ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. DAUXOIS

A. POUSSE

Une extension de l'analyse canonique. Quelques applications

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 4 (1975), p. 355-379

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_4_355_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XI, n° 4, 1975, p. 355-379. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Une extension de l'analyse canonique. Quelques applications

par

J. DAUXOIS et A. POUSSE

Laboratoire de Statistique.
Université Paul Sabatier 31077 Toulouse-Cedex

RÉSUMÉ. — On propose une définition et une formalisation aussi générales que possible de la notion d'analyse canonique de deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert réel séparable. La présentation adoptée permet d'en assurer toujours l'existence; elle est fondée sur l'analyse spectrale d'un opérateur autoadjoint, et la représentation qui lui est associée de l'espace par une intégrale hilbertienne. Diverses applications à la Statistique (plus particulièrement à l'analyse des données) et au Calcul des Probabilités se trouvent ainsi soit définies, soit resituées dans un cadre unique.

La notion classique d'analyse canonique de deux variables aléatoires multidimensionnelles réelles — analyse que l'on peut qualifier de « linéaire », en un sens qui sera précisé dans le paragraphe 2 — a été introduite par Hotelling en utilisant une méthode itérative. Elle a été reprise, dans le cas de variables statistiques, en analyse des données, et a trouvé là un champ d'applications fort intéressantes.

Une extension naturelle de cette analyse conduit à se débarrasser de la contrainte de linéarité : il est tentant, dans une première approche, de s'inspirer de la méthode « pas à pas » de Hotelling. Toutefois, on est conduit immédiatement à remarquer que la notion intrinsèque est celle de tribu, et non celle de variable, et on est par ailleurs, dès les premières étapes de la méthode, confronté à un problème d'existence. D'autre part, même si cette démarche peut paraître plus « parlante » au statisticien, elle n'est pas totalement satisfaisante dans la mesure où une résolution globale paraît préférable. Une double question se pose donc : est-il possible de donner une définition suffisamment générale assurant toujours l'existence d'une analyse canonique « non-linéaire », et permettant de plus une solution globale ? Diverses approches ont été tentées : dans [*6.1* ou *6.2*], nous avons proposé une analyse canonique de deux tribus conduisant naturellement à une analyse non-linéaire de deux variables aléatoires quelconques ; d'autres conséquences indiquées ci-dessous y sont déjà signalées ; puis dans [*11.2*], M. Masson propose, sous des hypothèses classiques en assurant l'existence, une analyse canonique non-linéaire de deux v. a. multidimensionnelles réelles ; enfin sous une hypothèse du même type, G. Saporta ([*18*]) présente brièvement en un langage proche de [*6.2*], l'analyse canonique non-linéaire de deux v. a. r. Aucune de ces trois présentations ne répond à toutes les conditions indiquées ci-dessus. Dans cet article, nous présentons une nouvelle tentative qui nous semble réunir les conditions souhaitées. De plus, contrairement à la présentation de M. Masson, elle permet de traiter simultanément, et non comme deux types d'analyses très différents, le cas linéaire et le cas non linéaire.

L'analyse des correspondances ([*4*]) s'est développée en analyse des données sans vraiment user du langage des probabilités. La reformulation avec ce langage ([*6.2*]), est exposée rapidement au paragraphe 2 dans le cadre proposé ici ; elle permet de montrer que l'analyse des correspondances peut être considérée soit comme une analyse canonique de tribus, soit comme une analyse canonique linéaire de v. a. r. convenables. Bien entendu cette nouvelle présentation ne supplante en rien celle obtenue au moyen du langage classique de l'analyse des données, mais elle permet d'apporter des compléments intéressants. C'est ainsi qu'une généralisation directe du type « analyse des correspondances continues », introduite par [*13*], apparaît comme superflue : une telle analyse n'est en effet qu'une analyse canonique non-linéaire sous une hypothèse classique depuis Lancaster.

Enfin, étant donné une probabilité sur un espace produit, les probabilités marginales sont connues. Le problème classique inverse de l'étude de l'ensemble des probabilités de marges données n'est pas totalement résolu. [*20*] montre des liens intéressants entre ce problème et celui de l'analyse canonique non-linéaire. La question est reprise brièvement ici, et on la rattache à la notion d'analyse canonique de tribus, ce qui permet alors une simplification notable de la présentation des résultats de [*20*].

On donne, à la fin de cette partie, un exemple original d'analyse canonique non linéaire (complétant celui, classique, du cas gaussien repris dans [*6*.2]). Il faut remarquer qu'il s'agit d'une analyse « non compacte », mais « de type dénombrable », qui se traite aisément à partir des notions introduites ici, alors qu'elle n'est pas même envisageable dans le cadre proposé en [*11*.2].

On notera qu'aucune mention n'est faite de la notion d'analyse en composantes principales, alors qu'il est clair que certains des résultats indiqués relèvent implicitement de cette notion. Il s'agit là d'un choix délibéré motivé en particulier par le fait que la resituation des notions d'analyse canonique et d'analyse en composantes principales fait l'objet d'un développement séparé (cf. [*6*.4] et [*6*.5]).

Par ailleurs, la présentation adoptée ici a conduit à une généralisation de l'analyse canonique au cas d'un nombre fini, quelconque, de sous-espaces fermé d'un espace de Hilbert, et à l'étude de ses applications statistiques (cf. [*6*.6]).

1. ANALYSE CANONIQUE DE DEUX SOUS-ESPACES FERMÉS D'UN ESPACE DE HILBERT

1.1. Le cas général

Soit H un espace de Hilbert réel séparable. On note $\langle .,. \rangle$ (resp. $\| . \|$) son produit scalaire (resp. la norme associée). H_i $(i = 1, 2)$ désigne un sous-espace fermé de H, P_i $(i = 1, 2)$ est le projecteur orthogonal de H sur H_i, et I est l'identité sur H.

On se propose de montrer qu'il est possible de représenter H_1 et H_2 par des intégrales hilbertiennes relativement à la même mesure (ou — ce qui revient au même — à des mesures équivalentes).

Soit A l'opérateur hermitien positif borné de H dans lui-même défini par :

$$A = (P_1 + P_2 - I)^2$$

Pour $i = 1, 2$, la restriction de A à H_i, $V_i = A_{|H_i}$ est un opérateur hermitien positif borné de H_i dans lui-même. On a d'ailleurs :

$$V_1 = P_1 \circ P_{2/H_1} \qquad \text{et} \qquad V_2 = P_2 \circ P_{1/H_2} .$$

L'analyse spectrale de A permet d'obtenir :

— d'une part une « décomposition » de A au moyen de sa fonction spectrale $P(\lambda)$, que l'on peut noter $A = \int_\Lambda \lambda dP(\lambda)$, où Λ est le spectre de A,

— d'autre part, une représentation isométrique de H par une « intégrale hilbertienne » (cf. [*14*.2]), ou « somme directe continue » (cf. [9]), relativement à une mesure positive μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, d'espaces de Hilbert $H(x)$:

$$\mathscr{H} = \int^{\oplus} H(x) d\mu(x)$$

(cf. par exemple [*8*], [*12*] ; on pourra trouver en particulier un résumé de cette question dans [9]).

A l'opérateur A correspond alors l'opérateur de multiplication par x dans $\mathscr{H}$:

$$f = \{ f(x) \}_{x \in \mathbb{R}} \in \mathscr{H} \to g = \{ xf(x) \}_{x \in \mathbb{R}} \in \mathscr{H}$$

Par cette isométrie, le sous-espace H_i $(i = 1, 2)$ de H est transformé en un sous-espace $\mathscr{H}_i$ de $\mathscr{H}$, et à V_i est alors associé l'opérateur de multiplication par x dans $\mathscr{H}_i$.

Il est toujours possible, en considérant la restriction de la mesure à la fermeture de $\{ x \in R \,;\, H(x) \neq \{ 0 \} \}$ d'obtenir une représentation isométrique de H par $\mathscr{H}$, de sorte que le spectre de A soit le support de μ (cf. [*8*]). On en déduit la représentation de H_i $(i = 1, 2)$:

$$\mathscr{H}_i = \int_{X_i}^{\oplus} H_i(x) d\mu(x),$$

où $X_i = \overline{\{ x \in R \,;\, H_i(x) \neq \{ 0 \} \}}$ est le spectre de V_i.

Soit $\Delta =]a, b[$ ne contenant pas zéro et inclus dans $\complement_{\mathbb{R}} X_1$. Pour tout x de Δ, $H_1(x) = \{ 0 \}$. Donc $P_{(\Delta)|H_1} = 0$. Mais $B = P_1 + P_2 - I$ et $A = (P_1 + P_2 - I)^2$ commutent. Donc (cf. [*12*]), $P_{(\Delta)}$ commute avec B :

$$P_{(\Delta)} \circ (P_1 + P_2 - I) = (P_1 + P_2 - I) \circ P_{(\Delta)}$$

d'où

$$P_{(\Delta)} \circ (P_1 + P_2 - I)_{|H_1} = P_{(\Delta)} \circ P_{2|H_1} = (P_1 + P_2 - I) \circ P_{(\Delta)|H_1} = 0$$

donc $P_{(\Delta)} \circ V_2 = 0$, ce qui implique $P_{(\Delta)|H_2} = 0$. Δ est donc contenu dans $\complement_{\mathbb{R}} X_2$, d'où par symétrie :

$$X_1 \cup \{ 0 \} = X_2 \cup \{ 0 \} \qquad \text{(que l'on note X.)}$$

On peut alors représenter isométriquement H_i par l'intégrale hilbertienne $\int_X^{\oplus} H_i(x) d\nu(x)$, où ν est la restriction de μ à X. D'où la

DÉFINITION 1. — *On appelle analyse canonique de* H_1 *et* H_2 *tout quadruplet* $(X, \nu, \{ H_1(x) \}_{x \in X}, \{ H_2(x) \}_{x \in X})$ *ainsi obtenu.*

On peut remarquer que X est contenu dans [0, 1]. La représentation de H par $\mathscr{H}$ n'étant pas unique, le triplet $(\nu, \{ H_1(x) \}_{x\in X}, \{ H_2(x) \}_{x\in X})$ n'est pas unique. Toutefois la représentation de H_i par $\int_X^{\oplus} H_i(x) d\nu(x)$ est unique à une isométrie près.

