr{T}$ pour tout ouvert O de M, Γ est mesurable.

Soient $B(x_i, r_i)$, $i \in I$ fini, une famille de tubes ouverts et $B = \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i)$.

Posons $x_i = (Id_T, \tilde{x}_i)$. Si pour tout $i \in I$ les $\tilde{x}_i$ sont des fonctions étagées mesurables, il est immédiat que $\Gamma^{-}\left(\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i)\right) \in \mathscr{T}$.

Dans le cas général, on écrit $\tilde{x}_i = \lim \tilde{x}_{i,n}$ avec $\tilde{x}_{i,n}$ étagées et on montre que pour $k_0 = \max_{i \in I} \frac{1}{r_i}$ on a

$$\Gamma^{-}(B) = \bigcup_{k > k_0} \bigcup_{m \geqslant 1} \bigcap_{n \geqslant m} \Gamma^{-}\left(\bigcap_{i \in I} B\left(x_{n,i}, r_i - \frac{1}{k}\right)\right).$$

L'inclusion de gauche à droite est facile : pour l'autre on montre que s'il existe $k > k_0$ et $m \geqslant 1$ avec $\tilde{\Gamma}(t) \cap \left(\bigcap_{i \in I} B\left(x_{n,i}(t), r_i - \frac{1}{k}\right)\right) \neq \varnothing$ pour tout $n \geqslant m$, alors $\tilde{\Gamma}(t) \cap \left(\bigcap_{i \in I} B(x_i(t), r_i\right) \neq \varnothing$ car pour n assez grand on a

$$B(x_i(t), r_i) \supset B\left(x_{n,i}(t), r_i - \frac{1}{k}\right)$$

2.5. PROPOSITION. — *Si Γ est une multisection mesurable (resp. mollement mesurable) $\bar{\Gamma}$ donnée par $\bar{\Gamma}(t) = \overline{\Gamma(t)}$ est mesurable (resp. mollement mesurable).*

Cette proposition provient du fait que si $F \subset E$ est tel que $F_t = F \cap E_t$ est ouvert dans E_t pour tout $t \in T$ alors

$$\Gamma^{-}(F) = \bar{\Gamma}^{-}(F).$$

2.6. THÉORÈME. — *Toute multisection mollement mesurable Γ à valeurs complètes non vides d'un champ mesurable séparable d'espaces métriques possède une sélection mesurable : il existe $x \in X$ avec $x(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in T$.*

Preuve. — On va construire par récurrence une suite (x_k) d'éléments de X qui converge simplement ; la limite sera la section cherchée X.

On prend pour x_0 un élément quelconque de X et l'on fait l'hypothèse de récurrence :

(H_n) Il existe des sections mesurables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ telles que pour tout $t \in T$ on ait

$$(H'_n) \qquad d_t(x_k(t), x_{k+1}(t)) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \text{pour} \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

$$(B''_n) \qquad B_t\left(x_k(t), \frac{1}{2^k}\right) \cap \Gamma(t) \neq \emptyset \qquad \text{pour} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Construisons alors x_{n+1} satisfaisant (H_{n+1}).

Si $X_0 = \{ a_p \}_{p \in \mathbb{N}}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on définit

$$A'_p = \left\{ t \in T \mid B_t\left(a_p(t), \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cap \Gamma(t) \neq \emptyset \right\} = \Gamma^-\left(B\left(a_p, \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

$$A''_p = \left\{ t \in T \mid x_n(t) \in B_t\left(a_p(t), \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right\} \qquad \text{et on pose} \qquad A_p = A'_p \cap A''_p .$$

A'_p est mesurable puisque Γ est mollement mesurable, A''_p est mesurable puisque l'application $d(x_n(.), a_p(.))$ est mesurable, par conséquent $A_p \in \mathscr{T}$.

D'autre part, $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p = T$: compte tenu de l'hypothèse de récurrence et de la densité de X_0 pour tout $t \in T$ il existe $z \in \Gamma(t)$ tel que $d_t(x_n(t), z) \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $d_t(x, a_p(t)) < \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$ ainsi,

$$d_t(x_n(t), a_p(t)) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} .$$

On pose alors $T_p = A_p - \bigcup_{k<p} A_k$ et l'on définit une section mesurable x_{n+1} par $y_{n+1} \mid T_p = a_p \mid T_p$ pour tout p ; x_{n+1} est mesurable, puisque recollée de sections mesurables. On remarque alors que pour tout $t \in T$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $t \in T_p$ donc $x_{n+1}(t) = a_p(t)$ d'où

$$d_t(x_n(t), x_{n+1}(t)) = d(x_n(t), a_p(t)) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad B_t\left(x_{n+1}(t), \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cap \Gamma(t) \neq \emptyset$$

par construction de x_{n+1}.

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est telle que pour tout $t \in \mathrm{T}$, $(y_n(t))_{n\geq 1}$ soit de Cauchy dans E_t. Comme pour tout $n \geqslant 1$ $\mathrm{B}_t\left(x_n(t), \frac{1}{2^n}\right) \cap \Gamma(t) \neq \emptyset$.

On peut définir une suite $u_n(t)$ telle que $u_n(t) \in \mathrm{B}_t\left(x_n(t), \frac{1}{2^n}\right) \cap \Gamma(t)$ alors $\{ u_n(t) \}$ est une suite de Cauchy de $\Gamma(t)$ telle que

$$d_t(u_n(t), x_n(t)) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\Gamma(t)$ est complet $x_n(t)$ converge vers un point $x(t)$ dans $\Gamma(t)$. Il en est de même de $u_n(t)$. La section x est mesurable comme limite simple de sections mesurables et est bien une sélection de Γ.

