ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. FORTET
M. KAMBOUZIA

Ensembles aléatoires, répartitions ponctuelles aléatoires, problèmes de recouvrement

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 4 (1975), p. 299-316
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_4_299_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XI, n° 4, 1975, p. 299-316.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Ensembles aléatoires, répartitions ponctuelles aléatoires, problèmes de recouvrement

par

R. FORTET et M. KAMBOUZIA
Université de Paris VI, Laboratoire de Probabilités,
Tour 56, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — La théorie des ensembles aléatoires est aujourd'hui assez développée; notre objectif est en particulier d'examiner ses interférences avec la théorie des répartitions ponctuelles aléatoires; une telle répartition est en elle-même interprétable comme un ensemble aléatoire; d'autre part la théorie des ensembles aléatoires considère déjà couramment des systèmes d'ensembles aléatoires, qui sont interprétables comme des répartitions aléatoires en particulier de Poisson; enfin des exemples montrent l'intérêt de considérer certains systèmes d'ensembles aléatoires, comme induits par une répartition ponctuelle aléatoire donnée. L'article termine par quelques résultats sur le problème de recouvrement.

SUMMARY. — The theory of random sets is presently well developped; our aim is in particular, to examine its connections with the theory of points processes; a point process itself is interpretable as a random set; on an other hand, the theory of random sets is already considering systems of random sets, which are interpretable as points processes, particularly Poisson's processes; and examples show the interest of considering some systems of random sets, as induced by a given points process. The paper ends with a few results on the covering problem.

I

1. GÉNÉRALITÉS

La théorie des *ensembles aléatoires* (E. A.) est aujourd'hui assez développée (cf. notamment [*1*] [*2*] [*3*]); notre objectif est d'examiner ses interférences avec la théorie des répartitions ponctuelles aléatoires (r. p. a.); une r. p. a. est évidemment interprétable en elle-même comme un E. A.; d'autre part, la théorie des E. A. considère déjà couramment des systèmes d'E. A., qui sont interprétables comme des r. p. a., en particulier de Poisson (cf. par exemple [*3*]); enfin, des exemples comme [*4*] montrent l'intérêt de considérer certains systèmes d'E. A., comme induits par une r. p. a. donnée. ■

Il nous est d'abord nécessaire de rappeler quelques points fondamentaux de la théorie des E. A.; si A est un sous-ensemble d'un ensemble $\mathscr{X}$, $\breve{A}$ désignera son complémentaire et, si $\mathscr{X}$ est topologique, A^f désignera sa frontière; de même $\breve{E}$ désignera le contraire de l'événement E.

Soient $(\mathscr{U}, \mathscr{P}, p)$ un espace probabilisé; $\mathscr{Y}$ un ensemble d'éléments y; $\mathfrak{P}$ la famille des sous-ensembles de $\mathscr{Y}$.

Soit $Y \subset \mathscr{Y}$ un E. A., c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathscr{Y}$, aléatoire; autrement dit, il existe une application Λ de $\mathscr{U}$ dans $\mathfrak{P}$, et par définition, si $u \in \mathscr{U}$ est l'épreuve réalisée, Y prend la valeur $\Lambda(u) \in \mathfrak{P}$. On définit le graphe Γ de l'E. A. Y par :

$$\Gamma = \{ (u, y) \in \mathscr{U} \times \mathscr{Y} \mid y \in \Lambda(u) \} \subset \mathscr{U} \times \mathscr{Y}. \quad ■$$

Posons :

$$\forall G \in \mathscr{Y} \qquad \Psi[G] = \{ A \in \mathfrak{P} \mid A \cap G = \emptyset \} ;$$

un point important est que :

$$\forall G_1, G_2 \subset \mathscr{Y}, \qquad \Psi[G_1 \cup G_2] = \Psi[G_1] \cap \Psi[G_2] . \quad ■$$

Soit $\mathscr{G}$ une famille donnée de sous-ensembles de $\mathscr{Y}$; $\mathscr{G} \subset \mathfrak{P}$.

Si l'E. A. Y est tel que, $\forall G \in \mathscr{G}$, l'événement : $(Y \cap G = \emptyset) = (Y \in \Psi[G])$ est probabilisé, nous appellerons *$\mathscr{G}$-caractéristique* de Y, la fonction Q(.) de $G \in \mathscr{G}$ définie par :

$$\forall G \in \mathscr{G}, \qquad Q(G) = \Pr (Y \cap G = \emptyset) . \quad ■$$

Soit $\mathfrak{P}_0$ une sous-famille de $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$; posons :

$$\forall G \in \mathscr{G}, \qquad \Psi[\mathfrak{P}_0 \mid G] = \{ A \in \mathfrak{P}_0 \mid A \cap G = \emptyset \} = \mathfrak{P}_0 \cap \Psi[G] ;$$

et désignons par :

$\Psi[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$ la famille des sous-ensembles $\Psi[\mathfrak{P}_0 \mid G]$, $G \in \mathcal{G}$, de $\mathfrak{P}_0$;
$\Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid G]$ la σ-algèbre de sous-ensembles de $\mathfrak{P}_0$, engendrée par $\Psi[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$.

Nous dirons que l'E. A. Y est un $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$ - E. A., si :

1) l'événement $(Y \in \mathfrak{P}_0)$ est probabilisé et certain ; soit : $\Lambda(\mathcal{U}) \subset \mathfrak{P}_0$,
2) $\forall G \in \mathcal{G}$, l'événement $(Y \cap G = \emptyset) = (Y \in \Psi[G]) = (Y \in \Psi[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}])$ est probabilisé.

Ce qui revient à dire qu'un $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$ - E. A. est un élément aléatoire (e. a.) dans $(\mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}])$. Supposons que Y est un $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$ - E. A., désignons par $\mu(.)$ sa loi de probabilité sur $(\mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}])$. L'intérêt de la $\mathcal{G}$-caractéristique résulte du lemme suivant :

LEMME 1.1. — Si $\mathcal{G}$ est stable pour l'union finie, si Y est un $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$ - E. A., sa $\mathcal{G}$-caractéristique $Q(.)$ détermine sa loi de probabilité $\mu(.)$ sur $(\mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}])$. ■

Soit $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'_0 \supset \mathfrak{P}_0$: si Y est un $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$ - E. A., il est clair que Y est à plus forte raison un $[\mathfrak{P}'_0 \mid \mathcal{G}]$ - E. A.