1.2. **Analyse canonique de type dénombrable**

1.2.1. GÉNÉRALITÉS. — L'opérateur $U = P_1 \circ P_2$ de H dans lui-même est un opérateur borné d'adjoint $U^* = P_2 \circ P_1$.

$P_{1|H_2}$ est un opérateur borné de H_2 dans H_1. Son adjoint est l'opérateur $P_{2|H_1}$, et on a $V_1 = (P_{1|H_2}) \circ (P_{2|H_1})$ et $V_2 = (P_{2|H_1}) \circ (P_{1|H_2})$.

$B = P_1 + P_2 - I$ est un opérateur hermitien de $\mathscr{L}(H)$; sa restriction B' à $\overline{H_1 + H_2}$ est un opérateur hermitien de $\mathscr{L}(\overline{H_1 + H_2})$ (si $t \in H_1 + H_2$, $B't = P_1 t + P_2 t - t \in H_1 + H_2$).

On a immédiatement les relations suivantes :

$$A = B^2\,; \quad \text{si} \quad A' = A_{|\overline{H_1 + H_2}}, \quad A' = B'^2\,; \quad V_1 = U_{|H_1} = A_{|H_1}\,; \quad V_2 = U^*_{|H_2} = A_{|H_2}$$

$$U = P_1 \circ B \quad \text{et} \quad U^* = P_2 \circ B\,; \quad B_{|H_2} = B'_{|H_2} = P_{1|H_2}, \quad \text{et} \quad B_{|H_1} = B'_{|H_1} = P_{2|H_1}\,.$$

Dans ce qui suit immédiatement, on donne quelques propriétés élémentaires concernant les valeurs propres des opérateurs V_1, V_2 et B'. Auparavant on peut remarquer que les valeurs propres non nulles de U (resp. U^*) sont exactement celles de V_1 (resp. V_2) ; que de plus la valeur 1 n'est une valeur propre que si $H_1 \cap H_2 \neq \{ 0 \}$, et alors tout vecteur propre associé à 1 appartient à $H_1 \cap H_2$. Enfin le spectre de B' est contenu dans $[-1, 1]$ (car $\| B' \| \leq 1$).

LEMME 1. —

$$\text{Ker } V_1 = H_1 \cap H_2^\perp\,; \quad \text{Ker } V_2 = H_2 \cap H_1^\perp\,; \quad \text{Ker } (P_1 + P_2) = (\overline{H_1 + H_2})^\perp$$

En effet, si $\phi \in \text{Ker } V_1$, alors $P_2\phi \in H_1^\perp$, et par suite :

$$\| P_2\phi \|^2 = \langle P_2\phi, \phi \rangle = 0\,;$$

d'où : $P_2\phi = 0$, et : $\phi \in H_1 \cap H_2^\perp$. La réciproque est évidente.

Si $\phi \in \text{Ker } (P_1 + P_2)$, alors : $P_1\phi + P_2\phi = 0$; d'où :

$$\| P_1\phi \|^2 = \langle P_1\phi, \phi \rangle = -\langle P_2\phi, \phi \rangle = -\| P_2\phi \|^2 \quad \text{et} \quad \| P_1\phi \| = \| P_2\phi \| = 0,$$

ce qui entraîne : $\phi \in H_1^\perp \cap H_2^\perp = (\overline{H_1 + H_2})^\perp$.

COROLLAIRE. — (-1) *n'est pas valeur propre de* B'.

En effet $B'\phi = -\phi$ entraîne : $\phi \in \operatorname{Ker}(P_1 + P_2)$, d'où

$$\phi \in \overline{H_1 + H_2} \cap (\overline{H_1 + H_2})^{\perp} = \{0\}.$$

LEMME 2. — *Si f est un vecteur propre normé de V_1 associé à la valeur propre $\lambda(\neq 0)$, alors $g = \dfrac{P_2 f}{\|P_2 f\|}$ est un vecteur propre normé de V_2 associé à la valeur propre λ.*

De plus $\langle f, g \rangle = \sqrt{\lambda}$, $P_2 f = \sqrt{\lambda} g$ et $P_1 g = \sqrt{\lambda} f$.

En effet, l'hypothèse $\lambda \neq 0$ entraîne $P_2 f \neq 0$, et le vecteur normé g vérifie $V_2 g = P_2 \circ P_1 g = \dfrac{1}{\|P_2 f\|} P_2 \circ P_1 \circ P_2 f = \dfrac{P_2(\lambda f)}{\|P_2 f\|} = \lambda g.$

Par ailleurs :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\|P_2 f\|} \langle f, P_2 f \rangle = \|P_2 f\|$$

$$= \frac{1}{\|P_2 f\|} \langle f, P_1 \circ P_2 f \rangle = \frac{\lambda}{\|P_2 f\|}$$

D'où $\lambda = \|P_2 f\|^2$, et par suite, $\langle f, g \rangle = \sqrt{\lambda}$, $P_2 f = \sqrt{\lambda} g$, et

$$P_1 g = \frac{P_1 \circ P_2 f}{\|P_2 f\|} = \sqrt{\lambda} f$$

De plus, on peut noter que, si f_i et f_j sont deux vecteurs propres normés (resp. normés et orthogonaux) de V_1 associés aux valeurs propres non nulles λ_i et λ_j distinctes (resp. égales ; λ_i est alors de multiplicité supérieure à 1), en posant $g_i = \dfrac{P_2 f_i}{\|P_2 f_i\|}$ et $g_j = \dfrac{P_2 f_j}{\|P_2 f_j\|}$, on a le

LEMME 3. — $\langle f_i, f_j \rangle = \langle g_i, g_j \rangle = \langle f_i, g_j \rangle = \langle f_j, g_i \rangle = 0.$

La nullité des deux premiers produits scalaires est évidente si λ_i est différent de λ_j.

Si $\lambda_i = \lambda_j$ et $\langle f_i, f_j \rangle = 0$, alors

$$\langle g_i, g_j \rangle = \frac{1}{\|P_2 f_i\| \, \|P_2 f_j\|} \langle P_2 f_i, P_2 f_j \rangle$$

$$= \frac{1}{\|P_2 f_i\| \, \|P_2 f_j\|} \langle f_i, P_1 \circ P_2 f_j \rangle = \frac{\lambda_j}{\|P_2 f_i\| \, \|P_2 f_j\|} \langle f_i, f_j \rangle = 0$$

Par ailleurs $\langle f_i, g_j \rangle = \langle f_i, P_1 g_j \rangle = \sqrt{\lambda_j} \langle f_i, f_j \rangle = 0.$

LEMME 4. — a) *Si t est un vecteur propre de B' associé à la valeur propre* *non nulle* λ, *alors* $P_i t$ *est un vecteur propre de* V_i ($i = 1, 2$) *associé à la valeur propre* λ^2.

b) *Si* f *est un vecteur propre normé de* V_1 *associé à la valeur propre* λ *non nulle, alors (avec les notations du lemme 1)* $f + \varepsilon g$ *est un vecteur propre de* B' *associé à la valeur propre* $\varepsilon\sqrt{\lambda}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 1$) $\left(\text{où } g = \dfrac{P_2 f}{\| P_2 f \|}\right)$.

En effet

a) Soit t un vecteur propre (donc non nul) de B' associé à la valeur propre non nulle λ. De $B't = \lambda t$, on déduit immédiatement : $P_1 \circ P_2 t = \lambda P_1 t$ et $P_2 \circ P_1 t = \lambda P_2 t$; d'où $P_1 \circ P_2(P_1 t) = \lambda^2 P_1 t$ et $P_2 \circ P_1(P_2 t) = \lambda^2 P_2 t$, ce qui fournit le résultat car $P_1 t$ et $P_2 t$ ne peuvent être nuls (la nullité, par exemple, de $P_1 t$ entraînerait $P_2 t = (\lambda + 1)t$, donc, puisque $\lambda \neq 0$, $\lambda = -1$ et $P_2 t = 0$ ce qui est impossible d'après le lemme 1).

b) $P_1(f + \varepsilon g) = f + \varepsilon P_1 g = (1 + \varepsilon\sqrt{\lambda})f$; $P_2(f + \varepsilon g) = (\sqrt{\lambda} + \varepsilon)g$ d'où $B'(f + \varepsilon g) = \varepsilon\sqrt{\lambda}(f + \varepsilon g)$.

1.2.2. DÉFINITION 2. — *On dit que l'analyse canonique de* H_1 *et* H_2 *est de type dénombrable si le spectre de* A' ($= A_{\overline{H_1 + H_2}}$) *est dénombrable.*

LEMME 5. — *Soit* E *un espace de Hilbert réel,* F *un sous-espace fermé de* E *et* Φ *un homéomorphisme linéaire autoadjoint de* E *sur* E. *Alors si* $\Phi_1 = \Phi_{|F}$, *et si* $\operatorname{Im} \Phi_1 \subset F$, Φ_1 *est un homéomorphisme linéaire de* F *sur* F.