2.7. Corollaire. — *Si Γ est une multisection à valeurs complètes non vides d'un champ mesurable séparable d'espaces métriques, les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) *Γ est mesurable.*

b) *Γ admet une famille dénombrable de sélections mesurables dense $\{ y_n \}$ c'est-à-dire pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\overline{\{ y_n(t) \}_n} = \Gamma(t)$.*

On reprend la démonstration de Castaing [*4*], th. 5 ou Valadier [*28*], th. 3.

1. Pour montrer que $b \Rightarrow a$ il suffit de remarquer que

$$\Gamma^-\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{B}(x_i, r_i)\right) = \bigcup_n \bigcap_{i\in \mathrm{I}} y_n^{-1}(\mathrm{B}(x_i, r_i))$$

2. Montrons $a \Rightarrow b$ l'existence d'une sélection résulte du théorème précédent puisque si Γ est mesurable, Γ est mollement mesurable.

Pour tout k et $n \in \mathbb{N}$ on définit la multisection $\Gamma_{k,n}$ ci-dessous :

$$\Gamma_{k,n}(\mathrm{t}) = \begin{cases} \Gamma(t) \cap \mathrm{B}_t\left(a_k(t), \frac{1}{2^n}\right) \neq \emptyset & \text{si} \quad t \in \Gamma^-\left(\mathrm{B}\left(a_k, \frac{1}{2^n}\right)\right) \\ \Gamma(t) \text{ sinon} \end{cases}$$

c'est une multisection mesurable puisque l'on a la relation suivante

$$\Gamma_{k,n}^-\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{B}(x_i, r_i)\right) = \left[\Gamma^-\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{B}(x_i, r_i)\right) \cap \mathrm{B}\left(a_k, \frac{1}{2^n}\right)\right] \cup \left[\Gamma^-\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{B}(x_i, r_i)\right) - \Gamma^-\left(\mathrm{B}\left(a_k, \frac{1}{2^n}\right)\right)\right]$$

La proposition 2.5 montre que la multisection $\overline{\Gamma_{k,n}}$ est mesurable et par conséquent en appliquant le théorème précédent elle possède une sélection mesurable.

On obtient donc une famille dénombrable $\{ y_{k,n} \}_{k,n \in \mathbb{N}}$ de sélections mesurables de Γ qui sont d'images denses.

En effet, soit $z \in \Gamma(t)$ et soit $\varepsilon > 0$. Prenons n tel que $2^{-n+1} < \varepsilon$. La densité de X_0 nous permet d'affirmer qu'il existe k tel que $z \in B_t\left(a_k(t), \frac{1}{2^n}\right)$ d'où $t \in \Gamma^-\left(B\left(x_k, \frac{1}{2^n}\right)\right)$ et $dom B_t\left(a_k(t), \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$.

2.8. Corollaire. — Dans un champ mesurable séparable d'espaces métriques, les sous-champs polonais (i. e. à fibres complètes) coïncident avec les images des multisections mesurables à valeurs complètes non vides.

C'est une formulation différente du corollaire précédent puisqu'il est clair qu'il y a identité entre les multisections à valeurs non vides, possédant une famille dénombrable de sélections de valeurs denses et les sous-champs de même base.

2.9. Remarque (suggérée par M. Valadier). — La démonstration directe des énoncés 2.6 et 2.7 suit de près celle des résultats correspondants dans le cas trivial. Une autre méthode consiste à se ramener à ces résultats au moyen de la proposition 1.19. Pour cela on identifie p à un sous-champ d'un champ trivial p_1 de base T et de fibre un espace de Banach séparable M. Il suffit de montrer que la multi-application $\tilde{\Gamma}$ de T dans M de graphe $\Gamma(T)$ est mesurable si Γ est une multisection mesurable à valeurs complètes de p. Or pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout $t \in T$ et tout $r > 0$

$$(d(m, \tilde{\Gamma}(t)) < r)$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \exists k \in \mathbb{N},\ k > \frac{1}{r},\ \exists n \in \mathbb{N} : d(m, a_n(t)) < r - \frac{1}{k},\ d(a_n(t), \tilde{\Gamma}(t)) < \frac{1}{k} \right\}.$$

de sorte que

$$\tilde{\Gamma}^-(B(m, r)) = \bigcup_{k > \frac{1}{r}} \Gamma^-\left(B\left(a_n, \frac{1}{k}\right)\right) \cap T_{k,n}$$

avec $T_{k,n} = \left\{ t \in T \mid d(m, a_n(t)) < \frac{1}{k} \right\}$

2.10. Remarque. — Si Γ est une multisection mesurable à valeurs fermées non vides, l'existence d'une famille dénombrable dense (y_n) de sélections implique la propriété suivante : $\Gamma(T) \in \mathscr{E}$ et plus précisément

$\Gamma(S) \in \mathscr{E}$ $\forall S \in \mathscr{T}$ puisque $\Gamma(T) = \bigcap_m \bigcup_n B\left(y_n, \frac{1}{m}\right)$ et comme p est mesurable $\Gamma(S) = \Gamma(T) \cap p^{-1}(S) \in \mathscr{E}$.

Rappelons que dans le trivial $\Gamma(T)$ est le graphe de Γ. On est amené à se poser la question de la réciproque qui fait l'objet du chapitre suivant.