Unions d'E. A. — Soient Y_1, Y_2 deux $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$ - E. A., de $\mathcal{G}$-caractéristiques respectives $Q_1(.)$, $Q_2(.)$; le couple (Y_1, Y_2) est un e. a. dans

$$(\mathfrak{P}_0 \times \mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}] \times \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]).$$

Considérons l'E. A. $Y = Y_1 \cup Y_2$; $\forall G \in \mathcal{G}$, l'événement

$$(Y \cap G = \emptyset) = (Y_1 \cap G = \emptyset) \cap (Y_2 \cap G = \emptyset)$$

est probabilisé, de sorte que Y est en tous cas un $[\mathfrak{P} \mid \mathcal{G}]$ - E. A., dont la $\mathcal{G}$-caractéristique satisfait à :

$$\forall G \in \mathcal{G}, \qquad Q(G) \leqq \inf_{k=1,2} Q_k(G) ;$$

si Y_1 et Y_2 sont mutuellement indépendants, on a plus précisément :

$$\forall G \in \mathcal{G}, \qquad Q(G) = Q_1(G)Q_2(G).$$

En général, l'événement $(Y \in \mathfrak{P}_0)$ n'est pas certain ; il l'est toutefois si $\mathfrak{P}_0$ est stable pour l'union finie, et alors $Y = Y_1 \cup Y_2$ est un $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$-E. A. ■

Considérons plus généralement une suite dénombrable $\{ Y_1, \ldots, Y_k, \ldots \}$ de $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathcal{G}]$ - E. A. Y_k, de $\mathcal{G}$-caractéristiques respectives $Q_k(.)$; $Y = \bigcup_k Y_k$

est un $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{G}]$-E. A. ; soit Q(.) sa $\mathscr{G}$-caractéristique, et $T_n(.)$ la $\mathscr{G}$-caractéristique de $Z_n = \bigcup_{k=i}^{n} Y_k$; on a $\forall G \in \mathscr{G}$:

$$T_n(G) \leqq \inf_{1 \leqq k \leqq n} Q_k(G), \qquad T_{n+i}(G) \leqq T_n(G), \qquad Q(G) = \inf_{n \to +\infty} T_n(G).$$

Si les Y_k sont mutuellement indépendants, on a plus particulièrement :

$$Q(G) = \prod_k Q_k(G).$$

Si $\mathfrak{P}_0$ est stable pour l'union dénombrable, $Y = \bigcup_k Y_k$ est un $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{G}]$-E. A.

2. FONCTION ALÉATOIRE INDICATEUR

Désignons par :

— $\mathscr{F}_s$ la famille des sous-ensembles finis de $\mathscr{Y}$:

— $\mathscr{F}_d$ la famille des sous-ensembles finis ou *dénombrables* de $\mathscr{Y}$.

$\mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_d$ sont stables pour l'union finie ; $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_d$, et $\Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{F}_s] = \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{F}_d]$.

Soit Y un E. A. ; on peut lui associer son *indicateur* Y(.) défini par :

$$\forall y \in \mathscr{Y}, \qquad Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \in Y, \\ 0 & \text{si} \quad y \notin Y ; \end{cases}$$

Y(.) est une fonction aléatoire (f. a.) de $y \in \mathscr{Y}$, qui a la particularité de ne prendre que les valeurs 0 ou 1 ; il est clair que l'étude de Y et celle de Y(.) sont équivalentes.

$\forall y \in \mathscr{Y}$, désignons par $E(y)$ l'événement : $(Y \not\ni y)$. Soient : m, n des entiers $\geqq 0$; $a_1, \ldots, a_m$ m éléments de $\mathscr{Y}$: $b_1, \ldots, b_n$ n éléments de $\mathscr{Y}$. Désignons par $V_{m,n}(a_1, \ldots, a_m ; b_1, \ldots, b_n)$ l'événement :

$$V_{m,n}(a_1, \ldots, a_m ; b_1, \ldots, b_n) = \left(\bigcap_{j=1}^{m} E(a_j) \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} \check{E}(b_k) \right). \tag{2.1}$$

Les deux hypothèses suivantes sont équivalentes :

1 — Y est un $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{F}_s]$-E. A. ;

2 — Y(.) possède une « loi temporelle » $\mathscr{L}^{(y)}$, c'est-à-dire : tous les événements $V_{m,n}(a_1, \ldots, a_m ; b_1, \ldots, b_n)$ du type (2.1) sont probabilisés ($\mathscr{L}^{(y)}$ n'est d'ailleurs autre que le système de leurs probabilités).

Nous supposons dorénavant dans ce paragraphe 2, *que* Y *est un* $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{F}_s]$-

E. A. ; on vérifie qu'il est alors équivalent de se donner la loi temporelle $\mathscr{L}^{(y)}$ de Y(.), ou de se donner la $\mathscr{F}_s$-caractéristique Q(.) de Y.

REMARQUE 2.1. — Il est clair que le complémentaire $\check{Y}$ de Y, de f. a. indicateur $\check{Y}(y) = 1 - Y(y)$, est un $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{F}_s]$-E. A., dont la $\mathscr{F}_s$-caractéristique $\check{Q}(.)$ se déduit de Q(.) par la formule (en fait classique, cf. [7], exemple 2.2) :

$$\begin{aligned}\check{Q}(\{ y_1, \ldots, y_n \}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} Q(\{ y_k \}) + \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 \leqq n} Q(\{ y_{k_1}, y_{k_2} \}) \\ + (-1)^s \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqq n} Q(\{ y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_s} \}) \\ + (-1)^n Q(\{ y_1, \ldots, y_n \})\end{aligned} \tag{2.2}$$

($\forall n$ entier > 0, et $\forall y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{Y}$). Comme Y est le complémentaire de $\check{Y}$, on peut dans (2.2) échanger les rôles de Q(.) et de $\check{Q}(.)$.