En effet, comme Φ est injective, $\operatorname{Ker} \Phi_1 = \{0\}$. Donc, puisque Φ est autoadjoint, $F = \overline{\operatorname{Im} \Phi_1}$. Comme $\operatorname{Im} \Phi_1$ est l'image réciproque de F par Φ^{-1}, continu, elle est fermée. Il en résulte que Φ_1 est une bijection de F sur F, et que $\Phi_1^{-1} = (\Phi^{-1})_{|F}$. La linéarité et la bicontinuité de Φ_1 sont alors évidentes.

On obtient ainsi une démonstration élémentaire du :

COROLLAIRE. — *Le spectre de* V_1 (resp. V_2) *est contenu dans le spectre de* A'.

En effet, si λ est une valeur régulière de A', $\Phi = A' - \lambda I_{|\overline{H_1 + H_2}}$ est un homéomorphisme linéaire de $E = \overline{H_1 + H_2}$ sur lui-même. Le résultat précédent avec $F = H_1$ montre alors que

$$\Phi_{|H_1} = (A' - \lambda I)_{|H_1} = (A'_{|H_1} - \lambda I_{|H_1}) = V_1 - \lambda I_{|H_1}$$

est un homéomorphisme linéaire de H_1 sur H_1 (puisque $\Phi_{|H_1}(H_1) \subset H_1$), et par suite λ est une valeur régulière de V_1, d'où le résultat.

(On peut retrouver ce corollaire en utilisant la représentation isométrique de $\overline{H_1 + H_2}$ associée à l'analyse spectrale de A.)

Si une analyse est de type dénombrable, le spectre de V_1 (et de V_2) est dénombrable. On sait alors [8] qu'il existe une base orthonormale (dénombrable) de H_1 formée de vecteurs propres de V_1. Soit $\{ \lambda'_n \}_{n \in K^*}$ ($K^* \subset \mathbb{N}^*$) la suite des valeurs propres distinctes et non nulles de V_1, B_1 la base orthonormale de vecteurs propres de V_1 obtenue, et B_1^* le système orthonormal déduit en supprimant les vecteurs de B_1 appartenant au noyau de V_1. Alors l'image B_2^* de B_1^* par P_2 est, après normalisation de chacun des vecteurs, un système orthonormal de H_2. Désignant par H_i^n ($n \in K^*$ et $i = 1, 2$) le sous-espace propre de H_i associé à λ'_n, et H_i^0 le noyau de V_i, on obtient la décomposition en somme directe orthogonale de H_i :

$$H_i = \bigoplus_{n \in K} H_i^n \qquad (K = K^* \cup \{ 0 \})$$

Une analyse canonique de H_1 et H_2 est donc :

$$\mathscr{A} = (X, \mu, \{ H_1^n \}_{n \in K}, \{ H_2^n \}_{n \in K})$$

où μ est la mesure de dénombrement de l'union du spectre ponctuel de V_i et de $\{ 0 \}$, et H_i^n est $H_i(\lambda'_n)$.

On peut remarquer que l'on a ici une véritable décomposition de H_i, et non une représentation isométrique.

Résultant de ce qui précède, il existe une correspondance « privilégiée » notée π_2, entre la base orthonormale de H_1^n extraite de B_1^* et celle de H_2^n extraite de B_2^* (ceci pour chaque n de K^*) définie par :

à f normé de H_1^n, on associe $P_2 f$ de H_2^n puis $g = \pi_2 f = \dfrac{P_2 f}{\| P_2 f \|}$ de H_2^n.

Alors, si $\{ \lambda_i \}_{i \in I^*}$ ($I^* \subset \mathbb{N}^*$) est la suite pleine des valeurs propres de V_1, on peut indicer les éléments de B_1^* et ceux qui leur correspondent par π_2 : $B_1^* = \{ f_i \}_{i \in I^*}$ et $B_2^* = \left\{ g_i = \dfrac{P_2 f_i \|}{\| P_2 f_i \|} \right\}_{i \in I^*}$. Si pour chaque $i \in I^*$, on pose $\rho_i = \sqrt{\lambda_i} = \langle f_i, g_i \rangle$, on a alors « équivalence » entre la donnée de $\mathscr{A}$ et celle du triplet :

$$(\{ \rho_i \}_{i \in I^*}, \{ f_i \}_{i \in I^*} \cup B_1^0, \{ g_i \}_{i \in I^*} \cup B_2^0)$$

où B_i^0 représente une base du noyau de V_i ($i = 1, 2$).

Ce triplet vérifie donc les propriétés :

(i) $\{ f_i \}_{i \in I^*}$ (resp. $\{ g_i \}_{i \in I^*}$) est une base orthonormale de $H_1 \ominus \operatorname{Ker} V_1$ (resp. $H_2 \ominus \operatorname{Ker} V_2$),

(*ii*) pour chaque $i \in \mathrm{I}^*$, $\mathrm{P}_2 f_i = \rho_i g_i$ et $\mathrm{P}_1 g_i = \rho_i f_i$,
(*iii*) pour chaque $(i, j) \in (\mathrm{I}^*)^2$, $\langle f_i, g_j \rangle = \rho_i \delta_{ij}$ (δ_{ij} symbole de Kronecker).

DÉFINITION 3. — *Un tel triplet est encore appelé une analyse canonique de type dénombrable de* H_1 *et* H_2.

Si le sous-espace propre de V_1 correspondant à la valeur propre 1 (i. e. $\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2$) est de dimension infinie, l'analyse canonique de type dénombrable est dite « dégénérée » (un exemple trivial est celui où H_1 est de dimension infinie et contenu dans H_2).

Si tous les sous-espaces propres de V_1 (ou V_2) associés aux valeurs propres non nulles sont de dimension finie, on dit que l'analyse canonique de type dénombrable est « régulière ».

1.3. Analyse canonique compacte

DÉFINITION 4. — *On dit que l'analyse canonique de* H_1 *et* H_2 *est compacte si l'opérateur* A' *de* $\mathscr{L}(\overline{\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2})$ *est compact.*

Comme B' est un opérateur hermitien de $\mathscr{L}(\overline{\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2})$, et que $\mathrm{A}' = \mathrm{B}'^2$ il revient au même de supposer la compacité de B'. Une analyse canonique compacte est, bien entendu, une analyse de type dénombrable et régulière. Son importance est liée à sa fréquente apparition dans les applications.

PROPOSITION 1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{P}_{1|\mathrm{H}_2}$ *(resp.* $\mathrm{P}_{2|\mathrm{H}_1}$*) est un opérateur compact de* $\mathscr{L}(\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_1)$ *(resp.* $\mathscr{L}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$*).*
(ii) V_2 *est un opérateur compact de* $\mathscr{L}(\mathrm{H}_2)$.
(iii) U *est un opérateur compact de* $\mathscr{L}(\mathrm{H})$.
(iv) V_1 *est un opérateur compact de* $\mathscr{L}(\mathrm{H}_1)$.
(v) B' *est un opérateur compact de* $\mathscr{L}(\overline{\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2})$.

De plus elles sont réalisées si A *(ou* B*) est compact dans* $\mathscr{L}(\mathrm{H})$.

(*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*) : la compacité de $\mathrm{P}_{1|\mathrm{H}_2}$ est équivalente à celle de $(\mathrm{P}_{1|\mathrm{H}_2})^* = \mathrm{P}_{2|\mathrm{H}_1}$, et est équivalente à celle de $\mathrm{V}_2 = (\mathrm{P}_{2|\mathrm{H}_1}) \circ (\mathrm{P}_{1|\mathrm{H}_2})$.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) : U est un opérateur borné, et $\mathrm{U}^* \circ \mathrm{U} = \mathrm{P}_2 \circ \mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2 = \mathrm{V}_2 \circ \mathrm{P}_2$ est compact.

Par suite U est compact ([*1*]).

(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*) : en effet la restriction de U à H_1, soit V_1, est alors compacte.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*v*) : soit $\{ \lambda_i \}_{i \in \mathrm{I}^*}$ la suite pleine des valeurs propres non nulles de V_1. Ou bien elle est finie, ou bien elle admet 0 comme valeur d'adhérence.

D'après le lemme 4, $\{ \varepsilon\sqrt{\lambda_i} \}_{i\in I^*}$ fournit les valeurs propres non nulles de B' ; si $\{ f_i \}_{i\in I^*}$ est un système orthonormal de H_1 formé de vecteurs propres f_i de V_1 (f_i associé à λ_i) et si $\{ g_i \}_{i\in I^*}$ est le système orthonormal de H_2 déduit de $\{ f_i \}_{i\in I^*}$ par π_2, alors pour chaque i de I^*, $t_i = \dfrac{f_i + \varepsilon g_i}{\| f_i + \varepsilon g_i \|}$ est un vecteur propre normé associé à $\varepsilon\sqrt{\lambda}$.

Soit f appartenant à $\overline{H_1 + H_2}$ tel que, pour chaque i de I^*, $\langle t_i, f \rangle = 0$. Alors pour chaque i de I^*, $\langle f_i, f \rangle = \langle g_i, f \rangle = 0$, soit encore :

$$\langle f_i, P_1 f \rangle = \langle g_i, P_2 f \rangle = 0 .$$

Par suite $P_1 f$ (resp. $P_2 f$) appartient à Ker V_1 (resp. Ker V_2), d'où : $P_2 \circ P_1 f = P_1 \circ P_2 f = 0$ (lemme 1). Il vient donc, en vertu de $B'^2 f = A' f = P_2 \circ P_1 f + P_1 \circ P_2 f - B' f$:

$$(B' + I_{|\overline{H_1+H_2}})(B' f) = (P_1 + P_2)_{|\overline{H_1+H_2}}(B' f) = 0 ,$$

d'où : $B' f \in \overline{H_1 + H_2} \cap \{ \overline{H_1 + H_2} \}^{\perp} = \{ 0 \}$, et la compacité de B' ([*21*]).