III. SOUS-CHAMPS D'UN CHAMP MESURABLE SÉPARABLE

Dans cette partie on cherche à caractériser les sous-champs par une propriété de mesurabilité. Pour cela on utilise des résultats de la théorie des ensembles sousliniens ou analytiques. Rappelons quelques définitions et propriétés : cf. par exemple Choquet [*5*], Christensen [*6*], Meyer [*18*], Hoffmann-Jørgensen [*11*].

3.1. Rappel.

A. *Schéma de Souslin.* — On désigne par S ou $\mathbb{N}_\infty$ l'ensemble des suites finies d'entiers naturels (y compris la suite ϕ) et par Σ ou $\mathbb{N}^\infty$ ou $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies. La notation $s < t$ où $s \in S$ et $t \in S$ ou Σ signifie que t « commence » par s et en est distinct. Si $\sigma \in \Sigma$ (resp. S) avec $\sigma \neq \emptyset$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \mid n$ sera la suite finie $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Si E est un ensemble et $\mathscr{E}$ une famille de parties de E stable par intersection finie contenant ϕ et E, un schéma de Souslin (monotone à valeurs dans $\mathscr{E}$) est une application qui à $s \in S$ associe une partie $E_s \in \mathscr{E}$ telle que :

$$E_\phi = E, \qquad E_s \neq \emptyset \qquad \forall s \neq \emptyset$$
$$E_s \supset E_t \qquad \text{si} \qquad s < t$$

On appelle noyau du schéma de Souslin l'ensemble $C = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_n E_{\sigma \mid n}$ et on dira qu'une partie C de E est $\mathscr{E}$-souslinienne si elle est le noyau d'un schéma de Souslin à valeurs dans $\mathscr{E}$. On notera $S(\mathscr{E})$ l'ensemble des $\mathscr{E}$-sousliniens. On a alors la propriété suivante : $S(S(\mathscr{E})) = S(\mathscr{E})$ et en particulier $S(\mathscr{E})$ est stable par union dénombrable et intersection dénombrable.

Si F est un ensemble et $\mathscr{E}$ une famille de parties de E stable par intersection finie contenant ϕ et F on a $S(\mathscr{E} \times \mathscr{F}) \supset S(\mathscr{E}) \times S(\mathscr{F})$.

B. *Semi-compacité.* — Si E est un ensemble, $\mathscr{E}$ une famille de parties de E, on dira que $\mathscr{E}$ est semi-compacte si, pour toute suite (E_n) de $\mathscr{E}$ telle que $\bigcap_n E_n = \emptyset$ il existe un entier n_0 tel que $\bigcap_{n \leqslant n_0} E_n = \emptyset$.

a) Si $\mathscr{E}$ est une famille semi-compacte il en est de même pour la famille $\mathscr{E}'$ stable pour les réunions finies et intersections dénombrables engendrée par $\mathscr{E}$.

b) Si $\mathscr{E}$ est stable pour l'intersection finie, on peut se restreindre aux suites décroissantes pour vérifier la semi-compacité.

c) Si f est une application de E dans F telle que pour tout $y \in \mathrm{F}$ la famille $\{ f^{-1}(\{ y \}) \cap \mathrm{A} \,;\, \mathrm{A} \in \mathscr{E} \}$ soit semi-compacte, alors pour toute suite décroissante $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{E}$,

$$f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(\mathrm{A}_n)$$

En particulier, si C est le noyau d'un schéma de Souslin monotone de $\mathscr{E}$, $\mathrm{C} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_n \mathrm{E}_{\sigma|n}$ on a $f(\mathrm{C}) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_n f(\mathrm{E}_{\sigma|n})$.

C. *Tribu souslinienne.* — Si $\mathscr{T}$ est une famille de parties d'un ensemble T (en particulier si $\mathscr{T}$ est une tribu) on dira que $\mathscr{T}$ est souslinienne si $\mathscr{T}$ est stable pour l'opération de Souslin : $\mathrm{S}(\mathscr{T}) \subset \mathscr{T}$. Cf. Leese [*15*].

Rappelons quelques critères pour qu'une famille $\mathscr{T}$ soit souslinienne :

a) Si $\mathscr{F}$ est une famille de parties de T stable par intersection finie et contenant ϕ, $\mathscr{T} = \mathrm{S}(\mathscr{F})$ est une famille souslinienne. Si $\mathscr{F}$ est une tribu, $\mathrm{S}(\mathscr{F})$ n'en est pas une en général.

b) La famille $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ des parties sousliniennes d'un espace topologique séparé X est souslinienne (Hoffmann-Jørgensen, p. 111) mais ce n'est pas en général une tribu. Si X est souslinien, cette famille est $\mathrm{S}(\mathscr{B}(\mathrm{X}))$ ou $\mathrm{S}(\mathscr{F}(\mathrm{X}))$ où $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ (resp. $\mathscr{F}(\mathrm{X})$) est la famille des boréliens (resp. des fermés de X).

c) Dans $\mathrm{X} = \Sigma = \mathbb{N}^\infty$ on a $\mathscr{S}(\mathrm{X}) = \mathscr{B}(\mathrm{X})$ (cf. le lemme, p. 18 de Christensen [*6*]).

d) Si X est un espace topologique la famille $\mathscr{B}\mathscr{P}(\mathrm{X})$ des parties de X ayant la propriété de Baire est une tribu souslinienne qui contient la tribu des boréliens (Kuratowski [*13*], p. 87-95, Hoffmann-Jørgensen [*11*], p. 50). Rappelons que $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ a la propriété de Baire s'il existe un ouvert U de X tel que $\mathrm{A} \setminus \mathrm{U}$ et $\mathrm{U} \setminus \mathrm{A}$ soient maigres (de première catégorie).

e) Le critère suivant est dû à Spzilrajn-Marcewski [*27*] (cf. aussi Kuratowski [*13*], p. 94 et Hoffmann-Jørgensen [*11*], p. 93).