On notera que :

$$\forall n \text{ entier} > 0, \qquad E[Y(y_1)Y(y_2) \ldots Y(y_n)] = \check{Q}(\{ y_1, \ldots, y_n \}) ; \tag{2.3}$$

en particulier :

$$E[Y(y)] = \check{Q}(\{ y \}) = 1 - Q(\{ y \}) ; \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\gamma(y_1, y_2) = E[Y(y_1)Y(y_2)] &= Q(\{ y_1, y_2 \}) \\ &= 1 - Q(\{ y_1 \}) - Q(\{ y_2 \}) + Q(\{ y_1, y_2 \}) .\end{aligned} \tag{2.5}$$

Et réciproquement :

$$E[\check{Y}(y)] = Q(\{ y \}), \quad \gamma(y_1, y_2) = E[\check{Y}(y_1)\check{Y}(y_2)] = Q(\{ y_1, y_2 \}), \text{ etc.}$$

APPLICATION 2.1. — Soient $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots$ des $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{F}_s]$-E. A., en nombre fini ou en infinité dénombrable, soient $Q_k(.)$, $\check{Q}_k(.)$ les $\mathscr{F}_s$-caractéristiques de Y_k, $\check{Y}_k$ respectivement ; supposons que $Y = \bigcap_k Y_k$; comme $\check{Y} = \bigcup_k \check{Y}_k$ est un $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{F}_s]$-E. A., il en est de même de Y ; les $\mathscr{F}_s$-caractéristiques Q(.), $\check{Q}(.)$ de Y, $\check{Y}$ respectivement, sont liées par (2.2). Si d'ailleurs les Y_k sont mutuellement indépendants, on a :

$$\check{Q}(.) = \prod_k \check{Q}_k(.) .$$

Intégrales de l'indicateur. — Y étant un $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{F}_s]$-E. A., conservons les notations précédentes : $\check{Y}$, $Y(y)$, $\check{Y}(y)$, Q(.), $\check{Q}(.)$, etc. ; soit $\mathscr{B}$ une σ-algèbre de sous-ensembles de $\mathscr{Y}$.

$Y(.)$, $\check{Y}(.)$ sont des f. a. du second ordre, de covariance $\gamma(.,.)$, $\check{\gamma}(.,.)$; faisons l'hypothèse que :

$$\forall y_1 \in \mathscr{Y}, \qquad Q(\{ y_1, . \}) \text{ est mesurable-}\mathscr{B}. \tag{2.6}$$

Toute fonction de $y \in \mathscr{Y}$, appartenant à l'espace à noyau reproduisant associé à $\check{\gamma}(.,.)$, est mesurable-$\mathscr{B}$; donc en particulier la fonction $E[\check{Y}(.)]$ est mesurable-$\mathscr{B}$; ainsi (2.6) implique que :

a) $Q(\{ . \})$ est mesurable-$\mathscr{B}$;

b) $\forall y_1 \in \mathscr{Y}$, $\gamma(y_1, .)$ est mesurable-$\mathscr{B}$. ■

Soient $\lambda(dy)$ une mesure σ-bornée sur $(\mathscr{Y}, \mathscr{B})$, et $C \in \mathscr{B}$. On est naturellement conduit à considérer des intégrales du type :

$$I = \int_C Y(y)\lambda(dy). \tag{2.7}$$

Ajoutons à (2.6) l'hypothèse que :

$$\int_C [1 - Q(\{ y \})]^{1/2}\lambda(dy) < +\infty. \tag{2.8}$$

Alors il est bien connu que l'intégrale (2.7) I existe, comme étant la variable aléatoire (v. a.) du second ordre I caractérisée par le fait que $\forall$ v. a. du second ordre (réelle) U,

$$E(IU) = \int_C E[Y(y)U]\lambda(dy).$$

On vérifie que, p. s., $0 \leqq I \leqq \lambda(C)$; et que :

$$E(I) = \int_C [1 - Q(\{ y \})]\lambda(dy),$$

$$E(I^2) = \int_C \left[\int_C \gamma(y_1, y_2)\lambda(dy_2) \right]\lambda(dy_1).$$

Supposons en outre que :

$$\lambda(C) < +\infty ; \tag{2.9}$$

alors, $\forall k$ entier $\geqq 0$, le moment $E(I^k)$ existe, et est donné par :

$$E(I^k) = \int_C \left[\cdots \left[\int_C \left[\int_C Q(\{ y_1, \ldots, y_k \})\lambda(dy_k) \right]\lambda(dy_{k-1}) \right] \cdots \lambda(dy_2) \right]\lambda(dy_1). \tag{2.10}$$

Ainsi la loi de probabilité de I se détermine, par l'intermédiaire de ses moments et de $\check{Q}(.)$, à partir de $Q(.)$.

Naturellement, si $\check{Q}(y_1, \ldots, y_k)$ a les propriétés de mesurabilité voulues, (2.10) peut s'écrire :

$$E(I^k) = \int_{C^k} \check{Q}(\{ y_1, \ldots, y_k \})\lambda(dy_1) \times \ldots \times \lambda(dy_k). \qquad (2.11)$$

3. ENSEMBLES FERMÉS ALÉATOIRES

Dans ce paragraphe 3, nous supposons que $\mathscr{Y}$ est topologique ; plus précisément, nous nous limiterons au cas typique où $\mathscr{Y}$ est *distancié, complet, séparable* (D. C. S.) ; désignons par :

— $\mathscr{F}$ la famille des sous-ensembles fermés de $\mathscr{Y}$;

— $\mathscr{F}_c$ la famille des sous-ensembles compacts de $\mathscr{Y}$; $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_c \supset \mathscr{F}_s$;

— $\mathscr{B}$ la σ-algèbre des boréliens de $\mathscr{Y}$.

$\forall F \in \mathscr{F}$, les applications qui, à $\sigma \in \mathscr{F}$, font correspondre $\sigma \cup F \in \mathscr{F}$, respectivement $\sigma \cap F \in \mathscr{F}$, sont mesurables-$(\Sigma[\mathscr{F} \mid \mathscr{F}], \Sigma[\mathscr{F} \mid \mathscr{F}])$.

$\forall n$ entier > 0, l'application qui, à $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathscr{Y}^n$ fait correspondre $\{ y_1, \ldots, y_n \} \in \mathscr{F}$, est mesurable-$(\mathscr{B}^{\otimes n}, \Sigma[\mathscr{F} \mid \mathscr{F}])$.

D'un $[\mathscr{F} \mid \mathscr{F}]$-E. A., nous dirons qu'il est un *ensemble fermé aléatoire* (E. F. A.).

LEMME 3.1. — Si Y est un E. F. A.,

1) son graphe appartient à la σ-algèbre $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}$;

2) sa $\mathscr{F}$-caractéristique $Q(.)$, comme fonction de $F \in \mathscr{F}$, est mesurable-$\Sigma[\mathscr{F} \mid \mathscr{F}]$.