(v) $\Rightarrow$ (i) : en effet $P_{1|H_2} = B'_{|H_2}$.

Remarque 1. — Si $B' = (P_1 + P_2 - I)_{|\overline{H_1+H_2}}$ est compact , alors $(I - B')(\overline{H_1 + H_2})$ est fermée dans $\overline{H_1 + H_2}$ ([*1*]).

Donc $(P_1 + P_2)_{|\overline{H_1+H_2}}\ (\overline{H_1 + H_2})$ est fermée dans $(\overline{H_1 + H_2})$.

Comme le noyau de $(P_1 + P_2)_{|\overline{H_1+H_2}}$ est $\{ 0 \}$ (d'après le lemme 1), $(P_1 + P_2)_{|\overline{H_1+H_2}}$ est injective, et : Im $(P_1 + P_2)_{|\overline{H_1+H_2}}$ est égal à $\overline{H_1 + H_2}$. Comme Im $(P_1 + P_2)_{\overline{H_1+H_2}}$ est contenu dans $H_1 + H_2$, $H_1 + H_2$ est fermé dans H (cela constitue une condition nécessaire pour qu'une analyse canonique soit compacte).

Remarque 2. — La compacité de A (ou B — ce qui revient au même —) entraîne bien sûr la compacité des opérateurs de la proposition 1. La réciproque n'est pas vraie en général : en particulier le sous-espace propre de B correspondant à la valeur -1 est $(\overline{H_1 + H_2})^{\perp}$, qui n'est pas en général de dimension finie.

Un exemple simple d'analyse canonique compacte est obtenue en considérant le cas où l'un des H_i est de dimension finie, puisque P_i, donc U, est alors compact.

Conformément à ce qui a été vu au 1.2, si A' est compact, on peut adopter la deuxième formulation pour une analyse canonique. Avec les notations de la proposition 1, une analyse canonique de H_1 et H_2 est :

$$(\{ \rho_i \}_{i\in I^*}, \{ f_i \}_{i\in I_1}, \{ g_i \}_{i\in I_2})$$

où $\{ f_i \}_{i\in I_1 - I^*}$ (resp. $\{ g_i \}_{i\in I_2 - I^*}$) est une base de Ker V_1 (resp. Ker V_2), et $\rho_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Il est clair qu'une telle analyse n'est pas unique. Elle le devient cependant si $H_1 \cap H_2^{\perp} = H_1^{\perp} \cap H_2 = \{ 0 \}$, et si la suite $\{ \rho_i \}_{i \in I^*}$ est strictement décroissante.

Lors de l'étude d'une analyse canonique compacte de H_1 et H_2, on rangera systématiquement les valeurs propres par ordre décroissant.

PROPOSITION 2. — *Toute analyse canonique compacte* $(\{ \rho_i \}_{i \in I^*}, \{ f_i \}_{i \in I_1}, \{ g_i \}_{i \in I_2})$ *vérifie les propriétés :*

i) $\forall (i, j) \in (I_1)^2 \quad \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$

$\forall (i, j) \in (I_2)^2 \quad \langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij}$

ii) $\forall (i, j) \in (I^*)^2 \quad \langle f_i, g_j \rangle = \rho_i \delta_{ij}, \qquad P_1 f_i = \rho_i g_i$

$P_2 g_i = \rho_i f_i$

$$\forall i \in I_1 - I^*, \quad \forall j \in I_2 \quad \langle f_i, g_j \rangle = 0$$
$$\forall i \in I_1, \quad \forall j \in I_2 - I^* \quad \langle f_i, g_j \rangle = 0$$

iii) $\forall i \in I^*$,

$$\rho_i = \sup \left\{ \frac{\langle f, g \rangle}{\| f \| \cdot \| g \|} ; \begin{array}{l} f \in H_1, \ g \in H_2 \\ et \quad \langle f, f_j \rangle = \langle g, g_j \rangle = 0 \qquad \forall j < i, j \in I^* \end{array} \right\}$$

(i) exprime que $(f_i)_{i \in I_1}$ et $(g_i)_{i \in I_2}$ sont des systèmes orthonormaux de H_1 et H_2 respectivement. La première partie de (ii) est vraie puisque l'analyse canonique est de type dénombrable. La suite de (ii) vient de ce que :

$$\forall i \in I_1 - I^* \qquad f_i \in \operatorname{Ker} V_1 = H_1 \cap H_2^{\perp}$$

et

$$\forall i \in I_2 - I^* \qquad g_i \in \operatorname{Ker} V_2 = H_2 \cap H_1^{\perp} .$$

(iii) V_1 étant compact, on a (par exemple [7])

$$\lambda_i = \rho_i^2 = \sup \left\{ \frac{\langle V_1 f, f \rangle}{\| f \|^2} ; f \in H_1, \quad \text{et} \quad \langle f, f_j \rangle = 0 \qquad \forall j < i, j \in I^* \right\} .$$

Or, pour $f \in H_1$, $g \in H_2$, $\| f \| = \| g \| = 1$, $\langle f, f_j \rangle = \langle g, g_j \rangle = 0$ pour $j < i$, le maximum de $\langle f, g \rangle = \langle P_2 f, g \rangle$ est atteint pour $g = \dfrac{P_2 f}{\| P_2 f \|}$, et vaut alors :

$$\sup_f \left\{ \frac{\langle f, P_2 f \rangle}{\| P_2 f \|} = \| P_2 f \| = \sqrt{\langle f, P_1 \circ P_2 f \rangle}, \quad \text{pour} \quad f \in H_1, \| f \| = 1, \right.$$
$$\left. \langle f, f_j \rangle = 0 \qquad \forall j < i \text{ et } j \in I^* \right\} = \sqrt{\lambda_i} = \rho_i .$$

On peut remarquer que si, pour $j = 1, 2$, les H_j^n sont les sous-espaces propres de V_i associé à λ'_n ($n \in K^*$), où $\{ \lambda'_n \}$ est la suite strictement décroissante des valeurs propres de V_1 (et V_2), et si H_j^0 est le noyau de V_j, alors on a comme analyse canonique au sens de la définition 1 :

$$(\{ \lambda'_n \}_{n\in K^*}, \mu, \{ H_1^n \}_{n\in K}, \{ H_2^n \}_{n\in K}) \qquad \mu \text{ mesure de dénombrement de } \{ \lambda'_n \}_{n\in K^*}$$

et

$$V_j = \sum_{n\in K^*} \lambda'_n P_{H_j^n} \qquad (\text{où } P_{H_j^n} \text{ est le projecteur orthogonal sur } H_j^n).$$

Présentée sous cette forme, on a bien sûr unicité de l'analyse canonique.

Si, inversement, H_1 et H_2 admettent une analyse canonique de la forme :

$$(\Lambda = \{ \lambda'_n \}_{n\in K^*}, \mu, \{ H_1^n \}_{n\in K}, \{ H_2^n \}_{n\in K})$$

où la suite $\{ \lambda'_n \}$ est strictement décroissante, finie ou admettant 0 comme valeur d'adhérence, μ mesure de dénombrement de Λ, les H_1^n étant de dimension finie et deux à deux orthogonaux, tels que $V_1 = \sum_{n\in K^*} \lambda'_n P_{H_1^n}$, et $\pi_2(H_1^n) = H_2^n$ ($n \in K^*$) alors l'analyse est compacte (cf. par exemple [*12*]).

Dans ce qui précède, l'analyse canonique, si elle est compacte, a été obtenue par l'analyse spectrale de V_1. Il est clair qu'elle s'obtient aussi à partir de V_2. Elle peut enfin, d'après le lemme 4, être obtenue par l'analyse spectrale de B'. D'où la :

PROPOSITION 3. — *L'analyse canonique de* H_1 *et* H_2, *si elle est compacte, s'obtient par l'analyse spectrale de l'un des opérateurs suivants :*

(i) $P_{1|H_2}$ (*ou* $P_{2|H_1}$), (ii) $V_1 = P_1 \circ P_{2|H_1}$, (iii) $V_2 = P_2 \circ P_{1|H_2}$, (iv) $B' = (P_1 + P_2 - I)_{|H_1 + H_2}$.

On peut expliciter le dernier point. Soit $\{ \rho_i \}_{i\in I^*}$ la suite pleine des valeurs propres strictement positives de B', et $\{ t_i \}_{i\in I^*}$ une suite orthonormale de vecteurs propres associés.

$$\begin{aligned}\langle P_1 t_i, P_2 t_i \rangle &= \langle P_2 \circ P_1 t_i, t_i \rangle = \rho_i \langle P_2 t_i, t_i \rangle = \rho_i \| P_2 t_i \|^2 \\ &= \langle t_i, P_1 \circ P_2 t_i \rangle = \rho_i \langle t_i, P_1 t_i \rangle = \rho_i \| P_1 t_i \|^2\end{aligned}$$

Donc $\| P_1 t_i \| = \| P_2 t_i \|$, et par suite, comme $P_1 t_i + P_2 t_i = (1 + \rho_i) t_i$:

$$(1 + \rho_i)^2 = \| P_1 t_i \|^2 + \| P_2 t_i \|^2 + 2 \langle P_1 t_i, P_2 t_i \rangle = 2(1 + \rho_i) \| P_1 t_i \|^2 ;$$

$$\| P_1 t_i \| = \sqrt{\frac{1 + \rho_i}{2}}.$$

Il vient également :

$$\left\langle \frac{P_1 t_i}{\| P_1 t_i \|}, \frac{P_2 t_i}{\| P_2 t_i \|} \right\rangle = \rho_i$$