Pour toutes parties $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{T}$ il existe $\mathrm{B} \in \mathscr{T}$ contenant A et tel que pour tout élément $\mathrm{C} \in \mathscr{T}$ contenant A l'on ait $\mathscr{P}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) \subseteq \mathscr{T}$.

On remarquera que cette condition sur la tribu $\mathscr{T}$ est moins restrictive que les conditions habituellement adoptées pour établir la mesurabilité d'une multi-application dont le graphe est mesurable.

En particulier, elle englobe les conditions suivantes :

— $\mathcal{T}$ est une tribu complète relativement à une mesure positive σ-finie (Aumann [*2*], Rockafellar [*23*], Himmelberg [*9*]).

— $\mathcal{T}$ est une tribu complète ; c'est-à-dire la tribu des universellement mesurables (Sainte-Beuve [*24*]).

— $\mathcal{T}$ est la tribu des μ-mesurables relativement à une mesure de Radon sur un espace localement compact (Castaing [*3*]).

— $\mathcal{T}$ est la tribu des μ-mesurables relativement à une mesure extérieure.

3.2. THÉORÈME. — *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p, d, \mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathrm{X}_0)$ *un champ mesurable séparable d'espaces métriques tel qu'il existe une sous-famille* $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ *ayant les propriétés suivantes :*

i) *$\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et contient ϕ.*

ii) *La projection de tout élément de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{T}$.*

iii) *Pour tout $t \in \mathrm{T}$, la famille $\mathcal{C}_t = \{ \mathrm{C} \cap \mathrm{E}_t \mid \mathrm{C} \in \mathcal{C} \}$ est semi-compacte.*

iv) $\mathrm{S}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{E}$.

Alors l'image par p de tout élément de $\mathcal{E}$ et de $\mathrm{S}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{T}$-souslinienne.

Preuve. —Puisque $\mathrm{S}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{E}$ et que d'après 3.1.A $\mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathcal{C})) = \mathrm{S}(\mathcal{C})$ on obtient $\mathrm{S}(\mathcal{C}) = \mathrm{S}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{E}$.

D'autre part, si $\mathrm{C} \in \mathrm{S}(\mathcal{E})$ alors $\mathrm{C} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_n \mathrm{E}_{\sigma|n}$ avec $\mathrm{E}_{\sigma|n} \in \mathcal{C}$ décroissante d'où, en utilisant la propriété B.*c* du rappel 3.1.

$$p(\mathrm{C}) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_n p(\mathrm{E}_{\sigma|n}).$$

Comme d'après *ii*), $p(\mathrm{E}_{\sigma|n}) \in \mathcal{T}$ on obtient le résultat annoncé : $p(\mathrm{C})$ est $\mathcal{T}$-souslinienne. □

3.3. COROLLAIRE. — *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p, d, \mathcal{T}, \mathrm{X}, \mathrm{X}_0)$ *un champ mesurable séparable d'espaces métriques tel que pour tout $t \in \mathrm{T}$ les boules fermées $\bar{\mathrm{B}}_t(x(t), r)$ $(x \in \mathrm{X}, r > 0)$ forment une classe semi-compacte. Alors la famille $\mathcal{A}_d$ des intersections finies de tubes fermés, satisfait aux conditions* i), ii), iii), iv). *Donc* $p(\mathrm{S}(\mathcal{E})) \subset \mathrm{S}(\mathcal{T})$.

Preuve :

i) est trivialement vérifiée.

— montrons *ii*)

Si $\bar{\mathrm{B}}(x, r)$ et $\bar{\mathrm{B}}(x', r')$ sont deux tubes fermés et si $\{ a_k \}$ est une énumération de X_0 alors on a le résultat suivant qui se généralise à un nombre fini de tubes.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $t \in p(\bar{B}(x, r) \cap \bar{B}(x', t'))$ est que

$$t \in \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant 0} \left[\left\{ t \mid d_t(x(t), a_k(t)) \leq r + \frac{1}{n} \right\} \cap \left\{ t \mid d_t(x'(t), a_k(t)) \leq r' + \frac{1}{n} \right\} \right].$$

La condition nécessaire est une conséquence directe de la densité de X_0 ; pour la condition suffisante on utilise la propriété de semi-compacité de $(\bar{\mathscr{A}}_d)_t = \{ A \cap E_t \mid A \in \bar{\mathscr{A}}_d \}$ puisque la semi-compacité se conserve par intersection finie.

Soit $t \in T$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $a_k \in X_0$ avec

$$a_k(t) \in \bar{B}_t\left(x(t), r + \frac{1}{n} \right) \cap \bar{B}_t\left(x'(t), r' + \frac{1}{n} \right)$$

on obtient, au-dessus de t une famille décroissante d'intersections finies de boules fermées non vides et, par conséquent,

$$\bigcap_n \left(\bar{B}_t\left(x(t), r + \frac{1}{n} \right) \cap \bar{B}_t\left(x'(t), r' + \frac{1}{n} \right) \right) \neq \emptyset$$

et $t \in p(\bar{B}(x, r) \cap \bar{B}(x', r'))$. $\square$

iii) Découle du rappel 3.1.B.*a*.

iv) Résulte de la proposition 1.10 puisque, quitte à remplacer T par T_0 (cf. remarque 1.12) on peut supposer que pour tout $t \in T$ card $(E_t) > 1$.