APPLICATION 3.1. — Y étant un E. F. A., soient : $C \in \mathscr{B}$, $\lambda(dy)$ une mesure sur $(\mathscr{Y}, \mathscr{B})$; l'intégrale (2.7) I s'interprète par :

$$I = \int_C Y(y)\lambda(dy) = \lambda(Y \cap C) ; \qquad (3.1)$$

si $\lambda(C) < +\infty$, $\forall k$ entier > 0, (2.11) est valide. ■

De $\mathscr{Y}$ supposé D. C. S., nous dirons qu'il est dénombrablement *localement compact* (D. L. C.), s'il existe une suite $\{ \Gamma_k ; k = 1, 2, \ldots \}$ de sous-ensembles Γ_k de $\mathscr{Y}$, telle que :

$$\forall k, \qquad \Gamma_k \in \mathscr{F}_c, \qquad \Gamma_k \subset \Gamma_{k+1} ; \qquad \bigcup_k \Gamma_k = \mathscr{Y} .$$

Supposons dans la suite du paragraphe 3 *que* $\mathscr{Y}$ *est D. C. S. et D. L. C.* ; alors $\Sigma[\mathscr{F} \mid \mathscr{F}_c] = \Sigma[\mathscr{F} \mid \mathscr{F}]$.

Intersections d'E. F. A. — Soient Y_1, Y_2 deux E. F. A., de $\mathscr{F}$-caractéristiques $Q_1(.)$, $Q_2(.)$ respectivement ; $Y = Y_1 \cap Y_2$ est un E. F. A. ; soit $Q(.)$ sa $\mathscr{F}$-caractéristique ; on a :

$$\forall F \in \mathscr{F}, \qquad Q(F) \geqq \sup_{1,2} (Q_1(F), Q_2(F)).$$

Soient $\mu_1(.)$, $\mu_2(.)$ les lois de probabilités respectives de Y_1, Y_2, sur $(\mathscr{F}, \Sigma[\mathscr{F} \mid \mathscr{F}])$; supposons Y_1, Y_2 mutuellement indépendants ; on a :

$$\forall F \in \mathscr{F}, \qquad Q(F) = \int_{\mathscr{F}} Q_2(\sigma \cap F)\mu_1(d\sigma) = \int_{\mathscr{F}} Q_1(\sigma \cap F)\mu_2(d\sigma) ; \quad (3.1)$$

nous symboliserons la loi de composition (commutative) (3.1) par :

$$Q = Q_1 \boxtimes Q_2 . \quad \blacksquare \qquad (3.2)$$

Considérons maintenant une suite dénombrable $\{ Y_k ; k = 1, 2, \ldots \}$ d'E. F. A. Y_k, de $\mathscr{F}$-caractéristique $Q_k(.)$; posons :

$$Z_n = \bigcap_{k=1}^{n} Y_k, \qquad Y = \bigcap_{k} Y_k ,$$

et désignons par $T_n(.)$, $Q(.)$ les $\mathscr{F}$-caractéristiques de Z_n, Y respectivement. Les Z_n sont des E. F. A., Y est un E. F. A. $\forall F \in \mathscr{F}$ et $\forall n$ entier > 0, $T_{n+1}(F) \geqq T_n(F)$; posons :

$$T(F) = \lim_{n \to +\infty} T_n(F) .$$

On a :

$$\forall F \in \mathscr{F}, \qquad Q(F) \geqq T(F) , \qquad (3.3)$$

$$\forall F \in \mathscr{F}_c, \qquad Q(F) = T(F) . \qquad (3.4)$$

Signalons enfin le :

LEMME 3.2. — Si $\mathscr{Y}$ est D. C. S. et D. L. C., si Y est un E. F. A., sa frontière Y^f est un E. F. A.

Ensembles ouverts aléatoires. — $\mathscr{Y}$ étant supposé D. C. S., nous appellerons *ensemble ouvert aléatoire* (E. O. A.), un E. A. Y tel que $\check{Y}$ est un E. F. A. Par complémentarité, les propriétés précédentes des E. F. A. permettent d'énumérer des propriétés des E. O. A. de façon immédiate.

II

4. RAPPELS SUR LES RÉPARTITIONS PONCTUELLES ALÉATOIRES

Nous utiliserons systématiquement des notions, des résultats et des notations de [5], concernant les *répartitions ponctuelles aléatoires* (r. p. a.). Soient :

— $\mathscr{X}$ un espace d'éléments (ou : points) x ; $\mathscr{A}$ une σ-algèbre de sous-ensembles de $\mathscr{X}$ (contenant en particulier les sous-ensembles réduits à un seul point) ;

— $\{ M_h ; h = 1, 2, \ldots \}$ une famille finie ou dénombrable d'ensembles M_h, telle que : *a*) $\forall h$, $M_h \in \mathscr{A}$; *b*) les M_h sont 2 à 2 disjoints ; *c*) $\bigcup_h M_h = \mathscr{X}$;

— $\mathscr{A}_h$ ($h = 1, 2, \ldots$) la σ-algèbre des sous-ensembles de M_h, qui appartiennent à $\mathscr{A}$.

Soit une r. p. a. R sur $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$, et désignons par $\{ X_j \}$ la famille dénombrable des points aléatoires de $\mathscr{X}$, supposés numérotés par l'indice $j = 1, 2, \ldots$, qui constituent R.

— Nous interpréterons souvent R comme une mesure aléatoire $R(dx)$.

— $\forall A \in \mathscr{A}$, $R[A]$ désignera le nombre aléatoire ($\leqq +\infty$) des X_j appartenant à A.

— Nous dirons que R est *finie*, si p. s. $R[\mathscr{X}] < +\infty$.

— Nous supposerons toujours R *σ-finie* par rapport à $\{ M_h ; h = 1, 2, \ldots \}$, ce qui signifie que $\forall h$, p. s. $R[M_h] < +\infty$; autrement dit, la restriction R_h de R à $(M_h, \mathscr{A}_h)$ est finie. Notons que le cas particulier où R est finie, est celui où on peut prendre $M_1 = \mathscr{X}$, et M_h vide $\forall h \geqq 2$.