Si $f_i = \dfrac{P_1 t_i}{\| P_1 t_i \|}$, alors $g_i = \dfrac{P_2 f_i}{\| P_2 f_i \|} = \dfrac{P_2 \circ P_1 t_i}{\| P_2 \circ P_1 t_i \|} = \dfrac{\rho_i P_2 t_i}{\| \rho_i P_2 t_i \|} = \dfrac{P_2 t_i}{\| P_2 t_i \|}$

Par ailleurs, pour $i \neq j$:

$$\langle P_1 t_i + P_2 t_i, t_j \rangle = (1 + \rho_i) \langle t_i, t_j \rangle = 0$$

d'où :

$$\langle P_1 t_i, t_j \rangle = - \langle P_2 t_i, t_j \rangle .$$

De plus :

$$\begin{aligned} \langle P_1 t_i, P_2 t_j \rangle &= \langle P_2 \circ P_1 t_i, t_j \rangle = \rho_i \langle P_2 t_i, t_j \rangle = - \rho_i \langle P_1 t_i, t_j \rangle \\ &= \langle t_i, P_1 \circ P_2 t_j \rangle = \rho_j \langle t_i, P_1 t_j \rangle = \quad \rho_j \langle P_1 t_i, t_j \rangle \end{aligned}$$

d'où :

$$(\rho_i + \rho_j) \langle P_1 t_i, t_j \rangle = 0$$

et par conséquent :

$$\langle P_1 t_i, t_j \rangle = \langle P_2 t_i, t_j \rangle = \langle P_1 t_i, P_2 t_j \rangle = 0 \qquad (i \neq j)$$

On retrouve donc :

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij}$$

et

$$\langle f_i, g_j \rangle = \rho_i \delta_{ij}$$

PROPOSITION 4. — *Si* H_1 *et* H_2 *admettent une analyse canonique compacte, et si* H'_1 *et* H'_2 *sont des sous-espaces fermés de* H_1 *et* H_2 *respectivement, il existe une analyse canonique compacte de* H'_1 *et* H'_2.

En effet, $U = P_1 \circ P_2$ est alors compact, donc $U' = P'_1 \circ P'_2 = P'_1 \circ P_1 \circ P_2 \circ P'_2$ est compact, d'où le résultat.

On dit qu'une suite $(H'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces fermés de H converge vers H', sous-espace fermé de H, si et seulement si la suite $(P'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des projecteurs orthogonaux sur H'_n converge en norme vers P', projecteur orthogonal sur H' (cf. [*17*]).

PROPOSITION 5. — *Si pour* $j = 1, 2$ *la suite* $(H^n_j)_{n \in \mathbb{N}}$ *de sous-espaces fermés de* H *converge vers* H_j, *et si, pour tout n,* H^n_1 *et* H^n_2 *admettent une analyse canonique compacte, alors* H_1 *et* H_2 *admettent une analyse canonique compacte.*

En effet, $U_n = P^n_1 \circ P^n_2$ converge dans $\mathscr{L}(H)$ vers $U = P_1 \circ P_2$.

Comme, pour tout n, U_n est compact, U l'est également, d'où le résultat.

En pratique, on est souvent conduit à des analyses canoniques compactes possédant des propriétés supplémentaires sur les ρ_i, valeurs propres positives de B'.

DÉFINITION 5. — *On dit que l'analyse canonique de* H_1 *et* H_2 *est de type* 1 *ou nucléaire (resp. de type* 2 *ou de Hilbert-Schmidt ; resp. de type* 3*) si* B' *est un opérateur compact nucléaire (resp. de Hilbert-Schmidt ; resp. tel que* $\sum_i \rho_i^4 < +\infty\Big)$.

Il est clair que dire que l'analyse canonique est de type 2 (resp. de type 3) revient à dire que les opérateurs V_1 et V_2 sont nucléaires (resp. de Hilbert-Schmidt).

Remarque 3. — Dans ces cas, on peut ramener leur étude à celle, classique, d'un noyau.

Si H_1 (par exemple) est un espace $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, où μ est σ-finie, alors l'analyse canonique est de type j ($j = 1, 2, 3$) si, et seulement si, il existe $K_1 \in L^2(\Omega^2, \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}, \mu \otimes \mu)$ tel que :

$$V_1 : f \in H_1 \to g = V_1 f \; ; \qquad g(t) = \int K_1(s, t) f(s) d\mu(s) \qquad \mu \text{ p. p.}$$

En effet V_1 (donc V_2) est alors un opérateur de Hilbert-Schmidt, et le résultat découle de [*19*]. Cette représentation de V_1 reste valable si H_1 est isométrique à un espace $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

On peut expliciter $K_1(s, t)$ à partir de l'analyse canonique

$$(\{\rho_i\}_{i \in I^*}, \{f_i\}_{i \in I_1}, \{g_i\}_{i \in I_2})$$

de (H_1, H_2). Il vient, d'après [*8*] :

$$K_1(s, t) = \sum_{i \in I^*} \rho_i^2 f_i(s) f_i(t).$$

Remarque 4. — Si H est (représenté isométriquement par) $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, H_i ($i = 1, 2$) étant (représenté par) le sous-espace $L^2(\Omega, \mathscr{B}_i, \mu)$, où $\mathscr{B}_i$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$, et si l'analyse canonique de (H_1, H_2) est de type 1 ou 2, l'opérateur de Hilbert-Schmidt $P_{1|H_2}$ est (représenté par) un opérateur intégral de noyau $R(s, t)$, de carré intégrable par rapport à $\mu \otimes \mu$ ([*19*]), et tel que :

$$R(s, t) = \sum_{i \in I^*} \rho_i f_i(s) g_i(t).$$

Il vient alors :

$$\int_{\Omega \times \Omega} [R(s, t)]^2 d\mu(s) d\mu(t) = \sum_{i \in I^*} \rho_i^2 ,$$

et

$$K_1(s, t) = \int_\Omega R(s, u) R(t, u) d\mu(u).$$

2. QUELQUES APPLICATIONS A LA STATISTIQUE ET AU CALCUL DES PROBABILITÉS

Si $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé, $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ (ou L^2) désigne l'espace de Hilbert réel, supposé séparable, des classes d'équivalence de fonctions réelles $\mathscr{A}$-mesurables définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et de carré P-intégrable. Le produit scalaire est celui défini comme d'ordinaire par :

Pour tout $f \in L^2$ et tout $g \in L^2$: $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f g dP$.

On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

Si $\mathscr{B}$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$, $L^2(\mathscr{B})$ désigne le sous-espace de L^2 formé des (classes d'équivalence de) v. a. $\tilde{\mathscr{B}}$-mesurables (où $\tilde{\mathscr{B}}$ est la tribu P-complétée de $\mathscr{B}$).

2.1. Analyse canonique linéaire

2.1.1. Cas de variables aléatoires.

Pour $j = 1, 2$, $X_j = (X_j^1, X_j^2, \ldots, X_j^{p_j})$ est défini sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$; p_j appartient à $\mathbb{N}^*$, et pour $k = 1, \ldots, p_j$, X_j^k est une v. a. r. de L^2 ; on note F_{X_j} le sous-espace vectoriel engendré par 1_Ω et $\{ X_j^k \}_{k=1,\ldots,p_j}$. Ce sous-espace est de dimension finie, donc fermé dans L^2, et le projecteur orthogonal sur F_{X_j} est compact.

DÉFINITION 6. — *On appelle analyse canonique, linéaire du couple* (X_1, X_2) *toute analyse canonique de* F_{X_1} *et* F_{X_2}.

Une telle analyse, qui est bien sûr compacte, peut être obtenue par étude spectrale de l'un quelconque des opérateurs définis en 1.3 et possède les propriétés indiquées dans la proposition 2. On obtient ainsi une analyse :

$$(\{ \rho_i \}_{i \in I^*}, \{ f_i \}_{i \in I_1}, \{ g_i \}_{i \in I_2})$$

où I^* peut être considéré comme une section commençante $[0, n]$ de $\mathbb{N}^*$. Il est clair que $\rho_0 = 1$ et que l'on peut choisir $f_0 = g_0 = 1_\Omega$. Pour $i \neq 0$, f_i et g_i sont alors des v. a. centrées de L^2, et ρ_i est le coefficient de corrélation linéaire de f_i et g_i ; f_i (resp. g_i) est une combinaison linéaire des X_1^k (resp. X_2^l) (d'où le nom d'analyse canonique « linéaire »). On obtient ainsi une nouvelle solution, globale, du problème étudié par Hotelling, exposé par exemple dans [2], repris en particulier — et résolu de manière encore différente — par [*10*].

Le problème d'Hotelling peut être décrit, avec le vocabulaire adopté ici, de la manière suivante : soit $f_0 = g_0 = 1_\Omega$, $S_1 = F_{X_1} \ominus \text{vect}(f_0)$ et

$T_1 = F_{X_2} \ominus \mathrm{vect}\,(g_0)$. On cherche $(f_1, g_1) \in S_1 \times T_1$, vérifiant $\| f_1 \| = \| g_1 \| = 1$, tel que $\langle f_1, g_1 \rangle$ soit maximum (autrement dit, on cherche la combinaison linéaire centrée normée des X_1^k et la combinaison linéaire centrée normée des X_2^l de corrélation maximale). Dans une deuxième étape, on cherche $(f_2, g_2) \in S_2 \times T_2$ — avec $S_2 = F_{X_1} \ominus \mathrm{vect}\,(f_0, f_1)$, $T_2 = F_{X_2} \ominus \mathrm{vect}\,(g_0, g_1)$, — vérifiant $\| f_2 \| = \| g_2 \| = 1$ et rendant $\langle f_2, g_2 \rangle$ maximum. On itère ainsi le procédé — toujours sous contraintes d'orthogonalité — aussi loin que possible. Ainsi décrite l'analyse canonique linéaire est une méthode « pas à pas ».