Remarque. — Les hypothèses du corollaire 3.3 sont vérifiées lorsque pour tout $t \in T$ les boules fermées $\bar{B}_t(x(t), r)$ sont compactes pour une topologie arbitraire définie sur E_t (Hilbert, Banach réflexifs, duaux d'espaces de Banach munis de la topologie faible par exemple).

3.4. COROLLAIRE. — *Si p est le champ mesurable trivial de fibre $\Sigma = \mathbb{N}^\infty = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et de base* $(T, \mathscr{T})$ *les hypothèses du théorème 3.2 sont vérifiées et l'on a*

$$p(\mathscr{E}) \subset p(S(\mathscr{E})) \subset S(\mathscr{T}).$$

Preuve. — Nous avons vu que $\mathscr{E}$ est la tribu produit $\mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(\Sigma)$ où $\mathscr{B}(\Sigma)$ est la tribu borélienne de Σ.

Introduisons la famille $\mathscr{N} = \{ N(s) \mid s \in \mathbb{N}_\infty \}$ où $N(s) = \{ \sigma \in \Sigma \mid s < \sigma \}$ est l'ensemble des suites infinies qui commencent par s. On voit facilement que $\mathscr{N}$ est une base dénombrable d'ouverts (qui sont aussi des fermés) de Σ, que $\mathscr{N}$ est stable par intersection finie, et que $\mathscr{N}$ est une classe semi-compacte.

La famille $\mathscr{C} = \{ S \times N(s) \mid S \in \mathscr{T}, s \in \mathbb{N}_\infty \}$ vérifie ainsi les conditions *i*), *ii*), *iii*) du théorème 3.2. Pour établir *iv*) remarquons que si $\mathscr{A}$ est une famille de parties de E stable par passage au complémentaire (ou telle que pour tout $A \in \mathscr{A}$, $E \setminus A \in S(\mathscr{A})$) alors $S(\mathscr{A})$ contient la tribu engendrée par $\mathscr{A}$ car $S(\mathscr{A}) \cap CS(\mathscr{A})$ est une tribu qui contient $\mathscr{A}$ avec

$$CS(\mathscr{A}) = \{ B \mid E \setminus B \in S(\mathscr{A}) \}.$$

Ainsi

$$S(\mathscr{C}) \supset S(\mathscr{T}) \times S(\mathscr{N}) \supset \mathscr{T} \times \mathscr{B}(\Sigma)$$

donc

$$S(\mathscr{C}) \supset \mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(\Sigma). \quad \square$$

Remarque. — on peut munir Σ d'une distance de la forme

$$d(\sigma, \tau) = \sum_{n \geqslant 0} r_n d(\sigma(n), \tau(n))$$

où $\sigma = (\sigma(n))_{n \in \mathbb{N}}$, $\tau = (\tau(n))_{n \in \mathbb{N}}$, $d(p, q) = 1$ si $p \neq q$, $d(p, q) = 0$ si $p = q$, (r_n) étant une série convergente de réels positifs telle que $\mathscr{N}$ soit une famille de boules fermées et $\mathscr{C}$ une famille de bouts de tubes.

3.5. COROLLAIRE. — *Si* $(E, T, p, d, \mathscr{T}, X, X_0)$ *est un champ mesurable séparable satisfaisant les hypothèses de* 3.2, *si* $\mathscr{T}$ *est une tribu souslinienne et si* Γ *est une multisection telle que* $\Gamma(T) \in \mathscr{E}$ ou $\Gamma(T) \in S(\mathscr{E})$ *alors pour tout* $C \in S(\mathscr{E})$ *(en particulier pour tout* $C \in \mathscr{E}$*)* $\Gamma^-(C) \in \mathscr{T}$ *et* Γ *est fermement mesurable.*

Il suffit de remarquer que $\Gamma^-(C) = p(\Gamma(T) \cap C)$ et d'appliquer le théorème 3.2.

3.6. PROPOSITION. — *Si* $(E, T, p, d, \mathscr{T}, X, X_0)$ *est un champ mesurable séparable satisfaisant les hypothèses de* 3.2, *si* $\mathscr{T}$ *est une tribu souslinienne et* Γ *une multisection à valeurs complètes non vides, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\Gamma(T) \in \mathscr{E}$.

1'. $\Gamma(T) \in S(\mathscr{E})$.

2. Γ *est mesurable.*

2'. Γ *est mollement mesurable.*

2''. Γ *est fermement mesurable.*

3. Γ *admet une famille dénombrable de sélections de valeurs denses.*

3'. $p \mid \Gamma(T)$ *est un sous-champ séparable de* E.

4. *Pour tout* $x \in X$, $d_x : t \to d_t(x(t), \Gamma(t))$ *est mesurable.*

4'. *Pour tout* $a \in X_0$, $d_a : t \to d_t(a(t), \Gamma(t))$ *est mesurable.*

5. *Pour tout tube fermé* $\bar{B}(x, r)$, $\Gamma^-(\bar{B}(x, r)) \in \mathscr{T}$.

6. *Pour tout élément* $F \in \mathscr{E}$ *on a* $\Gamma^-(F) \in \mathscr{T}$.