— A la r. p. a. R, nous associerons :

a) l'espace $\mathscr{H}_e[R]$ défini dans [5] ;

b) sa *première caractéristique* $\Phi_1^R(f)$ définie par :

$$\Phi_1^R(f) = E\left\{ \exp\left[i \int_{\mathscr{X}} f(x) R(dx) \right] \right\}, \qquad \text{où } f(.(\in \mathscr{H}_e[R] ; \quad (4.1)$$

c) sa deuxième caractéristique $\Phi_2^R(h)$ définie par :

$$\Phi_2^R(h) = \log \Phi_1(f), \qquad \text{où } f(.) \in \mathscr{H}_e[R],$$

et :

$$\forall x \in \mathscr{X}, \qquad h(x) = e^{if(x)} - 1 . \qquad (4.2)$$

Répartitions ponctuelles aléatoires induites. — Nous ferons en particulier intervenir la notion de r. p. a. *induite* (cf. [5]), dont nous rappelons la définition. Soit d'abord R une r. p. a. sur $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ comme ci-dessus. Soient en outre :

— $\mathscr{Z}$ un espace de points z, $\mathfrak{C}$ une σ-algèbre de sous-ensembles de $\mathscr{Z}$ (contenant en particulier les sous-ensembles réduits à un seul point),

— $p(.\,;.)$ une fonction de $(x, \mathrm{C}) \in \mathscr{X} \times \mathfrak{C}$ telle que :

$a)$ $\forall x \in \mathscr{X}$, $p(x\,;.)$ est une loi de probabilité sur $(\mathscr{Z}, \mathfrak{C})$;

$$b) \qquad \forall \mathrm{C} \in \mathfrak{C}, \qquad p(.\,;\mathrm{C}) \text{ est mesurable-}\mathscr{A}. \tag{4.3}$$

Imaginons qu'un premier tirage au sort $\mathscr{T}$ conforme à la loi de probabilité de R, détermine une « valeur » pour le système des $\{ \mathrm{X}_j \}$; puis que, pour chaque j, un tirage au sort $\mathscr{T}_j$ conforme à la loi $p(\mathrm{X}_j\,;.)$ détermine un point Z_j ; supposons les $\mathscr{T}_j$ mutuellement indépendants et indépendants de $\mathscr{T}$ (il n'est pas exclu que certains X_j soient égaux entre eux).

Alors le système $\{ \mathrm{Z}_j \}$ des Z_j constitue sur $(\mathscr{Z}, \mathfrak{C})$ une r. p. a. S dont nous dirons qu'elle est *induite* par R.

5. RÉPARTITION ALÉATOIRE D'ENSEMBLES

En reprenant les notations du paragraphe 1 ($\mathscr{G}$ désignant toujours une famille stable pour l'union finie), d'une r. p. a. $\mathrm{S} = \{ \mathrm{B}_j \}$ sur $(\mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{G}])$, nous dirons qu'elle est une répartition aléatoire d'ensembles (R. A. E.), plus précisément une $[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{G}]$-R. A. E. ; les B_j sont des sous-ensembles de $\mathscr{Y}$, appartenant à $\mathfrak{P}_0$.

Un des problèmes qu'on peut se poser à propos d'une telle R. A. E., est l'étude de l'E. A. :

$$\mathrm{U} = \bigcup_j \mathrm{B}_j .$$

Puisque U est en tous cas un $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{G}]$-E. A., on peut en particulier essayer de déterminer sa $\mathscr{G}$-caractéristique $\mathrm{Q}(.)$. Pour $\mathrm{G} \in \mathscr{G}$, l'événement $(\mathrm{U} \cap \mathrm{G} = \varnothing)$ est l'événement que *tous* les B_j appartiennent à $\Psi[\mathfrak{P}_0 \mid \mathrm{G}]$; en désignant par $\mathrm{A}_0^{\mathrm{G}}$ le complémentaire (dans $\mathfrak{P}_0$) de $\Psi[\mathfrak{P}_0 \mid \mathrm{G}]$, on a donc :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{G}) = \Pr\left(\mathrm{S}[\mathrm{A}_0^{\mathrm{G}}] = 0\right). \tag{5.1}$$

EXEMPLE 5.1. — Supposons que S est la r. p. a. de Poisson $(\mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{G}])$, $\rho(d\omega)$, où $\rho(d\omega)$ est une mesure σ-bornée sur $(\mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{G}])$; alors (5.1) donne :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{G}) = e^{-\rho(\mathrm{A}_0^{\mathrm{G}})} ; \tag{5.2}$$

il apparaît qu'alors Q(.) détermine $\rho(.)$, et par suite la loi de probabilité de S. De (5.2) résulte d'autres remarques, que nous ne détaillons pas parce qu'elles figurent déjà dans la littérature, et sont d'ailleurs triviales. ■

On peut aussi déduire Q(.) des (première, deuxième) caractéristiques $\Phi_1^S(.)$, $\Phi_2^S(.)$ de S ; désignons par $I_0^G(.)$ l'indicateur de A_0^G ; on a :

$$S[A_0^G] = \int_{\mathfrak{P}_0} I_0^G(\omega) S(d\omega) = \sum_j I_0^G(B_j) ;$$

posons :

$$f(\omega) = i\beta \qquad I_0^G(\omega), \qquad \text{où } \omega \in \mathfrak{P}_0$$

et où β est un nombre réel > 0. Ou bien une infinité de B_j appartiennent à A_0^G ; et alors :

$$\sum_j I_0^G(B_j) = +\infty ;$$

ou bien un nombre fini seulement de B_j appartiennent à A_0^G, les autres appartenant à $\Psi[\mathfrak{P}_0 \mid G]$; or si $B_j \in \Psi[\mathfrak{P}_0 \mid G]$, $I_0^G[B_j] = 0$; donc dans le cas envisagé :

$$\sum_j I_0^G(B_j) < +\infty, \qquad \text{et} \qquad \sum_j | e^{-\beta I_0^G(B_j)} - 1 | < +\infty ;$$

de là résulte (cf. [5]) :

$$f(.) \in \mathscr{H}_e[S] .$$

Posons :

$$v = e^{-\beta} \in]0, 1[,$$

et notons que :

$$\begin{aligned} h^S(\omega) &= e^{if(\omega)} - 1 = e^{-\beta I_0^G(\omega) - 1} \\ &= v^{I_0^G(\omega)} - 1 = \begin{cases} v - 1 & \text{si} \quad \omega \in A_0^G \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A_0^G \qquad (\text{soit } \omega \in \Psi[\mathfrak{P}_0 \mid G]) . \end{cases} \end{aligned}$$

$\Phi_1^S(.)$, $\Phi_2^S(.)$ désignant les première et seconde caractéristiques de S, remarquons maintenant que $E(v^{S[A_0^G]})$ est la *fonction génératrice* de la v. a. (entière $\geqq 0$) $S[A_0^G]$; et que :

$$E(v^{S[A_0^G]}) = \Phi_1^S(f) ;$$

il vient donc :

THÉORÈME 5.1. — La $\mathscr{G}$-caractéristique Q(.) de $U = \bigcup_j B_j$, peut se calculer par :

$$\forall G \in \mathscr{G}, \qquad Q(G) = \lim_{v \to +0} e^{\Phi_2^S[v^{I_0^G(.)} - 1]} ,$$

où $\Phi_2^S(.)$ désigne la deuxième caractéristique de S.