2.1.2. Cas de variables statistiques.

On vérifie aisément que l'analyse canonique au sens de l'analyse des données, exposée par exemple dans [*5*], entre dans le cadre indiqué ici. On peut la considérer comme cas particulier de 2.1.1, Ω étant alors un ensemble fini, et $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ étant en conséquence de dimension finie. La présentation et le langage utilisés ici ont permis d'obtenir divers résultats complémentaires concernant l'analyse canonique et l'analyse en composantes principales ([*15*]). Dans un autre domaine de l'analyse des données, ils ont pu servir à la mise au point de techniques originales ([*3*]).

2.2. Analyse canonique de deux tribus

Soit, pour $j = 1, 2$, $\mathscr{B}_j$ une sous-tribu complète de $\mathscr{A}$. $L^2(\mathscr{B}_j)$ est alors un sous-espace fermé de $L^2(\mathscr{B}_j$ complète au sens de [*14*.1]).

Définition 7. — *On appelle analyse canonique de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, toute analyse canonique des sous-espaces $L^2(\mathscr{B}_1)$ et $L^2(\mathscr{B}_2)$ de L^2.*

Si $E^{\mathscr{B}_j}$ désigne l'opérateur « espérance conditionnelle à $\mathscr{B}_j$ », donc le projecteur orthogonal sur $L^2(\mathscr{B}_j)$, rechercher une analyse canonique de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ revient à faire l'étude spectrale de $E^{\mathscr{B}_1} \circ E^{\mathscr{B}_2}/L^2(\mathscr{B}_1)$ (ou encore $E^{\mathscr{B}_2} \circ E^{\mathscr{B}_1}/L^2(\mathscr{B}_2)$). Une telle analyse n'a d'intérêt, au niveau des applications immédiates, que si elle est de type dénombrable. Elle est dégénérée si $L^2(\mathscr{B}_1) \cap L^2(\mathscr{B}_2) = (L^2(\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2))$ est de dimension infinie.

Si l'analyse est compacte, elle peut donc être obtenue par l'analyse spectrale de l'un quelconque des opérateurs $E^{\mathscr{B}_1}/L^2(\mathscr{B}_2)$ (ou $E^{\mathscr{B}_2}/L^2(\mathscr{B}_1)$), $E^{\mathscr{B}_1} \circ E^{\mathscr{B}_2}/L^2(\mathscr{B}_1)$, $E^{\mathscr{B}_2} \circ E^{\mathscr{B}_1}/L^2(\mathscr{B}_2)$ et $(E^{\mathscr{B}_1} + E^{\mathscr{B}_2} - I)/L^2(\mathscr{B}_1) + L^2(\mathscr{B}_2))$. On obtient alors une analyse de la forme :

$$(\{ \rho_i \}_{i \in I^*}, \{ f_i \}_{i \in I_1}, \{ g_i \}_{i \in I_2})$$

où I^* peut être considéré suivant les cas, soit comme une section commençante $[0, n]$ de $\mathbb{N}$, soit comme $\mathbb{N}$. On peut noter que l'on a toujours $\rho_0 = 1$

et qu'on peut prendre $f_0 = g_0 = 1_\Omega$, ce choix étant impératif (resp. commode) si $L^2(\mathscr{B}_1) \cap L^2(\mathscr{B}_2)$ est de dimension 1 (resp. de dimension > 1). Alors pour tout i de $I_1 - \{0\}$ (resp. de $I_2 - \{0\}$), f_i (resp. g_i) est une v. a. r. centrée, et, pour tout i de $I^* - \{0\}$, ρ_i est le coefficient de corrélation de f_i et g_i.

DÉFINITION 8. — *Pour i appartenant à* $I^* - \{0\}$, ρ_i *(resp.* (f_i, g_i)*) est appelé ième coefficient de corrélation canonique (resp. couple canonique) de* $\mathscr{B}_1$ *et* $\mathscr{B}_2$ *;* ρ_1 *est dit coefficient de corrélation maximale.*

Il vient alors :

$\mathscr{B}_1$ *et* $\mathscr{B}_2$ *sont indépendantes si et seulement si leur analyse canonique est compacte, et si leur coefficient de corrélation maximale est nul.*

En effet, si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont indépendantes, les sous-espaces $(L^2(\mathscr{B}_1))^*$ et $(L^2(\mathscr{B}_2))^*$ des v. a. centrées de $L^2(\mathscr{B}_1)$ et $L^2(\mathscr{B}_2)$ respectivement sont orthogonaux. Par conséquent, $\dim L^2(\mathscr{B}_1) \cap L^2(\mathscr{B}_2) = 1$,

$$E^{\mathscr{B}_1} \circ E^{\mathscr{B}_2}/L^2(\mathscr{B}_1) = E^{\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2}/L^2(\mathscr{B}_1)$$

est compact, et le seul coefficient de corrélation canonique non nul est alors ρ_0. Inversement, si l'analyse canonique est compacte, et si $\rho_1 = 0$, on a :

$$\forall B_1 \in \mathscr{B}_1 \quad \text{et} \quad \forall B_2 \in \mathscr{B}_2,$$
$$0 = E[(1_{B_1} - P(B_1))(1_{B_2} - P(B_2))] = P(B_1 \cap B_2) - P(B_1)P(B_2),$$

et $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont indépendantes.

Comme application immédiate des propositions 4 et 5 de 1.3, il vient :

PROPOSITION 6. — *Si, pour* $j = 1, 2$, $\mathscr{B}_j'$ *est une sous-tribu complète de* $\mathscr{B}_j$, *et si* $(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ *admet une analyse compacte, le couple* $(\mathscr{B}_1', \mathscr{B}_2')$ *admet une analyse canonique compacte.*

PROPOSITION 7. — *Si, pour* $j = 1, 2$, $\{\mathscr{B}_j^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est une suite de sous-tribus complètes de* $\mathscr{A}$ *qui converge uniformément* (*) *vers la tribu* $\mathscr{B}_j^\infty$, *et si, pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathscr{B}_1^n, \mathscr{B}_2^n)$ *admet une analyse compacte, il en est de même pour* $(\mathscr{B}_1^\infty, \mathscr{B}_2^\infty)$.

On peut remarquer de plus que si, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$(\{\rho_i^n\}_{i \in I^*}, \{f_i^n\}_{i \in I_1}, \{g_i^n\}_{i \in I_2})$$

(*) Autrement dit $\{E^{\mathscr{B}_j^n}\}$ converge vers $E^{\mathscr{B}_j^\infty}$ dans $\mathscr{L}(L^2)$.

représente l'analyse compacte de (B_1^n, B_2^n), [17] montre que ρ_i^n converge vers ρ_i^∞, et que, si $(\rho_i^n)^2$ est valeur propre simple de $E^{\mathscr{B}_1^n} \circ E^{\mathscr{B}_2^n}$, f_i^n converge vers f_i^∞.

L'analyse canonique de deux tribus a été introduite en [6.1] sous une forme un peu différente. Outre son intérêt théorique, elle débouche de façon naturelle sur l'analyse canonique non-linéaire de deux variables aléatoires quelconques.

2.3. **Analyse canonique non linéaire de deux variables aléatoires.**

2.3.1. Pour $j = 1, 2$, X_j désigne une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(\Omega_j, \mathscr{A}_j)$.

DÉFINITION 9. — *On appelle analyse canonique du couple* (X_1, X_2), *toute analyse canonique des tribus* $\mathscr{B}_1$ *et* $\mathscr{B}_2$, *où, pour* $j = 1, 2$ $\mathscr{B}_j$ *est la tribu complétée de* $X_j^{-1}(\mathscr{A}_j)$.

On a immédiatement :

PROPOSITION 8. — *Si, pour* $j = 1, 2$, X'_j *est égal à* $f_j \circ X_j$, *où* f_j *est une application bijective bimesurable de* $(\Omega_j, \mathscr{A}_j)$ *sur l'espace mesurable* $(\Omega'_j, \mathscr{A}'_j)$, *toute analyse canonique de* (X'_1, X'_2) *est une analyse canonique de* (X_1, X_2) *et inversement.*

Là encore, au niveau des applications, c'est le plus souvent la notion d'analyse compacte, et même de Hilbert-Schmidt, qui est rencontrée. Conformément à ce qui est dit en 1.3 (Remarque 3), une analyse canonique de (X_1, X_2) est de Hilbert-Schmidt si et seulement si $V_1 = E^{X_1} \circ E^{X_2}/L^2(\mathscr{B}_1)$ est un opérateur intégral dont le noyau est $\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$-mesurable et de carré $P^{\otimes 2}$-intégrable. On peut donner une condition suffisante simple rencontrée fréquemment en pratique, assurant que l'analyse canonique est de Hilbert-Schmidt. (Cette condition a été donnée dans le cas réel par Lancaster). P_{X_j} (resp. $P_{(X_1,X_2)}$) désigne la probabilité image de P par X_j (resp. (X_1, X_2)).

PROPOSITION 9. — *Si* $P_{(X_1,X_2)}$ *est absolument continue par rapport à* $P_{X_1} \otimes P_{X_2}$, *et si*

$$f = \frac{dP_{(X_1,X_2)}}{d(P_{X_1} \otimes P_{X_2})}$$

appartient à $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2, P_{X_1} \otimes P_{X_2})$, *le couple* (X_1, X_2) *admet une analyse canonique de type* 2.