6'. *Pour tout élément* $F \in S(\mathscr{E})$ *on a* $\Gamma^-(F) \in \mathscr{T}$.

Preuve. — Il est clair que $6' \Rightarrow 6 \Rightarrow 5$, que $3'$ n'est qu'une reformulation de 3 et que :

$4 \Leftrightarrow 2'$ puisque l'on a $d_x^{-1}([0, r[) = \Gamma^-(B(x, r))$,
$4 \Leftrightarrow 4'$ d'après le lemme 1.6.
$5 \Rightarrow 2'$ puisque $\Gamma^-(B(x, r)) = \bigcup_n \Gamma^-\left(\bar{B}\left(x, r - \frac{1}{n}\right)\right)$.

On a vu en 2.2 que $2'' \Rightarrow 2 \Rightarrow 2'$, en 2.7 que $2 \Leftrightarrow 3$, et en 3.5 que $1' \Rightarrow 6' \Rightarrow 6 \Rightarrow 2''$.

On a le schéma :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, Rightarrow] & 1' \arrow[d, Rightarrow] & & & 3 \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & 3' \\
& 6' \arrow[r, Rightarrow] & 6 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & 2'' \arrow[r, Rightarrow] & 2 \arrow[r, Rightarrow] & 2' \arrow[d, Leftrightarrow] \\
& & & 5 \arrow[urr, Rightarrow] & & 4 \arrow[r, Leftrightarrow] & 4'
\end{tikzcd}$$

Pour terminer il suffit de montrer que $2' \Rightarrow 1$, or :

$$\Gamma(T) = \bigcap_k \bigcup_{a_n \in X_0} \left[B\left(a_n, \frac{1}{k}\right) \cap p^{-1}\left(\Gamma^-\left(B\left(a_n, \frac{1}{k}\right)\right)\right)\right]$$

qui est mesurable comme intersection dénombrable d'unions dénombrables de « bouts de tubes ». □

3.7. PROPOSITION. — *Soit* $(E, T, p, d, \mathscr{T}, X, C_0)$ *un champ mesurable séparable image par un morphisme* f *du champ trivial* $T \times P$ *où* P *est un espace polonais.*

Alors si $\mathscr{T}$ *est souslinienne et si* Γ *est une multisection à valeurs fermées non vides, les douze assertions* 1-6′ *du théorème* 3.6 *sont équivalentes.*

Les seules implications qui restent à prouver après les justifications données dans la preuve du théorème 3.6 sont $1' \Rightarrow 6'$ et $2 \Rightarrow 3$. Il suffira pour cela d'établir $1' \Rightarrow 6'$ et $1' \Rightarrow 3$.

Preuve. — Puisque tout espace polonais est image continue de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{N}^{\infty}$ (cf. Dixmier, [7], appendice V ou le théorème 3.8 dans le cas trivial) on peut supposer que $P = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Soit $\Gamma(T) \in S(\mathscr{E})$, $\Gamma(T) = \bigcup_\sigma \bigcap_n E_{\sigma|n}$ avec $E_{\sigma|n} \in \mathscr{E}$. On considère alors la multisection $\Omega : T \to T \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définie par $\Omega(T) = f^{-1}[\Gamma(T)]$.

Il est clair que $f \circ \Omega = \Gamma$, que $\Omega(T) \in S(\mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{N}^{\infty}))$ et que Ω est à valeurs fermées non vides.

Comme $\mathscr{T}$ est souslinienne et que Ω est à valeurs complètes, on peut utiliser le théorème 3.6 compte tenu de 3.4.

En conséquence Ω possède une famille dénombrable de sélections mesurables $\{x_n\}$ de valeurs denses et $\Gamma = f \circ \Omega$ admet aussi une famille dénombrable de sélections mesurables $y_n = f \circ x_n$ telle que pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\Gamma(t) = \overline{\{ y_n(t) \mid n \in \mathbb{N} \}}$ et $1' \Rightarrow 3$. D'autre part, on a alors pour tout $\mathrm{F} \in \mathrm{S}(\mathscr{E})$ $\Gamma^-(\mathrm{F}) = p(\Gamma(\mathrm{T}) \cap \mathrm{F}) = \mathrm{Proj}_{\mathrm{T}}\,[\Omega(\mathrm{T}) \cap f^{-1}(\mathrm{F})]$ d'où $1' \Rightarrow 6'$. □

Les hypothèses de l'énoncé précédent sont vérifiées dès que les fibres sont complètes comme le prouve le :

3.8. THÉORÈME. — *Soit* $p = (\mathrm{E}, \mathrm{T}, p, d, \mathscr{T}, \mathrm{X}, \mathrm{X}_0)$ *un champ mesurable séparable d'espaces métriques complets (en bref un champ polonais). Alors il existe un morphisme surjectif du champ trivial de base* T *et de fibre* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *sur* E.