Cas ou la R. A. E. S est induite. — Considérons le cas où la R. A. E. S est *induite* par une r. p. a. R sur $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ (nous reprenons les notations du § 4). Si $B \subset \mathscr{Y}$ est tiré au sort selon la loi $p(x\,;\,d\omega)$ sur $(\mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{G}])$, sa $\mathscr{G}$-caractéristique $Q(x \mid .)$ est donnée par :

$$\forall G \in \mathscr{G}, \qquad Q(x \mid G) = p(x\,;\,\Psi[\mathfrak{P}_0 \mid G])\,;$$

l'hypothèse que S est induite par R implique d'après (4.3) que, $\forall G \in \mathscr{G}$, $Q(.\mid G)$ est mesurable-$\mathscr{A}$. Posons :

$$h^{R}(x) = \int_{\mathfrak{P}_0} [v^{I_0^G(\omega)} - 1]\,p(x\,;\,d\omega) \qquad (x \in \mathscr{X})\,; \tag{5.3}$$

en désignant par $\Phi_2^R(.)$ la deuxième caractéristique de R, on sait par le Théorème 11,1 de [5] que :

$$\Phi_2^S[v^{I_0^G(.)} - 1] = \Phi_2^R[h^R(.)]\,.$$

Or :

$$\begin{aligned} h^R(x) &= -1 + \int_{\Psi[\mathfrak{P}_0 \mid G]} v^{I_0^G(\omega)} p(x\,;\,d\omega) + \int_{A_0^G} v^{I_0^G(\omega)} p(x\,;\,d\omega) \\ &= -1 + Q(x \mid G) + v[1 - Q(x \mid G)] \\ &= -(1 - v)[1 - Q(x \mid G)]\,. \end{aligned}$$

THÉORÈME 5.2. — Si S est induite par R comme indiqué ci-dessus, la $\mathscr{G}$-caractéristique $Q(.)$ de $U = \bigcup_j B_j$ peut se calculer par :

$$\forall G \in \mathscr{G}, \qquad Q(G) = e^{\Phi_2^R\{-[1 - Q(.\mid G)]\}}\,, \tag{5.4}$$

où Φ_2^R est la deuxième caractéristique de R.

EXEMPLE 5.2. — Supposons que R est la r. p. a. de Poisson $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, m)$, où $m(dx)$ est une mesure σ-bornée sur $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$; d'après la formule (10.15) de [5], (5.4) s'écrit :

$$\forall G \in \mathscr{G}, \qquad Q(G) = e^{-\int_{\mathscr{X}}[1 - Q(x \mid G)]m(dx)} \tag{5.5}$$

6. ÉTUDE DE L'INTERSECTION

A propos d'une R. A. E. S sur $(\mathfrak{P}_0, \Sigma[\mathfrak{P}_0 \mid \mathscr{G}])$, il est naturel d'étudier aussi l'intersection :

$$I = \bigcap_j B_j\,;$$

mais cette étude ne peut guère être développée que dans des conditions assez particulières. A titre d'illustration, nous allons considérer le cas suivant :

— $\mathscr{Y}$ est D. C. S. et D. L. C. ;

— S est induite par une r. p. a. R comme ci-dessus ; $B_j = B(X_j)$ désignant l'élément de $\mathfrak{P}_0$ associé à X_j par le tirage au sort $\mathscr{C}_j$; $\forall x \in \mathscr{X}$, $\mathscr{L}(x)$ est la loi d'un E. F. A. de $\mathscr{F}$-caractéristique $Q(x \mid .)$.

— R est la r. p. a. de Poisson $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, m)$, où $m(.)$ est une mesure σ-bornée sur $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$, de sorte que R est σ-bornée.

Supposons d'abord R bornée, c'est-à-dire $m(.)$ bornée, soit : $m(\mathscr{X}) < +\infty$. Considérons l'E. A. $C \subset \mathscr{Y}$ obtenu par le tirage au sort en deux étapes suivantes :

— on choisit d'abord au hasard $X \in \mathscr{X}$, selon la loi $\dfrac{m(dx)}{m(\mathscr{X})}$;

— conditionnellement quand $X = x \in \mathscr{X}$, on choisit $C \subset \mathscr{Y}$ selon la loi $\mathscr{L}(x)$.

Conditionnellement quand $X = x$, C est un E. F. A. ; par suite *a priori* C est un E. F. A., dont la $\mathscr{F}$-caractéristique $L(.)$ est donnée par :

$$\forall F \in \mathscr{F}, \qquad L(F) = \frac{1}{m(\mathscr{X})} \int_{\mathscr{X}} Q(x \mid F) m(dx) \tag{6.1}$$

Plaçons nous conditionnellement quand $R[\mathscr{X}] = n$ (n entier > 0) ; d'après [5], la loi de probabilité conditionnelle de I est celle de $I_n = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$, où les C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) sont n E. F. A. mutuellement indépendants, tous de même loi ; I_n est donc conditionnellement un E. F. A. dont la $\mathscr{F}$-caractéristique est :

$$L^{\boxtimes n}(.) .$$

Nous définirons conventionnellement $L^{\boxtimes 0}(.)$ par :

$$\forall F \in \mathscr{F}, \qquad L^{\boxtimes 0}(F) = 1 .$$

THÉORÈME 6.1. — Avec les hypothèses ci-dessus et si R est bornée, I est une E. F. A. dont la $\mathscr{F}$-caractéristique $Q(.)$ est donnée par :

$$\forall F \in \mathscr{F}, \qquad Q(F) = e^{-m(\mathscr{X})} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m(\mathscr{X})^n}{n!} L^{\boxtimes n}(F) . \quad \blacksquare \tag{6.2}$$