Sous les hypothèses indiquées, l'explicitation de V_1, conduit à : si $\phi \circ X_1 \in L^2(\mathscr{B}_1)$,

$$E^{X_2}(\phi \circ X_1) = \psi \circ X_2, \quad \text{avec} \quad \psi : x_2 \in \Omega_2 \to \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\phi(x_1)dP_{X_1}(x_1)$$

$$E^{X_1}(\psi \circ X_2) = \Phi \circ X_1, \quad \text{avec} \quad \Phi : y_1 \in \Omega_1 \to \int_{\Omega_2} f(y_1, x_2)\psi(x_2)dP_{X_2}(x_2)$$

D'où, si i est l'isométrie de $L^2(\Omega_1, \mathscr{A}_1, P_{X_1})$ sur $L^2(\Omega, \mathscr{B}_1, P)$ qui à ϕ associe $\phi \circ X_1$, et si V est l'application de $L^2(\Omega_1, \mathscr{A}_1, P_{X_1})$ dans lui-même qui à φ associe $\Phi = V\varphi$ défini ci-dessus, on a

$$V_1 = i \circ V \circ i^{-1} .$$

Or V est le produit de deux opérateurs intégraux, de noyau f. Comme f appartient à $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2, P_{X_1} \otimes P_{X_2})$, ces opérateurs sont de Hilbert-Schmidt. Donc V est nucléaire, ainsi que V_1.

L'analyse canonique non linéaire de deux v. a., présentée comme cas particulier d'analyse canonique de deux tribus, se trouve dans [*6.*1]. Simultanément, elle a été envisagée dans une optique différente, uniquement pour le cas de v. a. réelles et sous les hypothèses de Lancaster, dans [*11*], puis dans [*18*].

La proposition 8 montre que la notion intrinsèque pour l'analyse non linéaire de deux v. a. est celle d'analyse canonique de tribus.

Cela se retrouve d'ailleurs « naturellement » si l'on cherche à introduire l'analyse canonique non linéaire de deux v. a. en utilisant une méthode « pas à pas » analogue à celle d'Hotelling pour l'analyse canonique linéaire : on peut commencer par poser $f_0 = g_0 = 1_\Omega$, $\rho_0 = 1$.

On cherche alors un couple, s'il en existe $(f_1 = \phi_1 \circ X_1, g_1 = \psi_1 \circ X_2)$, où f_1 (resp. g_1) est une fonction réelle mesurable centrée de X_1 (resp. X_2), tel que $\| f_1 \| = \| g_1 \| = 1$, et de corrélation maximale. Si un tel couple existe, on répète la recherche de couples analogues sous les contraintes d'orthogonalité indiquées plus haut, et ainsi de suite autant que possible. Il est alors clair que les couples (f_i, g_i), lorsqu'ils existent, appartiennent à $L^2(\mathscr{B}_1) \times L^2(\mathscr{B}_2)$.

On peut remarquer que ρ_1 n'est autre ici que le coefficient de corrélation maximale de X_1 et X_2 au sens introduit par [*16*].

PROPOSITION 10. — *Si* (X_1, X_2) *admet une analyse canonique compacte,* *et si, pour* $j = 1, 2$, f_j *est une application mesurable de* $(\Omega_j, \mathscr{A}_j)$ *dans* $(\Omega'_j, \mathscr{A}'_j)$, $(f_1 \circ X_1, f_2 \circ X_2)$ *admet une analyse canonique compacte.*

C'est un corollaire, immédiat compte tenu des définitions, de la proposition 6.

2.3.2. Analyse des correspondances.

Un cas particulier intéressant d'analyse canonique de deux tribus est celui où les tribus $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ engendrées par les v. a. X_1 et X_2 n'ont qu'un nombre fini d'éléments. Alors, pour $j = 1, 2$, $\mathscr{B}_j$ est engendrée par une partition $\{ B_j^k \}_{k=1,2,\dots,p_j}$ de Ω, et $L^2(\mathscr{B}_j)$, qui est de dimension finie, peut encore être considéré comme le sous-espace vectoriel F_j engendré par les v. a. r. $\{ 1_{B_j^k} \}_{k=1,\dots,p_j}$ (sous-espace qui contient bien sûr 1_Ω).

Il est clair qu'ici la notion d'analyse canonique non linéaire de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et celle d'analyse canonique linéaire de

$$Y_1 = (1_{B_1^1} \dots 1_{B_1^{p_1}}) \qquad \text{et} \qquad Y_2 = (1_{B_2^1} \dots 1_{B_2^{p_2}})$$

coïncident.

On obtient une analyse compacte, dont on a vu plus haut les propriétés. On est évidemment dans le cadre de la proposition 9, la densité f étant ici $\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}p_{\cdot j}}$, où $p_{ij} = P[B_1^i \cap B_2^j]$, $p_{i\cdot} = P[B_1^i]$, $p_{\cdot j} = P[B_2^j]$.

Si $(\{ \rho_k \}_{k\in I^*}, \{ f_k \}_{k\in I_1}, \{ g_k \}_{k\in I_2})$ est l'analyse canonique de X_1 et X_2, il vient, d'après la remarque 4 de 1.3 (R étant ici f) :

$$\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}p_{\cdot j}} = \sum_{k\in I^*} \rho_k f_k(i) g_k(j),$$

où $f_k(i)$ [resp. $g_k(j)$] désigne la valeur prise par f_k sur B_1^i (resp. g_k sur B_2^j).

L'application « naturelle » à la statistique descriptive est la suivante : si X_1 et X_2 sont deux variables statistiques « qualitatives » (i. e. à valeurs dans un ensemble fini E_i ($i = 1, 2$) dont les éléments sont appelés « modalités ») observées sur un échantillon I de taille n d'une population donnée, on peut les considérer comme deux variables aléatoires définies sur $(I, \mathscr{P}(I), P)$ (où $\mathscr{P}(I)$ est la tribu des parties de l'ensemble fini I, et P l'équiprobabilité sur $\mathscr{P}(I)$), et à valeurs dans $(E_i, \mathscr{P}(E_i))$ ($i = 1, 2$). L'analyse canonique (non linéaire) de X_1 et X_2, qui entre dans le cadre ci-dessus, conduit à l'analyse canonique linéaire des deux ensembles d' « indicatrices des modalités » Y_1 et Y_2. On reconnaît là l'analyse des correspondances, présentée dans une approche différente par [*4*].

Quant à l'analyse des correspondances continues, introduite dans [*13*] comme une généralisation du cas précédent, elle apparaît ici comme un cas particulier d'analyse canonique d'un couple (X_1, X_2) de variables aléatoires : il s'agit d'un couple de deux v. a. réelles, dont la probabilité image $P_{(X_1,X_2)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $[0, 1]^2$, et pour lequel les hypothèses de la proposition 9 sont supposées vérifiées, ce qui conduit à une analyse compacte de type 2.

2.4. Analyse canonique d'une probabilité sur un espace produit

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et $Z = (X_1, X_2)$ un couple de v. a. définies sur cet espace ; pour $i = 1, 2$, X_i est à valeurs dans $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$. Z est donc à valeurs dans $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$. On désigne par $\mathscr{B}_i$ la sous-tribu complétée de $\mathscr{A}$ engendrée par X_i, par P_{X_i} la probabilité image de P par X_i, et par P_Z la probabilité image de P par Z.

$L^2(\Omega_1, \mathscr{A}_1, P_{X_1})$ [resp. $L^2(\Omega_2, \mathscr{A}_2, P_{X_2})$] est isométrique à

$$L^2[\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \times \Omega_2, P_Z] \qquad (\text{resp. } L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \Omega_1 \times \mathscr{A}_2, P_Z))\,;$$

on l'identifie donc à ce sous-espace, noté $L^2(\mathscr{A}_1)$ (resp. $L^2(\mathscr{A}_2)$) de $L^2[\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2, P_Z]$.

Par définition, l'analyse canonique de Z est celle des sous-espaces $L^2(\mathscr{B}_1)$ et $L^2(\mathscr{B}_2)$ de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Or l'application de $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2, P_Z)$ dans $L^2[\Omega, \mathscr{A}, P]$:

$$f \to f \circ Z$$

est une isométrie transformant $L^2(\mathscr{A}_i)$ en $L^2(\mathscr{B}_i)$ $(i = 1, 2)$.

Si $(\{\rho_i\}_{i\in I^*}, \{f_i\}_{i\in I_1}, \{g_i\}_{i\in I_2})$ est une analyse canonique dénombrable de $L^2(\mathscr{B}_1)$ et $L^2(\mathscr{B}_2)$, $L^2(\mathscr{A}_1)$ et $L^2(\mathscr{A}_2)$ admettent donc l'analyse canonique $(\{\rho_i\}_{i\in I^*}, \{\phi_i\}_{i\in I_1}, \{\psi_i\}_{i\in I_2})$, appelée image de la précédente par Z, où :

$$f_i = \phi_i \circ X_1 \qquad g_i = \psi_i \circ X_2 \qquad (\text{cf. } [6.3]).$$

Or, $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ étant donné, cette analyse ne dépend que de la probabilité image P_Z (puisqu'il en est ainsi du projecteur orthogonal sur $L^2(\mathscr{A}_i)$).

Ces remarques permettent de définir d'une part une relation d'équivalence entre couples de sous-tribus de $\mathscr{A}$, d'autre part une relation d'équivalence entre probabilités sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$. On peut trouver les définitions et une étude de ces équivalences dans [6.3].

Soit π une probabilité sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$, de marges π_1 et π_2.

On note $L^2(\mathscr{A}_i)$ $(i = 1, 2)$ l'espace $L^2(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \pi_i)$, considéré comme sous-espace de $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2, \pi)$.

DÉFINITION 10. — *On appelle analyse canonique de la probabilité π toute analyse canonique de* $L^2(\mathscr{A}_1)$ *et* $L^2(\mathscr{A}_2)$.