La preuve va consister dans un premier temps à établir l'existence d'une sorte de criblage fibré de E. De façon précise nous allons montrer qu'il existe une famille Γ_s de multisections mesurables à valeurs ouvertes non vides d'images G_s qu'on identifie à Γ_s et une famille x_s d'éléments de X, où s parcourt l'ensemble $\mathbb{N}_\infty = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ des suites finies d'entiers, satisfaisant les propriétés :

(1) $$\mathrm{G}_s = \bigcup_{s' > s} \mathrm{G}_{s'} \qquad |s| = n,\ \mathrm{G}_\phi = \mathrm{E}$$

(2) $$\overline{\mathrm{G}_s} = \bigcup_{s' > s} \overline{\mathrm{G}_{s'}}\,.$$

(3) $$\mathrm{G}_s \subset \bar{\mathrm{B}}\left(x_s, \frac{1}{2^n}\right) \qquad |s| = n \geqslant 1\,.$$

Pour établir (1) et (2) il suffira de prendre la réunion sur les $s' \in \mathbb{N}_\infty$ de longueur $n + 1 = |s| + 1$ au lieu de prendre s' arbitraire dans $\mathbb{N}_\infty$ avec $s' \mid n = s$. Procédons par récurrence sur $|s|$. Pour $|s| = 1$ nous prenons pour famille x_s une indexation de l'ensemble X_0 et pour G_s le tube de centre x_s et de rayon $\frac{1}{2}$ et l'on a bien

$$\mathrm{E} = \mathrm{G}_\phi = \bigcup_{|s|=1} \mathrm{G}_s = \bigcup_{|s|=1} \bar{\mathrm{G}}_s$$

Supposons G_s construit pour $|s| \leq n$ et construisons la famille $\mathrm{G}_{s'}$ pour $s' \in \mathbb{N}^{n+1}$. Fixons $s \in \mathbb{N}^n$ et notons que la multisection $\bar{\Gamma}_s$ obtenue en prenant la fermeture de Γ_s est mesurable (proposition 2.5). Elle possède donc une famille dénombrable de sélections mesurables $(x_{s,k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{s'})_{s',\in\mathbb{N}^{n+1}}$ dont les valeurs sont partout denses.

Posons

$$G_{s'} = B\left(x_{s'}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cap G_s .$$

Pour tout $t \in T$, $G_{s'} \cap E_t = \Gamma_{s'}(t)$ n'est pas vide car $x_{s'}(t)$ est adhérent à $G_s \cap E_t$ dans E_t. On a bien

$$G_s = \bigcup_{\substack{s' \\ s'|n=s}} G_{s'}$$

car les tubes $B\left(x_{s'}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ recouvrent G_s. Soient $e \in \overline{G_s}$, $t = p(e)$. Il existe $s' \in \mathbb{N}^{n+1}$ avec $d_t(e, x_{s'}(t)) < \frac{1}{2^{n+1}}$. On a alors $e \in \overline{G_{s'}}$ car tout voisinage V de e dans $B_t\left(x_{s'}(t), \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ coupe G_s de sorte que $V \cap G_s \cap B\left(x_{s'}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ n'est pas vide. On a ainsi montré l'inclusion $\bar{G}_s \subset \bigcup_{\substack{s \\ s'|n=s}} \bar{G}_{s'}$, la moins triviale de la relation (2).

Construisons maintenant f de $T \times \mathbb{N}^\infty$ sur E. A $(t, \sigma) \in T \times \mathbb{N}^\infty$ associons l'unique point de $\bigcap_{n\geq 0} \overline{G_{\sigma|n}(t)}$ (ces fermés sont de diamètre inférieur à $\frac{1}{2^{n-1}}$ et sont emboîtés d'après (2) et (3)). Cette application est surjective car pour tout $e \in E$ il existe $\sigma \in \mathbb{N}^\infty$ tel que $e \in \bar{G}_{\sigma|n}$ pour tout n d'après (1) et (2).

Pour tout $t \in T$ l'application $f_t : \sigma \to f(t, \sigma)$ est continue car pour tout τ dans le voisinage $N(\sigma \mid n) = \{ \tau \in \mathbb{N}^\infty \mid \tau \mid n = \sigma \mid n \}$ de σ on a $f(t, \tau) \in \bar{G}_{\sigma|n}$ donc $d(f(t, \tau), f(t, \sigma)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^\infty$ l'application $t \to f(t, \sigma)$ est limite des sections $x_{\sigma|n}$, quand $n \to +\infty$ donc appartient à X. Ainsi f est un morphisme. □

3.9. PROPOSITION. — *Si* $(E, T, p, d, \mathscr{T}, X, X_0)$ *est un champ polonais alors pour tout* $F \in S(\mathscr{E})$ *on a* $p(F) \in S(\mathscr{T})$ *donc* $p(F) \in \mathscr{T}$ *si* $\mathscr{T}$ *est souslinienne.*

C'est une conséquence directe de 3.4 et 3.8 puisque l'on a dans ce cas $p(F) = pr_1 [f^{-1}(F)]$ avec $f^{-1}(F) \in S(\mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{N}^\infty))$ où $pr_1 : T \times \mathbb{N}^\infty \to T$ est la projection canonique. □

Le théorème suivant est aussi une conséquence directe des énoncés 3.7 et 3.8 :

3.10. THÉORÈME. — *Soit* $(E, T, p, d, \mathscr{T}, X, X_0)$ *un champ polonais* *avec $\mathscr{T}$ souslinienne et soit Γ une multisection à valeurs fermées non vides. Alors les douze assertions* 1-6′ *du théorème 3.6 sont équivalentes.*

3.11. REMARQUE (suggérée par M. Valadier). — Une autre méthode pour établir ce résultat consiste à se ramener aux résultats de Von Neumann [*29*], Aumann [*2*], Sainte-Beuve [*24*], Leese [*15*] à l'aide de la proposition 1.19. Cette méthode évite le résultat intermédiaire 3.6. Pour établir l'implication 1′ $\Rightarrow$ 6′, la seule qui ne découle pas de résultats obtenus précédemment, on considère p comme un sous-champ du champ trivial p_1 de base T et de fibre un espace de Banach séparable F. Si $\mathscr{F}$ est la tribu des bouts de tubes sur $T \times F$ (i. e. la tribu produit $\mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(F)$) on sait d'après (1.17 que $\mathscr{E}$ consiste en la famille des $A \in \mathscr{F}$ contenus dans E. Par suite $S(\mathscr{E})$ consiste en la famille des $A \in S(\mathscr{F})$ contenus dans E. Le théorème de projection de Von Neumann, Aumann, Sainte-Beuve, Leese assure que pour tout $A \in S(\mathscr{F})$

$$\Gamma^{-}(A) = p(\Gamma(T) \cap A) = p_1(\Gamma(T) \cap A)$$

est dans $S(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$ si $\Gamma(T) \in S(\mathscr{E})$ et 6′ est vérifiée.