Passons au cas général où R est seulement σ-bornée, c'est-à-dire où $m(dx)$ est seulement σ-bornée ; introduisons le système des $\{ M_h ; h = 1, 2, \ldots \}$

comme vu au paragraphe 4 ; désignons par I_h l'intersection des $B(X_j)$ pour lesquels $X_j \in M_h$; I_h est un E. F. A., dont la $\mathscr{F}$-caractéristique $Q_h(.)$ est calculable selon (6.2); d'ailleurs les I_h ($h = 1, 2, \ldots$) sont mutuellement indépendants. La $\mathscr{F}$-caractéristique $T_n(.)$ de l'E. F. A. $\bigcap_{h=1}^{n} I_h$ est calculable par :

$$T_n = Q_1 \boxtimes Q_2 \boxtimes \ldots \boxtimes Q_n ; \tag{6.3}$$

nous pouvons alors affirmer que :

THÉORÈME 6.2. — Sous les hypothèses faites avec R σ-bornée, I est un E. F. A. dont la $\mathscr{F}$-caractéristique Q(.) est déterminée par :

$$\forall F \in \mathscr{F}_c, \qquad Q(F) = \lim_{n \to +\infty} T_n(F). \tag{6.4}$$

III

7. PROBLÈMES DE RECOUVREMENT

Soient : $\mathscr{Y}$ un ensemble non-vide d'éléments y, $C \subset \mathscr{Y}$ donné, $Y \subset \mathscr{Y}$ un E. A. ; nous appelons *problème de recouvrement* (cf. [*4*] [*6*]) l'étude de l'événement :

$$\Lambda(C) = (Y \supset C),$$

c'est-à-dire la détermination d'hypothèses assurant que $\Lambda(C)$ est probilisé ; et lorsque $\Lambda(C)$ est probabilisé, l'évaluation de sa probabilité :

$$\Pi(C) = \Pr(Y \supset C).$$

En désignant par $\check{Y}$ le complémentaire de Y, l'événement $\Lambda(C) = (Y \supset C)$ est identique à l'événement $(\check{Y} \cap C = \emptyset)$; si $\Pr(\check{Y} \cap C = \emptyset)$, qu'on peut noter :

$$Q(C) = \Pr(\check{Y} \cap C = \emptyset),$$

existe, $\Lambda(C)$ est probabilisé, et $\Pi(C) = \check{Q}(C)$.

On vérifie aisément que si $\mathscr{Y}$ est D. C. S. et si Y est un E. F. A., $\forall C \in \mathscr{Y}$, $\Lambda(C)$ est probabilisé. ■

Cas où Y *est un* $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{F}_s]$ *- E. A.* — Soient $\mathscr{B}$ une σ-algèbre de sous-ensembles de $\mathscr{Y}$, $\lambda(dy)$ une mesure sur $(\mathscr{Y}, \mathscr{B})$. Supposons que :

1) $C \in \mathscr{B}$;

2) $\Lambda(C)$ est probabilisé ;

3) Y est un $[\mathfrak{P} \mid \mathscr{F}_s]$ - E. A. ; soient Q(.) sa $\mathscr{F}_s$-caractéristique, $\check{Q}(.)$ celle de $\check{Y}$, $\check{Y}(.)$ la f. a. indicateur de $\check{Y}$ (cf. § 2) ;

4) $\forall y_1 \in \mathcal{Y}$, $Q(\{y_1, .\})$ est mesurable-$\mathcal{B}$;

5) $\int_C Q(y)^{\frac{1}{2}}\lambda(dy) < +\infty$;

et considérons l'intégrale :

$$J = \int_C \check{Y}(y)\lambda(dy),$$

dont l'étude a été faite, au paragraphe 2. On remarque que :

En tous cas, l'événement $(\check{Y} \cap C = \emptyset = \Lambda(C)$ implique l'événement $J = 0$; donc :

$$\Pi(C) \leqq \Pr(J = 0) ; \tag{7.1}$$

$\Pr(J = 0)$ est incluse dans la loi de probabilité de J, qu'on peut déterminer par le système de ses moments $E(J^k)$ ($k = 1, 2, \ldots$), si toutefois ceux-ci sont tous finis ; ceci a certainement lieu si $\lambda(C) < +\infty$, et on a vu paragraphe 2 comment, dans ce cas $\lambda(C) < +\infty$, on peut déduire tous les moments $E(J^k)$ de $Q(.)$ ou de $\check{Q}(.)$. ■

Il est peu commode de déterminer tous les $E(J^k)$; mais définissons la v. a. K par :

$$K = \begin{cases} 0 & \text{si } \ Y \supset C, \\ 1 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

de sorte que :

$$\Pr(K = 0) = \Pi(C) ; \quad \forall k \text{ entier} > 0, \quad E(K^k) = 1 - \Pi(C), \quad J^k = J^k K ;$$

l'inégalité de Hölder donne :

$$[E(J^k)]^{k+1} = [E(J^k K)]^{k+1} \leqq [E(J^{k+1})]^k E(K^{k+1}),$$

soit :

THÉORÈME 7.1. — Sous les hypothèses faites, $\forall k$ entier > 0,

$$\Pi(C) \leqq 1 - \left(\frac{[E(J^k)]^{\frac{1}{k}}}{[E(J^{k+1})]^{1/k+1}}\right)^{k(k+1)}, \tag{7.2}$$

en particulier (pour $k = 1$) :

$$\Pi(C) \leqq 1 - \frac{[E(J)]^2}{E(J^2)}. \tag{7.3}$$

Cas où Y *est une union d'E. O. A.* — Nous supposons ici que $\mathcal{Y}$ est D. C. S. ; si $B \subset \mathcal{Y}$, nous dirons que B est *régulier* si B est ouvert et s'il a la propriété suivante : $\forall$ boule ouverte $\Sigma \subset \mathcal{Y}$, de centre $y \in \mathcal{Y}$ et de rayon $\rho > 0$;

$\forall$ famille dénombrable $\{ Z_l ; l = 1, 2, \ldots \}$ d'éléments de Σ, dense dans Σ ; si $B \supset \{ Z_l ; l = 1, 2. \ldots \}$, alors $B \in y$.