Soit $\lambda = \pi_1 \otimes \pi_2$. Il vient alors :

PROPOSITION 11. — *Si l'analyse canonique de* $L^2(\mathscr{A}_1)$ *et* $L^2(\mathscr{A}_2)$ *est de Hilbert-Schmidt, π est absolument continue par rapport à λ et :*

$$\frac{d\pi}{d\lambda} = \sum_{i \in I^*} \rho_i f_i g_i \qquad (1)$$

$$\int \left(\frac{d\pi}{d\lambda}\right)^2 d\lambda = \sum_{i \in I^*} \rho_i^2 \qquad (2)$$

En effet, d'après la remarque 4 de *1*.3, P_{1/H_2}, qui est ici une restriction d'espérance conditionnelle, est un opérateur intégral de noyau $R(s, t)$ appartenant à $L^2[\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2, \lambda]$. D'où :

$$\forall A_1 \in \mathscr{A}_1, \qquad \forall A_2 \in \mathscr{A}_2$$

$$\begin{aligned}\pi(A_1 \times A_2) &= \langle 1_{A_1}, 1_{A_2} \rangle = \langle 1_{A_1}, P_1 1_{A_2} \rangle \\ &= \int_{\Omega_1} \left\{ 1_{A_1} \int_{A_2} R(s, t) d\pi_2(s) \right\} d\pi_1(t) = \int_{A_1 \times A_2} R(s, t) d\lambda\end{aligned}$$

π est donc absolument continue par rapport à λ, et admet R pour densité. (1) et (2) découlent alors de la remarque 4, de *1*.3.

Cette proposition complète la proposition 9 de *2*.3, et conduit à une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une analyse canonique de Hilbert-Schmidt.

En pratique, la détermination de l'analyse canonique d'un couple de v. a. se fait à partir de leur probabilité image.

Exemple : soit $\Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \mathscr{B}_{[0,1]}$, et π la probabilité uniforme sur le périmètre du triangle de sommets $A = (0, 1)$, $B = (1, 1)$ et $C = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. On appelle X_i la projection de $\Omega_1 \times \Omega_2$ sur Ω_i ($i = 1, 2$). $\mathscr{B}_i$ ($i = 1, 2$) est la tribu complétée engendrée par X_i. Soit μ la mesure de Lebesgue de [0, 1].

L'analyse canonique de π est l'image de celle de $(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$, qui est donnée par l'analyse spectrale de $V_1 = E^{\mathscr{B}_1} \circ E^{\mathscr{B}_2}/L^2(\mathscr{B}_1)$. Si f est une application de $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable et de carré π-intégrable :

$$E^{\mathscr{B}_2}[f \circ X_1] = g \circ X_2, \qquad \text{avec } g(y) = E^{X_2 = y}[f \circ X_1]$$

A partir de la loi conditionnelle à $[X_2 = y]$ de X_1, il vient :

$$\begin{cases} g(y) = \dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{1-y}{2}\right) + f\left(\dfrac{1+y}{2}\right)\right] & \text{si } y \neq 1 \\ \quad = \displaystyle\int_{[0,1]} f d\mu & \text{si } y = 1 \end{cases}$$

De même, en explicitant la loi, conditionnellement à $[X_1 = x]$, de X_2, il vient :

$$\begin{cases} h(x) = E^{X_1 = x}[g \circ X_2] = pg(2x-1) + (1-p)g(1) & \text{si } x > \dfrac{1}{2}, \quad \text{où } p = \dfrac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \\ \qquad = pg(1-2x) + (1-p)g(1) & \text{si } x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} E^{\mathscr{B}_1} \circ E^{\mathscr{B}_2}[f \circ X_1] = \dfrac{p}{2}[f(X_1) + f(1-X_1)] + (1-p)\displaystyle\int_{[0,1]} f d\mu & \text{si } 0 < X_1 < 1 \\ \qquad = \displaystyle\int_{[0,1]} f d\mu \quad \text{si } X_1 = 0 \quad \text{où } X_1 = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire, comme X_1 est uniforme sur [0, 1] :

$$E^{\mathscr{B}_1} \circ E^{\mathscr{B}_2}[f \circ X_1] = \frac{p}{2}[f(X_1) + f(1-X_1)] + (1-p)\int_{[0,1]} f d\mu \qquad \pi_1\text{-p. s.}$$

L'analyse spectrale de V_1 conduit à la recherche de f dans $L^2(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \pi_1)$ telle que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad \frac{p}{2}[f(x) + f(1-x)] + (1-p)\int_{[0,1]} f d\mu = \lambda f(x)$$

La résolution de cette équation fonctionnelle conduit aux résultats suivants :

a) 0 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant celui des fonctions f de $L^2(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \pi_1)$ telles que $f(1-x) = -f(x)$ presque partout sur [0, 1]. On note $\{ f_j^0 \}_{j \in J}$ une base orthonormale de ce sous-espace.

b) 1 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant celui engendré par 1_{Ω_1}.

c) p est valeur propre, le sous-espace propre associé étant celui des fonctions f de $L^2(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \pi_1)$ telles que $f(x) = f(1-x)$, avec $\displaystyle\int_{[0,1]} f d\mu = 0$.

Il est donc isomorphe au sous-espaces des fonctions centrées de $L^2([0, 1/2], \mathscr{B}_{[0,1/2]}, \mu')$, où μ' est la mesure de Lebesgue de [0, 1/2]. Comme cet espace est séparable, on peut en choisir un système orthonormal total $\{ f_i' \}_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Soit, pour $i \in \mathbb{N}^*$, g_i définie par :

$$\forall y \in [0, 1] \qquad g_i(y) = \frac{E^{X_2=y}[f_i' \circ X_1]}{\| E^{X_2=y}[f_i' \circ X_1] \|}$$

c'est-à-dire ici :

$$\forall y \in [0, 1] \qquad g_i(y) = f_i'\left(\frac{1-y}{2}\right)$$

Alors, en posant $r_i = \sqrt{p}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, et $r_0 = 1$, le triplet

$$(\{ r_i \}_{i\in\mathbb{N}}, \{ f_i \}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{ f_j'^0 \}_{j\in J}, \{ g_i \}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{ g_{j'}^0 \}_{j'\in J'}),$$

où $\{ g_{j'}^0 \}_{j'\in J'}$ est un système orthonormal total quelconque du noyau de V_2, est une analyse canonique de type dénombrable de (X_1, X_2).

Cette analyse n'est pas compacte (elle n'est pas régulière).

On peut trouver d'autres exemples dans [*6*.3].

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] N. I. Akhieser et I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*. Frederik Ungar Publishing Co., 1961.

[*2*] T. W. Anderson, *Introduction to multivariate statistical analysis*. Wiley, 1958.

[*3*] A. Baccini, *Aspect synthétique de la segmentation et traitement des variables qualitatives à modalités ordonnées*. Thèse de doctorat de spécialité. Université Paul Sabatier, Toulouse, 1975.

[*4*] J. P. Benzecri, *L'analyse des données*, Tome **2**, Dunod, 1973.

[*5*] C. E. E. E., *Analyse des données multidimensionnelles*, Centre d'Études Économiques d'Entreprise, 1971.

[*6*] J. Dauxois et A. Pousse,

[*6*.1] Sur l'analyse canonique de deux tribus. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **278**, série A, 1974, p. 625 à 628.

[*6*.2] *Analyse canonique de deux tribus*. Pub. n° 1-74, Laboratoire de Stat., Université Paul Sabatier, Toulouse, 1974.

[*6*.3] *Image d'une analyse canonique*. Pub. n° 2-74, Laboratoire de Stat., Université Paul Sabatier, Toulouse, 1974.

[*6*.4] Analyses factorielles linéaires et non linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, série A, séance du 29 septembre 1975.

[*6*.5] *Analyses factorielles et dualité : une approche générale*. Pub. n° 02-75, Laboratoire de Stat., Université Paul Sabatier, Toulouse, 1975.

[*6*.6] *k-analyses canoniques. Applications statistiques*. Pub. n° 03-75, Laboratoire de Stat., Université Paul Sabatier, Toulouse, 1975.

[*7*] J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*. Tome **1**, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[*8*] N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators*. Tome **2**, Interscience Publishers, New York, 1963.

[*9*] I. M. GUELFAND et N. Y. VILENKIN, *Les distributions*. Tome **4**, Dunod, Paris, 1967.
[*10*] H. LANCASTER, *The Chi-squared distributions*. Wiley, New York, 1969.
[*11*] M. MASSON,
[*11*.1] Analyse non linéaire des données. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **278**, série A, 1974, p. 803-806.
[*11*.2] *Processus linéaires et Analyse des données non linéaires*. Thèse doctorat d'État, Université Paris VI, 1974.
[*12*] M. A. NAIMARK, *Normed algebras*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972.
[*13*] J. C. NAOURI, *Analyse factorielle des correspondances continues*. Thèse de doctorat d'État, Université Paris VI, 1967.
[*14*] J. NEVEU
[*14*.1] *Martingales à temps discret*. Masson et Cie, Paris, 1972.
[*14*.2] *Processus aléatoires Gaussiens*. Les Presses de l'Université de Montréal, 1968.
[*15*] A. POUSSE, Sur l'analyse canonique considérée comme une analyse en composantes principales. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **276**, série A, 1973, p. 321-324.
[*16*] A. RENYI, *Fundations of Probability*. Holden Day Inc, 1970.
[*17*] F. RIESZ et B. SZ. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
[*18*] G. SAPORTA, *Liaisons entre plusieurs ensembles de variables et codage de données qualitatives*. Thèse de doctorat troisième cycle, Paris VI, 1975.
[*19*] H. H. SCHAEFFER, *Banach lattices and positive operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
[*20*] J. H. VENTER, Probability Measures on Product Spaces. *South-Af. statistical Journal*, 1967.
[*21*] A. ZAANEN, *Linear analysis*. North-Holland Publishing Co., 1964.

(Manuscrit révisé reçu le 21 novembre 1975)