On a ainsi caractérisé les sous-champs polonais d'un champ polonais. Dans un travail ultérieur on caractérisera les sous-champs sousliniens d'un champ souslinien, à fibres pas nécessairement complètes, ni même métrisables.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] R. F. ARENS, J. EELLS Jr, Embedding uniform and topological spaces. *Pacific J. Math.*, t. **6**, 1956, p. 203-210.

[*2*] R. J. AUMANN, *Measurable utility and measurable choice theorem. La Décision, 2.* Actes Colloq. Internat., Aix-en-Provence, 1967, p. 15-26.

[*3*] H. BERLIOCCHI, J. M. LASRY, Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations. *Bull. Soc. Math. France*, t. **101**, 1973, p. 129-184.

[*4*] Ch. CASTAING, Sur les multi-applications mesurables. *R. I. R. O.*, 1re année, t. **1**, 1967, p. 91-126.

[*5*] G. CHOQUET, *Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique*, rédigé par C. Mayer. C. D. U. Collection analyse fonctionnelle, Paris, 1969.

[*6*] CHRISTENSEN, *Topology and Borel structure.* North Holland mathematics studies, n° 10, Amsterdam, 1974.

[*7*] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbre de Von Neuman)*, Cahier scientifique, t. XXV, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[*8*] DIXMIER-DOUADY, Champs continus d'espaces hilbertiens et de C*-algèbres. *Bull. Soc. Math. France*, t. **91**, 1963, p. 227-284.

[*9*] C. J. HIMMELBERG, Measurable relations. *Fund. math.*, t. LXXXVII, 1975, p. 55-72.

[*10*] C. J. HIMMELBERG, F. S. VAN VLECK, Some selections theorems for measurable functions. *Canad. J. Math.*, t. **21**, 1969, p. 394-399.

[11] HOFFMANN, JØRGENSEN, *The theory of analytic spaces*. Aarhus, 1970, Various publications, series n° 10.
[12] S. T. HU, *Theory of retracts*. Wayne state Univ. Press, Detroit, 1965.
[13] K. KURATOWSKI, *Topology*, I, Academic Press, London, 1966.
[14] KURATOWSKI, RYLL, NARDZEWSKI, A general theorem on selectors. *Bull. Soc. Pol. Sc.*, t. **13**, 1965, p. 397-403.
[15] S. J. LEESE, Multifunctions of Souslin type. *Bull. Austral. Math. Soc.*, t. **II**, 1974, p. 395-411.
[16] A. MAITRA, B. V. RAO, Selections theorems and the reduction principle. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **202**, 1975, p. 57-66.
[17] O. MARÉCHAL, Champs mesurables d'espaces hilbertiens. *Bull. Soc. Math. France*, t. **93**, 1969, p. 113-143.
[18] P. A. MEYER, *Probabilité et potentiel*, Hermann, Paris, 1966, et édition refondue en collaboration avec C. Dellacherie *(à paraître)*.
[19] R. PALAIS, Homotopy theory of infinite dimensional manifolds. *Topology*, t. **5**, 1966, p. 1-16.
[20] T. PARTHASARATHY, Selections theorems and their applications. *Lecture notes in mathematics*, n° 263, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[21] J. P. PENOT, Géométrie des variétés fonctionnelles : diverses méthodes de construction de variétés d'applications. *Thèse*, Paris, 1970.
[22] J. P. PENOT *(en préparation)*.
[23] ROCKAFELLAR, Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. *Jour. of Math. anal. and appl.*, t. **28**, 1969, p. 4-25.
[24] M. F. SAINTE-BEUVE, On the extension of Von Neumann-Aumann's theorem. *Jour. of Funct. Anal.*, t. **17** (1), 1974, p. 112-129.
[25] H. M. SCHAERFF, On the continuity of measurable functions in neighborhood spaces. *Portugaliæ Mathematica*, t. **6** (1), 1947, p. 33-92.
[26] M. SION, Approximate continuity and differentiation. *Canad. J. Math.*, t. **14**, 1962, p. 467-475.
[27] SPZILRAJN, MERCEWSKI, O mierzalnosi i warunku Baire's. *Comptes rendus du Iᵉˡ Congrès de Math. des Pays Slaves*, Varsovie, 1929.
[28] M. VALADIER, Contribution à l'analyse convexe. *Thèse*, Paris, 1970.
[29] J. VON NEUMANN, On rings of operators, reduction theory. *Annals of Math.*, t. **50**, 1949, p. 401-485.
[30] M. WOJDYSLAWSKI, Rétractes absolus et hyperespaces des continus. *Fund. Math.*, t. **32**, 1939, p. 184-192.

(Manuscrit reçu le 1er mars 1976)