Soient :

— $B_1, \ldots, B_h, \ldots$ des sous-ensembles *ouverts* de $\mathcal{Y}$, non-aléatoires, un nombre fini ;

— $C \subset \mathcal{Y}$ *ouvert* non aléatoire, nous poserons :

$$C_r = C - C \cap \left(\bigcup_h B_h \right).$$

— $\{ y_1, \ldots, y_k, \ldots \}$ une famille dénombrable (non aléatoire) d'éléments $y_k \in C$, dense dans C ; nous désignerons par P_d la propriété que :

$$P_d : \bigcup_h B_h \supset \{ y_1, \ldots, y_k, \ldots \}$$

— V_1 = ensemble des $y \in \mathcal{Y}$ qui appartiennent à l'une au moins des B_h^f ; soit :

$$V_1 = \bigcup_h B_h^f .$$

— V_2 = ensemble des $y \in \mathcal{Y}$ qui appartiennent à au moins 2 B_h^f pour deux valeurs différentes de h ; soit :

$$V_2 = \bigcup_{h \neq j} (B_j^f \cap B_h^f).$$

— W = ensemble des $y \in \mathcal{Y}$ qui appartiennent à B_h^f pour une valeur et une seule de h ; soit :

$$W = \bigcup_h \left[B_h^f - B_h^f \cap \left(\bigcup_{j \neq h} B_j^f \right) \right].$$

Supposons que P_d *a lieu*, et soit $y \in C_r$; donc $y \notin \bigcup_h B_h$, mais en vertu de P_d, y appartient à la frontière de $\bigcup_h B_h$, donc à V_1 ; par suite :

$$C_r \subset C \cap V_1 . \quad \blacksquare \tag{7.4}$$

Soient $y \in C_r$, et Σ la boule ouverte de centre y et de rayon $\rho > 0$ assez petit pour que $\Sigma \subset C$; supposons que $y \in W$, soft pour fixer les idées :

$$y \in B_1^f - B_1^f \cap \left(\bigcup_{j > 1} B_j^f \right) ;$$

alors y est extérieur à chacun des B_j pour lesquels $j > 1$; prenons alors ρ assez petit pour que :

$$\Sigma \cap \left(\bigcup_{j>1} B_j\right) = \emptyset ;$$

et désignons par $\{ z_1, \ldots, z_l, \ldots \}$ ceux des y_k qui appartiennent à Σ ; la suite $\{ z_1, \ldots, z_l, \ldots \}$ est dense dans Σ.

Supposons que P_d *a lieu ;* alors :

$$B_1 \supset \{ z_1, \ldots, z_l, \ldots \} ;$$

Supposons les B_h *réguliers ;* alors : $B_1 \in y$, ce qui est contradictoire. Ainsi :

$$C_r \cap W = \emptyset .$$

Il en résulte :

THÉORÈME 7.2. — Si P_d a lieu et si les B_h sont réguliers,

$$C_r \subset C \cap V_2 . \qquad \blacksquare$$

Le Théorème 7.2 peut sans doute être étendu. D'autre part, si par exemple $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$, on remarque : que la propriété pour les B_h d'être « réguliers », peut dériver de la propriété pour les B_h d'être convexes ; et, en considérant le cas où les B_h sont des boules, que la dimension n peut jouer un rôle. $\blacksquare$

Ceci dit, l'application du Théorème 7.2 au problème de recouvrement, peut intervenir de la façon suivante : supposons $\mathcal{Y}$ D. C. S. et en outre D. L. C. ; $C \subset \mathcal{Y}$ étant ouvert fixe, supposons maintenant que les B_h, en nombre fini *fixé*, sont des E. O. A. avec la propriété d'être p. s. réguliers. Les B_h^f, frontières des B_h, sont aussi les frontières des $\breve{B}_h$; donc d'après le Lemme 3.2, V_2, ici aléatoire, est un E. F. A. ; comme C, ouvert, est union dénombrable de fermés, l'événement $C \cap V_2 = \emptyset$ est probabilisé.

Posant : $Y = \bigcup_h B_h$, considérons (notations de ci-dessus) l'événement $\Lambda(C) = (Y \supset C)$; on a :

$$(P_d \text{ a lieu}) \cap (C \cap V_2 = \emptyset) \subset \Lambda(C) \subset (P_d \text{ a lieu}) ;$$

supposons que :

$$\Pr (C \cap V_2) = \emptyset) = 1 ,$$

ce qui arrive fréquemment dans les applications ; comme l'événement : $(P_d \text{ a lieu}) = (Y \supset \{ y_1, \ldots, y_k, \ldots \})$ est visiblement probabilisé, $\Lambda(C)$ est probabilisé, et :

$$\Pi(C) = \Pr (Y \supset \{ y_1, \ldots, y_k, \ldots \}) . \tag{7.5}$$

Cas d'E. A. induits par une r. p. a. — Il est difficile d'ajouter aux précédentes, d'autres remarques de portée un peu générale : le problème de recouvrement en effet peut se présenter de façon très diverses.

L'évaluation de l'efficacité de l'arrosage d'une zone par des aérosols, de l'efficacité du bombardement d'un territoire, etc., suggère le cas où Y résulte d'une induction par une r. p. a. R (cf. [*4*]) ; les résultats de la section II, ajoutés à ceux ci-dessus du paragraphe 7, donnent évidemment des moyens d'aborder ce cas ; il ne nous paraît pas utile de détailler ici les développements, intéressants mais assez triviaux, qu'on obtient ainsi.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] G. CHOQUET, Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, t. **5**, 1953-1954, p. 131.

[*2*] *Stochastic geometry.* Édité par E. F. Harding et D. G. Kendall, J. Wiley, New York, 1974.

[*3*] G. MATHERON, *Random sets and integral geometry.* J. Wiley edit., New York, 1975.

[*4*] L. A. SHEPP, Covering the line with random intervals. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **23**, 1972, p. 163.

[*5*] R. FORTET, Sur les répartitions ponctuelles aléatoires, en particulier de Poisson. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section B, t. **4**, 1968, p. 99.

[*6*] L. A. SHEPP, Covering the circle with random arcs. *Israel J. of Math.*, t. **11**, 1972, p. 328.

[*7*] R. FORTET, *Éléments de la théorie des probabilités.* C. N. R. S. Edit., Paris, 1965.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1975)